го аппарата / С.В. Ненахов, Ю.Н. Челноков // Бортовые интегрированные комплексы и современные проблемы управления: сб. тр. междунар. конф. М.: МАИ, 1998. С. 59–60.
3. *Сергеев, Д.А.* Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата / Д.А. Сергеев, Ю.Н. Челноков // Проблемы точной механики и управления: сб. науч. тр. ИПТМУ РАН. Саратов: Изд-во СГТУ, 2002. С. 64–75.
4. *Челноков, Ю.Н.* Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты / Ю.Н. Челноков // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231–234.
5. *Челноков, Ю.Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига – Гамильтона по его угловой скорости / Ю.Н. Челноков // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. 1977. № 3. С. 11–20.
6. *Понтрягин, Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. М.: Наука, 1974. 331 с.

УДК 517.956.32

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

О.А. Репин[1], **С.А. Сайганова**[2]

[1]Самарский государственный экономический университет,
кафедра математической статистики и эконометрики;
[2]Самарский государственный технический университет,
кафедра прикладной математики и информатики
E-mail: matstat@mail.ru, syomina_sa@mail.ru

Для уравнения смешанного типа с частной дробной производной Римана – Лиувилля исследована нелокальная задача, краевое условие которой содержит линейную комбинацию обобщенных операторов дробного интегродифференцирования. Доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: краевая задача, оператор, дробная производная, интегральное уравнение.

A Boundary-Value Problem with Shifted for a Mixed Type Equation with Fractional Derivative

O.A. Repin[1], **S.A. Sayganova**[2]

[1]Samara State Economic University,
Chair of Mathematical Statistics;
[2]Samara State Technical University,
Chair of Applied Mathematics and Informatics
E-mail: matstat@mail.ru, syomina_sa@mail.ru

A non-local problem for a mixed type equation with partial fractional derivative of Riemann – Liouville is studied, boundary condition of which contains linear combination of generalized operators of fractional integro-differentiation. Unique solvability of the problem is then proved.

Key words: boundary-value problem, operator, fractional derivative, integral equation.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - D^{\alpha}_{0+,\,y}u, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \quad m > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $D^{\alpha}_{0+,\,y}$ — частная дробная производная Римана – Лиувилля порядка α, $0 < \alpha < 1$, от функции $u(x,\,y)$ по второй переменной [1, с. 341]

$$\left(D^{\alpha}_{0+,\,y}u\right)(x,\,y) = \frac{d}{dy}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y \frac{u(x,\,t)}{(y-t)^{\alpha}}\,dt \qquad (0 < \alpha < 1,\ y > 0).$$

Настоящая работа является продолжением исследований [2, 3] для уравнения (1). Это уравнение рассматривается в области D, которая представляет собой объединение верхней полуплоскости $D^+ = \{(x,\,y):\ -\infty < x < \infty,\ y > 0\}$ и области D^-, лежащей в нижней полуплоскости $(y < 0)$ и ограниченной характеристиками

$$AC:\quad \xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \qquad BC:\quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1), а также отрезком $[0,\,1]$ прямой $y = 0$. Обозначим через $I = (0,\,1)$ единичный интервал прямой $y = 0$, а через $\theta_0(x) = \frac{x}{2} - i\left(\frac{m+2}{2}x\right)^{\frac{2}{m+2}}$ — точку пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x,\,0) \in I$, с характеристикой AC.

Пусть $\left(I_{0+}^{\alpha,\,\beta,\,\eta} f\right)(x)$ — оператор обобщенного дробного интегродифференцирования, введенный в [4] (см. также [1, с. 326–327]) и имеющий при действительных α, β, η и $x > 0$ вид

$$\left(I_{0+}^{\alpha,\,\beta,\,\eta} f\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta;\, -\eta;\, \alpha;\, 1-\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt & (\alpha > 0), \\ \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n \left(I_{0+}^{\alpha+n,\,\beta-n,\,\eta-n} f\right)(x) & (\alpha \le 0,\ n = [-\alpha]+1), \end{cases}$$

в частности

$$\left(I_{0+}^{0,\,0,\,\eta} f\right)(x) = f(x). \tag{2}$$

Заметим, что если $\alpha > 0$, то справедливы формулы

$$\left(I_{0+}^{\alpha,\,-\alpha,\,\eta} f\right)(x) = \left(I_{0+}^{\alpha} f\right)(x), \qquad \left(I_{0+}^{-\alpha,\,\alpha,\,\eta} f\right)(x) = \left(D_{0+}^{\alpha} f\right)(x),$$

где $\left(I_{0+}^{\alpha} f\right)(x)$ и $\left(D_{0+}^{\alpha} f\right)(x)$ — операторы дробного интегродифференцирования Римана – Лиувилля порядка $\alpha > 0$ [4, с. 42, 44]:

$$\left(I_{0+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \qquad (\alpha > 0,\ x > 0),$$

$$\left(D_{0+}^{\alpha} f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\, dt \qquad (\alpha > 0,\ n = [\alpha]+1). \tag{3}$$

Для уравнения (1) изучим задачу со смещением (по терминологии А. М. Нахушева [5]): найти решение $u(x,\,y)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям:

$$y^{1-\alpha} u\big|_{y=0} = 0 \qquad (-\infty < x \le 0,\ 1 \le x < \infty), \tag{4}$$

$$A_1 x^{1+b-2\beta} \left(I_{0+}^{a,\,b,\,-a-\beta} t^{2\beta-1} u\left[\theta_0(t)\right]\right)(x) = A_2 \left(I_{0+}^{a+\beta,\,0,\,\beta-a-b-1} u(t,\,0)\right)(x) + g(x) \qquad (x \in I), \tag{5}$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0-} u(x,\,y) = c(x) \lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha} u(x,\,y) \qquad (x \in \overline{I}\,), \tag{6}$$

$$\lim_{y\to 0-} u_y(x,\,y) = d(x) \lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha} \left(y^{1-\alpha} u(x,\,y)\right)_y \qquad (x \in I\,). \tag{7}$$

Здесь $\beta = \frac{m}{2m+4}$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$, $a > -\beta$, $b < 2\beta$, $g(x)$, $c(x)$, $d(x)$ — заданные функции такие, что

$$g(x) \in C^1(\overline{I}\,) \cap C^2(I), \qquad c(x),\ d(x) \in C^2(\overline{I}\,) \cap C^3(I), \qquad c(x)d(x) > 0,\ \frac{d^2}{dx^2}\left[c(x)d(x)\right] \le 0, \tag{8}$$

A_1, A_2 — действительные числа.

Будем искать решение $u(x,\,y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области D таких, что

$$y^{1-\alpha} u(x,\,y) \in C(\overline{D}^{+}), \qquad u(x,\,y) \in C(\overline{D}^{-}),$$

$$y^{1-\alpha} \left(y^{1-\alpha} u\right)_y \in C\left(D^{+} \cup \{(x,\,y):\ 0 < x < 1,\ y = 0\}\right),$$

$$u_{xx} \in C\left(D^{+} \cup D^{-}\right), \qquad u_{yy} \in C\left(\overline{D}^{-}\right).$$

1. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пусть существует решение исследуемой задачи. Введем обозначения

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}u(x,\,y)=\tau_1(x),\qquad \lim_{y\to 0-} u(x,\,y)=\tau_2(x), \tag{9}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x,\,y)\right)_y=\nu_1(x),\qquad \lim_{y\to 0-} u_y(x,\,y)=\nu_2(x). \tag{10}$$

Известно (см., например, [6]), что решение уравнения (1) в полуплоскости $y>0$, удовлетворяющее условию (4) и условию

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}u(x,\,y)=\tau_1(x)\qquad (x\in \overline{I}\,), \tag{11}$$

имеет вид

$$u(x,\,y)=\int\limits_0^1 G(x,\,y,\,t)\tau_1(t)\,dt, \tag{12}$$

где

$$G(x,\,y,\,t)=\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\,y^{\frac{\alpha}{2}-1}\,e^{1,\,\frac{\alpha}{2}}_{1,\,\frac{\alpha}{2}}\left(-|x-t|y^{-\frac{\alpha}{2}}\right),$$

$$e^{1,\,\frac{\alpha}{2}}_{1,\,\frac{\alpha}{2}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\,\Gamma\left(\dfrac{(1-k)\alpha}{2}\right)}. \tag{13}$$

Замечание. Решение $u(x,\,y)$ может быть выражено в терминах специальных функций Райта $\varphi(\gamma,\,\delta,\,z)$, определяемых для действительных γ, δ и комплексного z посредством степенного ряда [7, с. 225]

$$\varphi(\gamma,\,\delta;\,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\,\Gamma\left(\gamma k+\delta\right)}.$$

Согласно (13)

$$e^{1,\,\frac{\alpha}{2}}_{1,\,\frac{\alpha}{2}}(z)=\varphi\left(-\frac{\alpha}{2},\,\frac{\alpha}{2};\,z\right),$$

и, следовательно,

$$u(x,\,y)=\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\,y^{\frac{\alpha}{2}-1}\int\limits_0^1\varphi\left(-\frac{\alpha}{2},\,\frac{\alpha}{2};\,-|x-t|\,y^{-\frac{\alpha}{2}}\right)\tau_1(t)\,dt.$$

Также известно [8], что функциональное соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное из параболической части D^+ на линию $y=0$ имеет вид

$$\nu_1(x)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\,\tau_1''(x). \tag{14}$$

Найдем соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесенное на линию $y=0$ из гиперболической части D^- области D.

Используя формулу (19) из работы [2] (или формулу (22) из [3]), имеем

$$u\left[\theta_0(x)\right]=\gamma_1\left(I^{\beta,\,0,\,\beta-1}_{0+}\tau_2(t)\right)(x)+\gamma_2\left(I^{1-\beta,\,2\beta-1,\,\beta-1}_{0+}\nu_2(t)\right)(x), \tag{15}$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)},\qquad \gamma_2=-\frac{1}{2}(2-4\beta)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}.$$

Подставляя выражение (15) в краевое условие (5) и применяя последовательно соотношения [4]

$$x^{\alpha+\beta+\eta}\left(I^{\alpha,\,\beta,\,\eta}_{0+}\varphi\right)(x)=\left(I^{\alpha,\,-\alpha-\eta,\,-\alpha-\beta}_{0+}\varphi\right)(x),\qquad \alpha>0, \tag{16}$$

$$\left(I^{\alpha,\,\beta,\,\eta}_{0+}I^{\gamma,\,\delta,\,\alpha+\eta}_{0+}\varphi(t)\right)(x)=\left(I^{\alpha+\gamma,\,\beta+\delta,\,\eta}_{0+}\varphi\right)(x),\qquad \alpha>0, \tag{17}$$

и вновь (16), после несложных вычислений получим

$$k_1\left(I_{0+}^{a+\beta,\,0,\,\beta-a-b-1}\tau_2(t)\right)(x)+k_2\left(I_{0+}^{a+1-\beta,\ 2\beta-1,\,\beta-a-b-1}\nu_2(t)\right)(x)=g(x), \tag{18}$$

где $k_1=A_1\gamma_1-A_2$, $k_2=A_1\gamma_2$.

Применяя к обеим частям равенства (18) оператор $\left(I_{0+}^{\alpha+\beta,\,0,\,\beta-a-b-1}\right)^{-1}=I_{0+}^{-\alpha-\beta,\,0,\,2\beta-b-1}$, опираясь на соотношения (17) и (2), будем иметь

$$k_1\,\tau_2(x)+k_2\left(I_{0+}^{1-2\beta}\nu_2\right)(x)=g_1(x), \tag{19}$$

где $g_1(x)=\left(I_{0+}^{-a-\beta,\,0,\,2\beta-b-1}g(t)\right)(x)$.

Теперь рассмотрим соответствующую однородную задачу ($g(x)\equiv 0$) и применим методику, использованную нами в [3].

Пусть $k_1\neq 0$:

$$A_1\Gamma(2\beta)-A_2\Gamma(\beta)\neq 0. \tag{20}$$

Тогда соотношение (19) принимает вид

$$\tau_2(x)=k_3\left(I_{0+}^{1-2\beta}\nu_2\right)(x)+\frac{1}{k_1}g_1(x),$$

где $k_3=-k_2/k_1$.

Оценим интеграл

$$I=\int\limits_0^1\tau_2(x)\nu_2(x)\,dx.$$

Согласно (9), (6) и (10), (7)

$$\tau_2(x)=c(x)\tau_1(x),\qquad \nu_2(x)=d(x)\nu_1(x), \tag{21}$$

и поэтому в силу соотношения (14) имеем

$$I=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^1 c(x)\tau_1(x)\,d(x)\tau_1''(x)\,dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что согласно (4) и (11) $\tau_1(0)=\tau_1(1)=0$, получаем

$$I=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\frac{1}{2}\int\limits_0^1\tau_1^2(x)\frac{d^2}{dx^2}\left(c(x)\,d(x)\right)\,dx-\int\limits_0^1\left(\tau_1'(x)\right)^2c(x)\,d(x)\,dx\right]. \tag{22}$$

Отсюда в силу условий (8) вытекает оценка сверху для интеграла (22):

$$I\le 0. \tag{23}$$

Покажем, что для I справедлива аналогичная оценка снизу:

$$I\ge 0. \tag{24}$$

Используя идею Ф. Трикоми [9, с. 385–386], приходим к соотношению

$$I=\frac{k_3\sin(\pi\beta)}{\pi}\int\limits_0^\infty s^{2\beta-1}\left[\left(\int\limits_0^1\nu_2(x)\cos(sx)\,dx\right)^2+\left(\int\limits_0^1\nu_2(x)\sin(sx)\,dx\right)^2\right]ds. \tag{25}$$

Пусть $A_1\le 0$, $A_2>0$, тогда из (25) следует, что $I\ge 0$.

Из (23) и (24) вытекает, что $I = 0$, и, следовательно, согласно (22)

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \tau_1^2(x)\frac{d^2}{dx^2}\left(c(x)\,d(x)\right)dx - \int\limits_0^1 \left(\tau_1'(x)\right)^2 c(x)\,d(x)\,dx = 0.$$

Отсюда в силу условия (8) и равенств $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$ получаем, что

$$\tau_1(x) = 0 \qquad \forall\ x \in \overline{I}. \tag{26}$$

Если же $k_1 = 0$ и $k_2 \neq 0$:

$$A_1\Gamma(2\beta) - A_2\Gamma(\beta) = 0, \qquad A_1 \neq 0, \tag{27}$$

то (19) есть однородное уравнение Абеля:

$$k_2\left(I_{0+}^{1-2\beta}\nu_2\right)(x) = 0,$$

имеющее только тривиальное решение $\nu_2(x) = 0$ [1, с. 46]. Тогда в силу второй формулы в (21) $\nu_1(x) = 0$, соотношение (14) вместе с условиями $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$ приводит к равенству (26). Это согласно (12) означает, что $u(x, y) \equiv 0$ в области $\overline{D}$, что и доказывает единственность решения исходной задачи при выполнении условий (20) и (27).

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Согласно (12), для доказательства существования решения исследуемой задачи достаточно найти явное выражение для $\nu_1(x)$. Покажем существование решения исходной задачи в следующих случаях: а) $k_1 \neq 0,\ k_2 = 0$; б) $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0$; в) $c(x) = c = \mathrm{const}$; г) $c(x) = c = \mathrm{const}$, $d(x) = d = \mathrm{const}$.

Заметим, что в силу (21) уравнение (19) принимает вид

$$k_1\,c(x)\,\tau_1(x) + k_2\left(I_{0+}^{1-2\beta}d(t)\nu_1(t)\right)(x) = g_1(x), \tag{28}$$

где $g_1(x) = \left(I_{0+}^{-a-\beta,\,0,\,2\beta-b-1}g(t)\right)(x)$.

Если $k_1 \neq 0,\ k_2 = 0$, то (28) дает явное выражение для $\tau_1(x)$: $\tau_1(x) = g_1(x)/k_1 c(x)$, и $\nu_1(x)$ находится по формуле (14).

Если $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0$, то (28) есть интегральное уравнение Абеля первого рода

$$k_2\left(I_{0+}^{1-2\beta}d(t)\,\nu_1(t)\right)(x) = g_1(x), \tag{29}$$

с $0 < \beta < \frac{1}{2}$. Согласно условию (8) $g(x) \in C^1(\overline{I}\,) \cap C^2(I)$. Функция $g_1(x)$ также непрерывна [10] и известное решение уравнения (29) (см., например [1, с. 39]) дает явное выражение для $\nu_1(x)$ в виде

$$\nu_1(x) = \frac{1}{k_2\,d(x)}\,\frac{d}{dx}\,\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\int\limits_0^x (x-t)^{2\beta-1}g_1(t)\,dt.$$

Если $c(x) = c \neq 0$ есть действительная постоянная, то уравнение (28) принимает вид

$$k_1 c\,\tau_1(x) + k_2\left(I_{0+}^{1-2\beta}d(t)\nu_1(t)\right)(x) = g_1(x). \tag{30}$$

Продифференцировав обе части (30) дважды по x и учитывая (3), (14), получим

$$c\,k_1\Gamma(1+\alpha)\,\nu_1(x) + k_2\left(D_{0+}^{1+2\beta}d(t)\,\nu_1(t)\right)(x) = g_1''(x). \tag{31}$$

Как известно [1, с. 52], если

$$\nu_2(x) = d(x)\,\nu_1(x) = \lim_{y\to 0-} u_y(x, y) \in C\left((0,\,1]\right), \tag{32}$$

то верна формула

$$\left(I_{0+}^{1+2\beta} D_{0+}^{1+2\beta} \nu_2(t)\right)(x) = \nu_2(x) - c_1 x^{2\beta} - c_2 x^{2\beta-1}, \tag{33}$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(2\beta+1)} \left(I_{0+}^{1-2\beta} \nu_2\right)'(0+), \qquad c_2 = \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \left(I_{0+}^{1-2\beta} \nu_2\right)(0+). \tag{34}$$

Если условие (32) выполняется, то, применяя оператор $I_{0+}^{1+2\beta}$ к обеим частям (31) и учитывая (33), приходим к интегральному уравнению:

$$k_2\, d(x)\, \nu_1(x) + c\, k_1\, \Gamma(1+\alpha) \left(I_{0+}^{1+2\beta} \nu_1(t)\right)(x) = g_2(x), \tag{35}$$

где

$$g_2(x) = \left(I_{0+}^{1+2\beta} g_1''(t)\right)(x) + k_2[c_1 x^{2\beta} + c_2 x^{2\beta-1}]. \tag{36}$$

Если $k_2\, d(x) \neq 0$, то (35) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\nu_1(x) + \int\limits_0^x K(x,\, t)\, \nu_1(t)\, dt = F(x) \tag{37}$$

с непрерывным ядром $K(x,\, t) = \dfrac{c\, k_1 \Gamma(1+\alpha)}{k_2\, \Gamma(1+2\beta)\, d(x)} (x-t)^{2\beta}$ и свободным членом $F(x) = \dfrac{1}{k_2\, d(x)}\, g_2(x)$, где функция $g_2(x)$ дается формулой (36), а постоянные c_1, c_2 — формулой (34).

Известно (см., например, [11]), что уравнение (37) имеет единственное решение $\nu_1(x)$.

Если $c(x) = c \neq 0$, $d(x) = d \neq 0$, то уравнение (28) сводится к дифференциальному уравнению дробного порядка $(1+2\beta)$:

$$\left(D_{0+}^{1+2\beta} \nu_1(t)\right)(x) + k_3\, \nu_1(x) = \Phi(x), \tag{38}$$

где $k_3 = \dfrac{c\, k_1\, \Gamma(1+\alpha)}{k_2\, d}$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{k_2\, d}\, g_1''(x)$.

В работе [2] нами выписано в явном виде решение $\nu_1(x)$ уравнения (38), что согласно (12) завершает доказательство существования решения исходной задачи.

Библиографический список

1. *Самко, С.Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

2. *Килбас, А.А.* Аналог задачи Бицадзе – Самарского для смешанного уравнения с дробной производной / А.А. Килбас, О.А. Репин // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 5. С. 638–644.

3. *Килбас А.А.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с частной производной Римана – Лиувилля и операторами обобщенного дробного интегрирования в краевом условии / А.А. Килбас, О.А. Репин // Труды Ин-та математики (Минск). 2004. Т. 12, № 2. С. 75–81.

4. *Saigo M.* A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function / M. Saigo // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. Vol. 11, № 2. P. 135–143.

5. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных / А.М. Нахушев. М.: Наука, 2006. 287 с.

6. *Псху А.В.* Решение краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка / А.В. Псху. Нальчик: Изд-во НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2001. 43 с. (Сообщ. Научн.-исслед. ин-та приклад. математики и автоматизации КБНЦ РАН).

7. *Бейтмен Г.* Высшие трансцендентные функции. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1967. 299 с.

8. *Геккиева С.Х.* Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной / С.Х. Геккиева // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН. 2001. № 2(7). С. 78–80.

9. *Трикоми, Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных / Ф. Трикоми. М.: Из-во иностр. лит., 1957. 443 с.

10. *Saigo, M.* Generalized fractional integrals and derivatives in Holder space / M. Saigo, A.A. Kilbas // Transforms Methods Special Functions; Proc. Intern. Workshop (Sofia, 12–12 August). Singapore, 1995. P. 282–293.

11. *Килбас А.А.* Интегральные уравнения: курс лекций / А.А. Килбас. Минск: БГУ, 2005. 143 с.