Библиографический список

1. *Дуплий С. А., Котульская О. И.* Квазидетерминанты, некоммутативные детерминанты и необратимые суперматричные структуры // Вестн. Харьков. национального ун-та. 2003. Т. 585, вып. 1, 21. С. 19–28.
2. *Dieudonne' J.* Les determinants sur un corps noncommutatiff // Bul. Soc. Math. France. 1943. Vol. 71. P. 27–45.
3. *Артин Э.* Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969. 284 с.
4. *Понизовский И. С.* Об определителе матриц с элементами из некоторого кольца // Мат. сборник. 1958. Т. 45 (87), № 1. С. 3–16.
5. *Кирчей И. И.* Правило Крамера для кватернионных систем линейных уравнений // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, № 4. С. 67–94.
6. *Соколов О. Б.* Применение булевых определителей к анализу логических многополюсников // Ученые записки Казанск. госун-та. 1963. Т. 123, № 6. С. 155–164.
7. *Chesley D. S., Bevis J. H.* Determinants for matrices over lattices // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1969. A. 68, № 2. P. 138–144.
8. *Reutenauer C., Straubing H.* Inversion of matrices over a commutative semiring // J. of Algebra. 1984. Vol. 88. P. 350–360.
9. *Kuntzmann J.* Théorie des réseaux (graphes). Paris: Dunod, 1972.
10. *Poplin P. L., Hartwig R. E.* Determinantal identities over commutative semirings // Linear Algebra Appl. 2004. Vol. 387. P. 99–132.
11. *Поплавский В. Б.* О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 4. С. 42–60.
12. *Поплавский В. Б.* О разложении определителей булевых матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, вып. 4. С. 199–223.
13. *Поплавский В. Б.* Обратимые и присоединенные булевы матрицы // Чебышевский сб. 2005. Т. 6, вып. 1. С. 174–181.
14. *Rutherford D. E.* Inverses of Boolean matrices // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1963. Vol. 6, № 1. P. 49–53.
15. *Скорняков Л. А.* Обратимые матрицы над дистрибутивными структурами // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 2. С. 182–185.

УДК 512.548 + 512.571

О КОНГРУЭНЦИЯХ ЧАСТИЧНЫХ n-АРНЫХ ГРУППОИДОВ

А.В. Решетников

Московский институт электронной техники,
кафедра высшей математики – 1
E-mail: a_reshetnikov@lavabit.com

Введено понятие R_i-конгруэнции частичного n-арного группоида как обобщение понятия правой или левой конгруэнции обычного группоида. Доказано, что при фиксированном i R_i-конгруэнции частичного n-арного группоида G образуют решётку, в которой решётка конгруэнций на G не обязатльно является подрешёткой. Построен пример, когда решётка конгруэнций частичного n-арного группоида G не является подрешёткой решётки отношений эквивалентности на G. Даётся характеристика частичных n-арных группоидов, на которых при некотором i каждое отношение эквивалентности является R_i-конгруэнцией.

Ключевые слова: частичный группоид, n-арный группоид, решётка конгруэнций, решётка односторонних конгруэнций, решётка отношений эквивалентности.

On Congruences of Partial n-ary Groupoids

A.V. Reshetnikov

Moscow Institute of Electronic Technology,
Chair of Higher Mathematics – 1
E-mail: a_reshetnikov@lavabit.com

R_i-congruence is defined for partial n-ary groupoids as a generalization of right congruence of a full binary groupoid. It is proved that for any i the R_i-congruences of a partial n-ary groupoid G form a lattice, where the congruence lattice of G is not necessary a sublattice. An example is given, demonstrating that the congruence lattice of a partial n-ary groupoid is not always a sublattice of the equivalence relations lattice of G. The partial n-ary groupoids G are characterized such that for some i, all the equivalence relations on G are its R_i-congruences.

Key words: partial groupoid, n-ary groupoid, congruence lattice, one-sided congruence lattice, equivalence relation lattice.

Свойства конгруэнций универсальных алгебр активно изучаются многими авторами, и в этом направлении имеется немало интересных результатов; их обзор пердставлен, например, в [1]. Хорошо известно, что конгруэнции произвольной универсальной алгебры A образуют решётку по включению, и эта решётка является подрешёткой решётки отношений эквивалентности на множестве A. В работе [2] изучались алгебры, у которых конгруэнцией является любое отношение эквивалентности. Для таких алгебр была получена простая характеризация. К тому же она была уточнена для частных случаев универсальных алгебр — группоидов и полугрупп [2].

Представляет интерес обобщить результаты работы [2] на случай частичных универсальных алгебр, которые изучены в гораздо меньшей степени, чем обычные (полные) универсальные алгебры. Многие понятия (например, ассоциативность) обобщаются на случай частичных универсальных алгебр различными неэквивалентными способами. Основы теории частичных универсальных алгебр изложены в монографии [3]. Свойства алгебраических объектов далеко не всегда сохраняются при обобщениях такого рода. Не всегда сохраняется, как будет доказано в данной работе, упомянутое свойство решётки конгруэнций быть подрешёткой решётки отношений эквивалентности. Мы определим квазиконгруэнцию и покажем, что для полных универсальных алгебр понятия квазиконгруэнции и конгруэнции совпадают, а для частичных алгебр решётка конгруэнций не обязана быть даже подрешёткой решётки квазиконгруэнций.

Некоторое обобщение результатов работы [2] даётся во второй части данной работы. В конце рассмотрен пример, показывающий, что частичные универсальные алгебры, у которых каждое отношение эквивалентности является квазиконгруэнцией, устроены гораздо сложнее полных универсальных алгебр, обладающих таким же свойством.

1. О КОНГРУЭНЦИЯХ ЧАСТИЧНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Напомним некоторые определения (подробнее см. в [3]). Пусть A — произвольное множество, A' — какое-либо подмножество множества A^n, $f : A' \to A$ — отображение. Тогда говорят, что на множестве A задана *частичная n-арная операция* f. Пусть $\Sigma = \{f_\alpha | \alpha \in I\}$ — множество (конечное или бесконечное) частичных операций, заданных на A. Тогда A называется *частичной универсальной алгеброй*. При этом множество Σ называется *сигнатурой* частичной универсальной алгебры A. Если в сигнатуру частичной универсальной алгебры A входит только одна операция, являющаяся частичной n-арной, то будем говорить, что A — *частичный n-арный группоид*.

Отношение эквивалентности $\sim$ на частичной универсальной алгебре A называется *конгруэнцией*, если для любой операции $f \in \Sigma$ и любых элементов $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in A$ таких, что $a_1 \sim b_1, \ldots, a_n \sim b_n$, выполняется следующее условие: если $f(a_1, \ldots, a_n)$ и $f(b_1, \ldots, b_n)$ определены, то $f(a_1, \ldots, a_n) \sim f(b_1, \ldots, b_n)$. Отношение эквивалентности $\sim$ на частичном n-арном группоиде A назовём *R_i-конгруэнцией*, или *конгруэнцией на i-й позиции*, если для любой операции $f \in \Sigma$ и любых $a_1, \ldots, a_{i-1}$, $a_{i+1}, \ldots, a_n$, b, $c \in A$ таких, что $b \sim c$, выполняется условие: либо $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ не определено, либо $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ не определено, либо $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n) \sim f(a_1, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Если A является бинарным (т. е. обычным) группоидом, то R_1-конгруэнция на A — это то же самое, что *правая конгруэнция* на A, а R_2-конгруэнция на A — это *левая конгруэнция* на A.

Множество всех отношений эквивалентности на множестве A обозначим через $\operatorname{Eq} A$, множество всех конгруэнций — $\operatorname{Con} A$, множество всех R_i-конгруэнций — $R_i \operatorname{Con} A$. Введём также следующие отношения эквивалентности на множестве A: $\Delta = \{(a, a) | a \in A\}$, $\rho_{a,b} = \Delta \cup \{(a, b), (b, a)\}$ (при $a \neq b$).

Следующее утверждение непосредственно следует из определений.

Предложение 1.1. *Пусть A — частичный n-арный группоид. Каким бы ни было натуральное число $i \leq n$, любая конгруэнция на A является на нём R_i-конгруэнцией.*

Другими словами, $\operatorname{Con} A \subseteq R_1 \operatorname{Con} A \cap \ldots \cap R_n \operatorname{Con} A$. Но, как показывает следующий пример, в общем случае $\operatorname{Con} A \neq R_1 \operatorname{Con} A \cap \ldots \cap R_n \operatorname{Con} A$.

Пример 1.1. Пусть $A = \{a, b, c\}$ и каждый из элементов a,c совпадает с каким-нибудь из произведений aa, ab, ba, bb (при этом некоторые из этих четырёх произведений могут быть не определены). Тогда отношение эквивалентности $\rho_{a,b}$ не является конгруэнцией. Если не определены произведения aa и bb или ab и ba, то отношение $\rho_{a,b}$ может оказаться одновременно правой и левой конгруэнцией — например, в случае частичного группоида, заданного следующей таблицей Кэли:

	a	b	c
a	a	—	—
b	—	c	—
c	—	—	—

Другими словами, *класс частичных (n-арных) группоидов, у которых каждое отношение эквивалентности является одновременно R_1-, …, R_n-конгруэнцией, шире, чем класс частичных (n-арных) группоидов, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией.* Введём обозначение: $R_1 \operatorname{Con} A \cap \ldots \cap R_n \operatorname{Con} A = \operatorname{QCon} A$. Элемент множества $\operatorname{QCon} A$ назовём *квазиконгруэнцией*.

Пусть $\sigma \in \operatorname{QCon} A$. Получим достаточное условие того, что $\sigma \in \operatorname{Con} A$. Множество всех тех наборов $(a_1, \ldots, a_n)$, для которых определено произведение $f(a_1, \ldots, a_n)$, обозначим через V; таким образом, $V \subseteq A^n$. Являясь отношением эквивалентности, σ разбивает группоид на классы эквивалентности. Для каждого набора классов $(K_1, \ldots, K_n)$ введём бинарное отношение $E_{K_1,\ldots,K_n} \subseteq (V \cap (K_1 \times \ldots \times K_n))^2$, в котором пусть находятся наборы, отличающиеся ровно одной компонентой, и только они. Тогда будет иметь место следующее утверждение.

Предложение 1.2. *Если для данной квазиконгруэнции все графы $(V, E_{K_1,\ldots,K_n})$ являются связными, то эта квазиконгруэнция является конгруэнцией.*

Доказательство. Пусть произведения $f(a_1, \ldots, a_n)$ и $f(b_1, \ldots, b_n)$ определены для некоторых $a_1 \sim b_1 \in K_1, \ldots, a_n \sim b_n \in K_n$. Класс эквивалентности, в котором находится элемент $f(a_1, \ldots, a_n)$, обозначим через K. Имеем $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in V \cap K_1 \times \ldots \times K_n$. Тогда, поскольку граф $(V, E_{K_1,\ldots,K_n})$ является связным, можно построить путь $(e_1, \ldots, e_l)$ из $(a_1, \ldots, a_n)$ в $(b_1, \ldots, b_n)$. Следующим образом получаем, что $f(b_1, \ldots, b_n) \in K$: $f(a_1, \ldots, a_n) \in K$, а если $(c_1, \ldots, c_n) \in V \cap K_1 \times \ldots \times K_n$, $f(c_1, \ldots, c_n) \in K$ и из вершины $(c_1, \ldots, c_n)$ какое-то ребро графа $(V, E_{K_1,\ldots,K_n})$ ведёт в вершину $(d_1, \ldots, d_n)$, то наборы $(c_1, \ldots, c_n)$ и $(d_1, \ldots, d_n)$ отличаются ровно одной компонентой, и потому по определению квазиконгруэнции $f(d_1, \ldots, d_n) \in K$.

Из предложения следует, что если A является полным (n-арным) группоидом, то каждая квазиконгруэнция на A является конгруэнцией на A, т. е. для полного группоида выполняется равенство $\operatorname{Con} A = \operatorname{QCon} A$.

В произвольной решётке L операции инфимума и супремума будем обозначать соответственно $\wedge_L$ и $\vee_L$. При этом, если понятно, о какой решётке идёт речь, будем писать просто $\wedge$ и $\vee$.

Напомним следующий известный факт из теории решёток.

Предложение 1.3. *Полная по инфимумам полурешётка с наибольшим элементом является полной решёткой.*

Пользуясь им, докажем следующее утверждение.

Предложение 1.4. *Пусть A — частичный n-арный группоид. Тогда каждое из множеств $R_1 \operatorname{Con} A$, …, $R_n \operatorname{Con} A$, $\operatorname{QCon} A$, $\operatorname{Con} A$ является решёткой, причём в любой из этих решёток $\sigma \wedge \tau = \sigma \cap \tau$.*

Доказательство. Легко видеть, что пересечение $[R_i$-$]$ конгруэнций частичного группоида является его $[R_i$-$]$ конгруэнцией. Так как A^2 является наибольшим элементом в любом из множеств $R_1 \operatorname{Con} A$, …, $R_n \operatorname{Con} A$, $\operatorname{QCon} A$, $\operatorname{Con} A$, то из предложения 1.3 следует, что каждое из этих множеств является полной решёткой.

Хорошо известно, что если a, b, c, d — различные элементы *полного* n-арного группоида A, то справедливы следующие утверждения:

(i) $\rho_{a,b}, \rho_{c,d} \in R_i \operatorname{Con} A \quad \Rightarrow \quad \rho_{a,b} \cup \rho_{c,d} = \rho_{a,b} \vee \rho_{c,d} \in R_i \operatorname{Con} A$;

(ii) $\rho_{a,b}, \rho_{c,d} \in \operatorname{Con} A \quad \Rightarrow \quad \rho_{a,b} \cup \rho_{c,d} = \rho_{a,b} \vee \rho_{c,d} \in \operatorname{Con} A$;

(iii) $\rho_{a,b}, \rho_{b,c} \in R_i \operatorname{Con} A \quad \Rightarrow \quad \Delta \cup \{a, b, c\}^2 = \rho_{a,b} \vee \rho_{b,c} \in R_i \operatorname{Con} A$;

(iv) $\rho_{a,b}, \rho_{b,c} \in \operatorname{Con} A \quad \Rightarrow \quad \Delta \cup \{a, b, c\}^2 = \rho_{a,b} \vee \rho_{b,c} \in \operatorname{Con} A$.

Из них следует, что если A — полный n-арный группоид, то каждое из множеств $R_i \operatorname{Con} A$ является подрешёткой решётки $\operatorname{Eq} A$, а множество $\operatorname{Con} A = \operatorname{QCon} A$ является подрешёткой каждой из решёток $R_i \operatorname{Con} A$. Для частичного же n-арного группоида, как мы сейчас докажем, остаётся в силе только утверждение (i). Более того, если A — частичный n-арный группоид, то мы покажем, что из $\rho_{a,b}, \rho_{b,c} \in \operatorname{Con} A$ не следует, что $\Delta \cup \{a, b, c\}^2 \in R_i \operatorname{Con} A$.

Пример 1.2. Пусть произведение элементов частичного группоида A определено следующей таблицей Кэли (x, y — произвольные элементы):

	a	b	c	d
a	a	—	d	x
b	—	—	d	x
c	d	d	d	x
d	x	x	x	y

Нетрудно видеть, что отношения $\rho_{a,b}$ и $\rho_{b,c}$ являются конгруэнциями, в то время как отношение $\Delta \cup \{a, b, c\}^2$ не является ни правой, ни левой конгруэнцией этого частичного группоида. Этим опровергаются импликации (iii) и (iv).

Пример 1.3. Рассмотрим частичный группоид со следующей таблицей умножения:

	a	b	c	d
a	a	a	a	—
b	a	b	—	d
c	a	—	c	d
d	—	d	d	d

Легко показать, что каждое отношение эквивалентности вида $\rho_{x,y}$ является конгруэнцией данного группоида. В то же время отношение $\sigma = \Delta \cup \{a, b\}^2 \cup \{c, d\}^2$ не является конгруэнцией, так как $(a, b), (c, d) \in \sigma$, но $(ac, bd) = (a, d) \notin \sigma$. Этим опровергается импликация (ii).

Предложение 1.5. *Пусть a, b, c, d — различные элементы частичного n-арного группоида A. Тогда $\rho_{a,b}, \rho_{c,d} \in R_i \operatorname{Con} A \quad \Rightarrow \quad \rho_{a,b} \cup \rho_{c,d} = \rho_{a,b} \vee_{R_i \operatorname{Con} A} \rho_{c,d} \in R_i \operatorname{Con} A$.*

Доказательство. Легко видеть, что $\rho_{a,b} \cup \rho_{c,d} \in R_i \operatorname{Con} A$. Но так как в решётке $\operatorname{Eq} A$ выполняется $\rho_{a,b} \cup \rho_{c,d} = \rho_{a,b} \vee \rho_{c,d}$, то в решётке $R_i \operatorname{Con} A$ отношение $\rho_{a,b} \cup \rho_{c,d}$ является супремумом отношений $\rho_{a,b}$ и $\rho_{c,d}$.

Таким образом, оказывается, что решётки конгруэнций частичных n-арных группоидов устроены сложенее, чем решётки конгруэнций полных n-арных группоидов. Из предложения 1.1, из определений квазиконгруэнции и R_i-конгруэнции следует, что для любого частичного n-арного группоида

$$\operatorname{Con} A \subseteq \operatorname{QCon} A \subseteq R_i \operatorname{Con} A \subseteq \operatorname{Eq} A.$$

Покажем, что ни одно из этих четырёх множеств не является в общем случае подрешёткой какого-либо другого множества из этих четырёх.

Из примера 1.2 следует, что *в решётке $\operatorname{Eq} A$ ни одно из подмножеств $\operatorname{Con} A$, $R_i \operatorname{Con} A$, $\operatorname{QCon} A$ не является в общем случае подрешёткой*. Действительно, $\Delta \cup \{a, b, c\}^2 = \rho_{a,b} \vee_{\operatorname{Eq} A} \rho_{b,c}$, но $\rho_{a,b} \vee_L \rho_{b,c} = A^2$ при $L = \operatorname{Con} A$, $R_i \operatorname{Con} A$, $\operatorname{QCon} A$.

Пример 1.3 показывает, что *в решётках $\operatorname{QCon} A$ и $R_i \operatorname{Con} A$ подмножество $\operatorname{Con} A$ не обязательно является подрешёткой*. Действительно, из предложения 1.5 следует, что $\Delta \cup \{a, b\}^2 \cup \{c, d\}^2 = \rho_{a,b} \vee_{\operatorname{QCon} A} \rho_{c,d} = \rho_{a,b} \vee_{R_i \operatorname{Con} A} \rho_{c,d}$, но $\Delta \cup \{a, b\}^2 \cup \{c, d\}^2 \neq \rho_{a,b} \vee_{\operatorname{Con} A} \rho_{c,d}$.

Пример 1.4. В частичном бинарном группоиде следующей таблицей Кэли:

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	—	—	—	—
c	d	d	d	d
d	—	—	—	—

выполняется следующее соотношение: $\rho_{a,b} \vee_{R_2 \operatorname{Con} A} \rho_{b,c} = \Delta \cup \{a, b, c\}^2 \notin R_1 \operatorname{Con} A$. Из него следует, что *в решётке $R_i \operatorname{Con} A$ подмножество $\operatorname{QCon} A$ не является в общем случае подрешёткой*.

2. О ЧАСТИЧНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ, У КОТОРЫХ КАЖДОЕ ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЯВЛЯЕТСЯ КОНГРУЭНЦИЕЙ

В работе [2] была доказана теорема, характеризующая алгебры, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией. Чтобы её сформулировать, нам понадобятся следующие определения. Операция f (на универсальной алгебре A) называется *константой*, если существует такое $c \in A$, что $f(a_1, \ldots, a_n) = c$ при всех $a_1, \ldots, a_n \in A$. Операция f — *проекция*, если существует такое i, что $f(a_1, \ldots, a_n) = a_i$ при всех $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Теорема 2.1 [2, теорема 3.3]. *Пусть A — универсальная алгебра с сигнатурой Σ. Все отношения эквивалентности на алгебре A являются её конгруэнциями в том и только том случае, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

(i) $|A| \leq 2$;

(ii) каждая операция $f \in \Sigma$ является константой или проекцией.

Нам также понадобятся следующие определения, первое из которых обобщает понятие области определения из [3]. *Областью определения* частичной n-арной операции f на частичной универсальной алгебре A называется множество $\mathrm{dom} f = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n : \text{существует } f(a_1, \ldots, a_n)\}$. *Областью значений* для f называется множество $\mathrm{im} f = \{f(a_1, \ldots, a_n) | (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{dom} f\}$.

Лемма 2.2. *Пусть на множестве A определена частичная унарная операция φ. Любое отношение эквивалентности на A является конгруэнцией тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

(i) $|\mathrm{dom}\varphi| = 2$ и $\mathrm{dom}\varphi = \mathrm{im}\varphi$;

(ii) $\varphi(x) = x$ для любого $x \in \mathrm{dom}\varphi$;

(iii) при некотором $c \in A$ выполняется $\varphi(x) = c$ для всех $x \in \mathrm{dom}\varphi$.

Доказательство. *Достаточность* очевидна. Докажем *необходимость*. Рассмотрим 3 случая.

1-й случай: $|\mathrm{dom}\varphi| = 2$. Пусть $\mathrm{dom}\varphi = \{a, b\}$. Если $\varphi(a) = \varphi(b)$, то выполняется (iii). Если $\varphi(a) = a$ и $\varphi(b) = b$, то выполняется (ii). Если $\varphi(a) = b$ и $\varphi(b) = a$, то выполняется (i). Иначе отношение эквивалентности $\rho_{a,b}$ не является конгруэнцией.

2-й случай: $\mathrm{im}\varphi \subseteq \mathrm{dom}\varphi$. В этом случае подмножество $dom\varphi$ является полной подалгеброй. Применяя теорему 2.1 к множеству $dom\varphi$ и используя определение подалгебры, получим, что выполняется хотя бы одно из условий (i) — (iii).

3-й случай: $|\mathrm{dom}\varphi| \geq 3, \mathrm{im}\varphi \backslash \mathrm{dom}\varphi \neq \emptyset$. Тогда найдётся такой элемент $x \in \mathrm{dom}\varphi$, что $\varphi(x) \notin \mathrm{dom}\varphi$. Условия (i) и (ii) не выполнены. Если условие (iii) также не выполнено, то найдётся такой элемент $y \in \mathrm{dom}\varphi$, что $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Поскольку при этом $\{\varphi(x), \varphi(y)\} \neq \{x, y\}$, то отношение $\rho_{x,y}$ не является конгруэнцией в противоречие с условием леммы. Таким образом, в данном случае выполняется условие (iii).

Если ни один из рассмотренных случаев не имеет места, то $|\mathrm{dom}\varphi| \leq 1$, и выполняется условие (iii).

Набор $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ элементов частичного n-арного группоида A назовём *R_i-единицей*, или *единицей на i-й позиции*, если для любого элемента $b \in A$ произведение $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ либо равно b, либо не определено. Набор $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ элементнов из A назовём *обобщённым R_i-нулём*, или *обобщённым нулём на i-й позиции*, если для любых элементов $b, c \in A$ из того что произведения $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ и $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ существуют, следует, что они равны. R_1-единицу частичного бинарного группоида назовём просто правой единицей, а обобщённый R_1-нуль частичного бинарного группоида — просто обобщённым правым нулём.

Для произвольного $\alpha \in A^{n-1}$ определим частичную n-арную операцию $f_\alpha(x)$ следующим образом: $f_{(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n)}(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Будем говорить, что частичная унарная операция φ, заданная на некотором множестве, является *ограничением транспозиции*, если для некоторых элементов x, y выполняются условия $\varphi(x) = y$ и $\varphi(y) = x$, а для других аргументов значение частичной операции φ не определено.

Теорема 2.3. *Все отношения эквивалентности частичного n-арного группоида A являются его R_i-конгруэнциями в том и только том случае, если для каждого элемента $\alpha \in A^{n-1}$ выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

(i) α является единицей на i-й позиции;

(ii) α является обобщённым нулём на i-й позиции;

(iii) f_α является ограничением транспозиции.

Доказательство. Все отношения эквивалентности на A являются R_i-конгруэнциями тогда и только тогда, когда все они являются конгруэнциями каждой из частиных алгебр (A, f_α). Из леммы 2.2 следует, что для этого необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из условий (i)–(iii) теоремы.

При $n = 2$ получаем описание частичных бинарных группоидов, у которых каждое отношение эквивалентности является правой конгруэнцией:

Теорема 2.4. *Все отношения эквивалентности частичного бинарного группоида A являются его R_1-конгруэнциями (т. е. правыми конгруэнциями) в том и только том случае, если для каждого элемента $a \in A$ выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

(i) a является правой единицей;

(ii) a является обобщённым правым нулём;

(iii) частичная унарная операция $f_a(x) = xa$ является ограничением транспозиции.

Теорема 2.1 описывает полные универсальные алгебры, у которых каждое отношение эквивалентности является квазиконгруэнцией. Ключевую роль в этой теореме играют понятия константы и проекции. В случае частичных универсальных алгебр можно также определить константу как операцию $f : A^n \to A$, для которой $|f(A, A, \ldots, A)| \le 1$, и проекцию, как операцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ такую, что $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ либо не определено, либо равно x_i. Однако теорема, аналогичная теореме 2.1, для частичных универсальных алгебр неверна, как показывает следующий пример.

Пример 2.1. Пусть на множестве $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ $(n \ge 4)$ частичное умножение задано следующим образом: $a_i a_j = a_i$, если оба индекса i, j являются чётными; $a_i a_j = a_j$, если оба индекса i, j являются нечётными; иначе $a_i a_j$ не определено. Тогда эта частичная операция не является ни константой ($a_1 a_1 = a_1 \ne a_2 = a_2 a_2$), ни проекцией на первый аргумент ($a_1 a_3 = a_3 \ne a_1$), ни проекцией на второй аргумент ($a_2 a_4 = a_2 \ne a_4$). В то же время легко видеть, что каждое отношение эквивалентности является квазиконгруэнцией на A, а значит, $\mathrm{Con}\, A = \mathrm{Eq}\, A$.

Отметим следующее следствие из теоремы 2.3.

Предложение 2.5. *Пусть частичный n-арный группоид A удовлетворяет условию:*

$$|f(a_1, \ldots, a_{i-1}, A, a_{i+1}, \ldots, a_n)| \ge 3 \quad \text{при всех} \quad a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A.$$

Тогда любое отношение эквивалентности на A является его R_i-конгруэнцией в том и только том случае, если A можно дополнить до полного n-арного группоида, у которого любое отношение эквивалентности является R_i-конгруэнцией на A.

Доказательство. *Достаточность* очевидна. Докажем *необходимость*. Рассмотрим произвольный элемент $\alpha \in A^{n-1}$. Ввиду условия данной теоремы случай (iii) теоремы 2.3 невозможен, поэтому α является единицей на i-й позиции или обобщённым нулём на i-й позиции. Ясно, что в первом случае f_α дополняется до проекции на i-ю компоненту, а во втором случае — до константы. Тогда A будет дополнен до полного группоида, в котором каждый элемент $\alpha \in A^{n-1}$ является единицей на i-й позиции или обобщённым нулём на i-й позиции. По теореме 2.3 это будет полный группоид, у которого каждое отношение эквивалентности является R_i-конгруэнцией.

Выражаю благодарность И. Б. Кожухову за постановку некоторых вопросов, ответы на которые получены в данной статье.

Библиографический список

1. Общая алгебра: в 2 т. Т. 2 / В. А. Артамонов, В. Н. Салий, Л. А. Скорняков и др.; под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, Физматлит, 1991, (гл. Универсальные алгебры. С. 295–367).

2. *Кожухов И. Б., Решетников А. В.* Алгебры, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, № 3. С. 161–192.

3. *Ляпин Е. С., Евсеев А. Е.* Частичные алгебраические действия. СПб.: Образование, 1991. 163 с.