



26. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.  
 27. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. 2-е изд. М.: Наука, 1978. 687 с.  
 28. Palymskiy I.B., Fomin P.A., Hieronymus H. The Rayleigh–Benard convection in gas with chemical

- reactions // Сиб. журн. вычисл. математики. 2007. Т. 10, № 4. Р. 371–383.  
 29. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 378 с.  
 30. Турбулентность. Принципы и применение / Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. М.: Мир, 1980. 535 с.

УДК 539.3

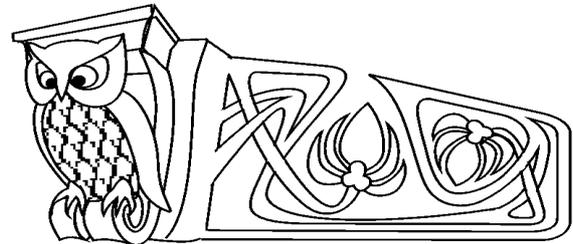
## ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

О.М. Ромакина

Саратовский государственный университет,  
 кафедра компьютерной алгебры и теории чисел  
 E-mail: romakinaom@hotmail.ru

При предположениях классической теории Кирхгофа рассматривается задача об установившихся колебаниях тонкой прямоугольной пластинки из упругого ортотропного материала. Двумерная краевая задача сводится к одномерной модифицированным методом сплайн-коллокации. Одномерная задача решается численно устойчивым методом дискретной ортогонализации. Приведены результаты вычислений первых трех резонансных частот и графики, изображающие форму деформированной срединной поверхности, для трех вариантов условий на контуре.

**Ключевые слова:** метод сплайн-коллокации, ортотропная пластинка.



### On the Steady Transverse Vibrations of a Rectangular Orthotropic Plate

O.M. Romakina

Saratov State University,  
 Chair of Computer's Algebra and Theory of Numbers  
 E-mail: romakinaom@hotmail.ru

The problem of the steady transverse vibrations of a rectangular orthotropic plate under the classical Kirchhoff theory assumptions is considered. Two-dimensional problem is reduced to one-dimensional via the modified spline-collocation method. One-dimensional problem is numerically solved with the stable discrete orthogonalization method. Numerical results for three resonance frequencies and plots for deformed middle-surface are presented for three types of boundary conditions on the edges.

**Key words:** modied method of spline collocation, ortotropic plate.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Уравнение для определения прогиба  $w$  при динамическом изгибе ортотропной пластинки в рамках классической теории Кирхгофа, как известно [1], имеет вид

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (1)$$

где  $w = w(x, y, t)$  — прогиб точек срединной плоскости;  $h$  — толщина пластинки;  $t$  — время; координатные оси  $x$  и  $y$  направлены по главным направлениям анизотропии;  $D_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — соответствующие жесткости;  $\rho$  — плотность материала.

Будем рассматривать установившиеся колебания пластинки под действием поперечной нагрузки интенсивности

$$q(x, y, t) = q_0(x, y) \sin \omega t. \quad (2)$$

Тогда в безразмерных переменных  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/b$  ( $a$  и  $b$  — размеры пластинки в плане) для безразмерной амплитуды  $W(\xi, \eta)$  прогиба  $w(x, y, t) = hW(\xi, \eta) \sin \omega t$  из (1) с учетом (2) следует уравнение

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \mu_4 c^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \mu_1 c^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} - \lambda^4 W = q_0(\xi, \eta) / D_1^*, \quad (3)$$

где  $\lambda^4 = \rho h_0^2 a^2 \omega^2 / D_1^*$  — безразмерный частотный параметр.

Амплитудные значения внутренних моментов и обобщенных поперечных усилий выражаются через функцию  $W$  по формулам

$$M_x^* = -a^2 D_1^* \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \nu_2 c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right), \quad M_y^* = -a^2 D_1^* \mu_1 \left( \nu_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right), \quad H_{xy} = -a^2 D_1^* \mu_2 c \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta},$$



$$N_x^* = -aD_1^* \left( \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \mu_3 c^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} \right), \quad N_y^* = -aD_1^* c \left( \mu_3 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \mu_1 c^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} \right). \quad (4)$$

В формулах (3) и (4) обозначено  $\mu_1 = D_2^*/D_1^*$ ,  $\mu_2 = 2D_k^*/D_1^*$ ,  $\mu_3 = (D_3^* + 2D_k^*)/D_1^*$ ,  $\mu_4 = 2D_3^*/D_1^*$ ,  $D_i^* = D_i h a^{-4}$  ( $i = 1, 2, 3, k$ ).

Граничные условия для функции  $W$  определяются способом закрепления и нагружения контура пластинки. Для численного решения соответствующей краевой задачи применим модифицированный метод сплайн-коллокации [2].

## 2. СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ $W(\xi, \eta)$ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Предположим, что на сторонах  $\xi = \xi_0 = 0$  и  $\xi = \xi_N = 1$  заданы произвольные граничные условия с единственным ограничением, что вид этих условий в пределах каждой стороны остается неизменным. Края  $\eta = 0$  и  $\eta = 1$  могут быть закреплены произвольно (в частном случае свободны) или нагружены усилиями и моментами, меняющимися во времени пропорционально  $\sin \omega t$ .

Рассмотрим два возможных непротиворечивых варианта условий при  $\xi = \xi_0$  и  $\xi = \xi_N$ .

а) Пусть при  $\xi = \xi_0$  и  $\xi = \xi_N$  заданы прогиб и угол поворота

$$\begin{aligned} w(\xi_0, \eta, t) &= h\tilde{w}_0(\eta) \sin \omega t, & \frac{\partial w(\xi_0, \eta, t)}{\partial \xi} &= h\tilde{\Theta}_0(\eta) \sin \omega t, \\ w(\xi_N, \eta, t) &= h\tilde{w}_N(\eta) \sin \omega t, & \frac{\partial w(\xi_N, \eta, t)}{\partial \xi} &= h\tilde{\Theta}_N(\eta) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (5)$$

Функция  $W(\xi, \eta)$  ищется в виде

$$W(\xi, \eta) = \sum_{j=-2}^{N+2} B_{5,j}(\xi) W_j(\eta), \quad (6)$$

где  $B_{5,j}$  — нормализованные  $B$ -сплайны пятой степени [3], построенные по системе равноотстоящих узлов  $\Delta = \{\xi_i\}$ ,  $\xi_i = ih_x$ ,  $i = \overline{-5, N+5}$ ,  $h_x = 1/N$ .

Из условий (5) после отделения временной переменной получаются две системы линейных алгебраических уравнений, из которых функции  $W_k(\eta)$  ( $k = -1, -2, N+1, N+2$ ) выражаются через функции  $W_r(\eta)$  ( $r = \overline{0, N}$ ) и заданные значения прогиба и угла поворота при  $\xi = \xi_0$  и  $\xi = \xi_N$ . Тогда после несложных преобразований разложение (6) записывается в виде

$$W(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^N \varphi_j(\xi) W_j(\eta) + \tilde{M}(\xi, \eta), \quad (7)$$

где обозначено

$$\delta_0 = B_{5,-1}(\xi_0) B'_{5,-2}(\xi_0) - B'_{5,-1}(\xi_0) B_{5,-2}(\xi_0), \quad \delta_N = B_{5,N+1}(\xi_N) B'_{5,N+2}(\xi_N) - B'_{5,N+1}(\xi_N) B_{5,N+2}(\xi_N);$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_0(\xi, \eta) &= \delta_0^{-1} \left( - [B_{5,-2}(\xi) B'_{5,-1}(\xi_0) - B_{5,-1}(\xi) B'_{5,-2}(\xi_0)] \tilde{w}_0(\eta) + \right. \\ &\quad \left. + [B_{5,-2}(\xi) B_{5,-1}(\xi_0) - B_{5,-1}(\xi) B_{5,-2}(\xi_0)] \tilde{\Theta}_0(\eta) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_N(\xi, \eta) &= \delta_N^{-1} \left( [B_{5,N+1}(\xi) B'_{5,N+2}(\xi_N) - B_{5,N+2}(\xi) B'_{5,N+1}(\xi_N)] \tilde{w}_N(\eta) - \right. \\ &\quad \left. - [B_{5,N+1}(\xi) B_{5,N+2}(\xi_N) - B_{5,N+2}(\xi) B_{5,N+1}(\xi_N)] \tilde{\Theta}_N(\eta) \right), \end{aligned}$$

$$\tilde{M}(\xi, \eta) = \tilde{M}_0(\xi, \eta) + \tilde{M}_N(\xi, \eta),$$

$$\begin{aligned} \varphi_j(\xi) &= B_{5,j}(\xi) + \delta_0^{-1} \left( B_{5,-2}(\xi) [B_{5,j}(\xi_0) B'_{5,-1}(\xi_0) - B'_{5,j}(\xi_0) B_{5,-1}(\xi_0)] - \right. \\ &\quad \left. - B_{5,-1}(\xi) [B_{5,j}(\xi_0) B'_{5,-1}(\xi_0) - B'_{5,j}(\xi_0) B_{5,-1}(\xi_0)] \right) \quad (j = \overline{0, 2}), \end{aligned}$$

$$\varphi_j(\xi) = B_{5,j} \quad (j = \overline{3, N-3}),$$



$$\varphi_j(\xi) = B_{5,j}(\xi) + \delta_0^{-1} \left( -B_{5,N+1}(\xi) [B_{5,j}(\xi_N) B'_{5,N+2}(\xi_0) - B'_{5,j}(\xi_N) B_{5,N+2}(\xi_N)] + \right. \\ \left. + B_{5,N+2}(\xi) [B_{5,j}(\xi_N) B'_{5,N+1}(\xi_N) - B'_{5,j}(\xi_N) B_{5,N+1}(\xi_0)] \right) \quad (j = \overline{N-2, N}),$$

б) Если при  $\xi = \xi_0$  и  $\xi = \xi_N$  заданы распределенные изгибающие моменты и перерезывающие силы, то граничные условия будут иметь вид

$$M_x(\xi_0, \eta, t) = \overline{m}_0(\eta) \sin \omega t, \quad \tilde{Q}_x(\xi_0, \eta, t) = \overline{p}_0(\eta) \sin \omega t, \\ M_x(\xi_N, \eta, t) = \overline{m}_N(\eta) \sin \omega t, \quad \tilde{Q}_x(\xi_N, \eta, t) = \overline{p}_N(\eta) \sin \omega t. \quad (8)$$

Функция  $W(\xi, \eta)$  по-прежнему ищется в виде (6). В этом случае из условий (8) для функций  $W_k(\eta)$  ( $k = -1, -2, N+1, N+2$ ) получаются не алгебраические, а дифференциальные уравнения, которые могут быть представлены в виде

$$\frac{d^2 W_{-r}}{d\eta^2} = m_{0,r}(\eta) + \sum_{k=0}^2 a_{r,k} W_k(\eta) + \sum_{k=0}^2 c_{r,k} \frac{d^2 W_k}{d\eta^2} + \sum_{s=1}^2 d_{r,s} W_{-s}(\eta), \\ \frac{d^2 W_{N+r}}{d\eta^2} = m_{N,r}(\eta) + \sum_{k=N-2}^N a_{r,k} W_k(\eta) + \sum_{k=N-2}^N c_{r,k} \frac{d^2 W_k}{d\eta^2} + \sum_{s=1}^2 d_{r,N+s} W_{N-s}(\eta) \quad (r = 1, 2). \quad (9)$$

В формулах (9) функции  $m_{0,r}(\eta)$ ,  $m_{N,r}(\eta)$  и постоянные  $a_{r,k}$ ,  $c_{r,k}$ ,  $d_{r,s}$  и  $d_{r,N+s}$  определяются соотношениями

$$m_{0,r}(\eta) = (-1)^r (\delta_0 D_1^* a c^2)^{-1} \left( \frac{\tilde{m}_0(\eta)}{\nu_2 a} B'_{5,-3+r}(\xi_0) - \frac{\tilde{p}_0(\eta)}{\mu_3} B_{5,-3+r}(\xi_0) \right), \\ m_{N,r}(\eta) = (-1)^r (\delta_N D_1^* a c^2)^{-1} \left( \frac{\tilde{m}_N(\eta)}{\nu_2 a} B'_{5,N+3-r}(\xi_N) - \frac{\tilde{p}_N(\eta)}{\mu_3} B_{5,N+3-r}(\xi_N) \right), \quad r = (0, 1), \\ a_{p,k} = (-1)^p (\delta_0 c^2)^{-1} (\nu_2^{-1} B'_{5,-3+p}(\xi_0) B''_{5,k}(\xi_0) - \mu_3^{-1} B_{5,-3+p}(\xi_0) B'_{5,k}(\xi_0)) \quad (k = \overline{0, 2}), \\ a_{p,k} = (-1)^p (\delta_N c^2)^{-1} (\nu_2^{-1} B'_{5,N+3-p}(\xi_N) B''_{5,k}(\xi_N) - \mu_3^{-1} B_{5,N+3-p}(\xi_N) B'_{5,k}(\xi_N)) \quad (k = \overline{N-2, N}), \\ c_{p,k} = (-1)^p \delta_0^{-1} (B'_{5,-3+p}(\xi_0) B_{5,k}(\xi_0) - B_{5,-3+p}(\xi_0) B'_{5,k}(\xi_0)) \quad (k = \overline{0, 2}), \\ c_{p,k} = (-1)^p \delta_N^{-1} (B'_{5,N+3-p}(\xi_N) B_{5,k}(\xi_N) - B_{5,N+3-p}(\xi_N) B'_{5,k}(\xi_N)) \quad (k = \overline{N-2, N}), \\ d_{p,s} = (-1)^p (\delta_0 c^2)^{-1} (\nu_2^{-1} B'_{5,-3+p}(\xi_0) B''_{5,-s}(\xi_0) - \mu_3^{-1} B_{5,-3+p}(\xi_0) B'_{5,-s}(\xi_0)) \quad (s = 1, 2), \\ d_{p,s} = (-1)^p (\delta_N c^2)^{-1} (\nu_2^{-1} B'_{5,N+3-p}(\xi_N) B''_{5,s}(\xi_N) - \mu_3^{-1} B_{5,N+3-p}(\xi_N) B'_{5,s}(\xi_N)) \\ (p = 1, 2, s = N+1, N+2).$$

### 3. СИСТЕМЫ РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ $W_j(\eta)$

Системы разрешающих уравнений для функций  $W_j(\eta)$  получаются методом коллокации. Для этого вводится система точек коллокации  $\xi = \xi_i^*$  ( $i = \overline{0, N}$ ), которые выбираются по правилу:  $\xi_i^* = \xi_i + t/N$  ( $i = \overline{0, N/2-1}$ ),  $\xi_{N/2}^* = \xi_{N/2}$ ,  $\xi_i^* = \xi_i - t/N$  ( $i = \overline{N/2+1, N}$ ),  $0 < t < 1$ .

Из требования, чтобы функция  $W(\xi, \eta)$  в виде (7), если на сторонах  $\xi = \xi_0$  и  $\xi = \xi_N$  заданы кинематические условия (5), или в виде (6) при силовых условиях (8), вдоль прямых  $\xi = \xi_i^*$  ( $i = \overline{0, N}$ ) удовлетворяла уравнению (3), получается система  $N+1$  обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно неизвестных функций  $W_j(\eta)$ .

При условиях (5) эта система имеет вид

$$\sum_{j=0}^N \left( [\varphi_j^{(IV)}(\xi_i^*) - \lambda^4 \varphi_j(\xi_i^*)] W_j(\eta) + \mu_4 c^2 \varphi_j''(\xi_i^*) \frac{d^2 W_j}{d\eta^2} + \mu_1 c^4 \varphi_j(\xi_i^*) \frac{d^4 W_j}{d\eta^4} \right) = q_i^*(\eta) \quad (i = \overline{0, N}), \quad (10)$$



где  $q_i^*(\eta) = q_0(\xi_i^*, \eta)/D_1^* - \left( \frac{\partial^4 \tilde{M}(\xi_i^*, \eta)}{\partial \xi^4} + \mu_4 c^2 \frac{\partial^4 \tilde{M}(\xi_i^*, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \mu_1 c^4 \frac{\partial^4 \tilde{M}(\xi_i^*, \eta)}{\partial \eta^4} - \lambda^4 \tilde{M}(\xi_i^*, \eta) \right)$ .

В рассматриваемом случае система (10) является системой разрешающих уравнений для функций  $W_j(\eta) (j = \overline{0, N})$ . Далее эта система разрешается относительно старших производных функций  $W_j(\eta)$  и стандартным приемом преобразуется в записанную в нормальной форме Коши систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для новой неизвестной вектор-функции  $\overline{Y}(\eta)$

$$\frac{d\overline{Y}(\eta)}{d\eta} = c\overline{Y}(\eta) + \overline{F}(\eta). \tag{11}$$

Компонентами функции  $\overline{Y}(\eta) = \{y_r(\eta)\} (r = \overline{0, 4N+3})$  являются функции  $W_j(\eta) (j = \overline{0, N})$  и их производные до третьего порядка включительно.

Граничные условия для  $\overline{Y}(\eta)$  формулируются согласно условиям закрепления или нагружения сторон  $\eta = 0$  и  $\eta = 1$ . Эти условия, выполнение которых требуется в конечных точках отрезков  $\xi = \xi_i^* (i = \overline{0, N})$ , всегда могут быть представлены в виде

$$H_1 \overline{Y}(0) = \overline{e}_1, \quad H_2 \overline{Y}(1) = \overline{e}_2, \tag{12}$$

где матрицы  $H_1 = \{h_{r,s}\}$ ,  $H_2 = \{h_{r+2N+2,s}\}$  и векторы  $\overline{e}_1 = \{e_r\}$ ,  $\overline{e}_2 = \{e_{r+2N+2}\} (r = \overline{0, 2N+1}, s = \overline{0, 4N+3})$  имеют известные компоненты.

В случае условий (8) из уравнения (3), записанного с учетом (6) вдоль прямых  $\xi = \xi_i^* (i = \overline{0, N})$ , следует система уравнений

$$\sum_{j=-2}^{N+2} \left( [B_{5,j}^{(IV)}(\xi_i^*) - \lambda^4 B_{5,j}(\xi_i^*)] W_j(\eta) + \mu_4 c^2 B_{5,j}''(\xi_i^*) \frac{d^2 W_j}{d\eta^2} + \mu_1 c^4 B_{5,j}(\xi_i^*) \frac{d^4 W_j}{d\eta^4} \right) = q_i^*(\eta) \quad (i = \overline{0, N}), \tag{13}$$

где  $q_i^*(\eta) = q_0(\xi_i^*, \eta)/D_1^*$ . Из этих уравнений с помощью (9) исключаются вторые производные функций  $W_k(\eta) (k = -2, -1, N+1, N+2)$  и четвертые производные этих функций, выражения для которых получаются двукратным дифференцированием формул (9). Полученная таким образом система уравнений разрешается относительно старших производных функций  $W_j(\eta) (j = \overline{0, N})$  и вместе с уравнениями (9) составляет полную систему для всех неизвестных функций в разложении (6). Далее эта система преобразуется в записанную в нормальной форме Коши систему уравнений первого порядка, которая в векторной форме имеет вид

$$\frac{d\overline{Z}}{d\eta} = C\overline{Z}(\eta) + \overline{F}(\eta). \tag{14}$$

Вектор-функция  $\overline{Z}(\eta)$  в этом случае имеет компоненты

$$\overline{Z}(\eta) = \{z_r(\eta)\} = \left\{ W_i, \frac{dW_i}{d\eta}, \frac{d^2 W_i}{d\eta^2}, \frac{d^3 W_i}{d\eta^3}, W_{-k}, W_{N+k}, \frac{dW_{-k}}{d\eta}, \frac{dW_{N+k}}{d\eta} \right\} \\ (r = \overline{0, 4N+7}, i = \overline{0, N}, k = 1, 2).$$

Для однозначного решения задачи к уравнению (14) необходимо добавить граничные условия, которые записываются в виде

$$H_1 \overline{Z}(0) = \overline{e}_1, \quad H_2 \overline{Z}(1) = \overline{e}_2. \tag{15}$$

Эти условия получаются из условий закрепления или нагружения сторон  $\eta = 0$  и  $\eta = 1$ , выполнение которых в отличие от предыдущего случая требуется не только в точках коллокации, но и в угловых точках пластинки.

Аналогичным образом получаются краевые задачи, когда одна сторона пластинки деформирована определенным образом, а на другой задан закон изменения нагрузки, а также в случае условий смешанного типа — прогиб и изгибающий момент или угол поворота и поперечная нагрузка.

Численное решение задач типа (11)–(12) выполняется методом дискретной ортогонализации, который обеспечивает высокую точность результатов.



#### 4. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНКИ

Изложенная в разд. 2, 3 методика была применена при численном исследовании колебаний квадратных пластинок под действием распределенной нагрузки интенсивности  $q(x, y, t) = q_0 \sin \omega t$ ,  $q_0 = \text{const}$ . Рассматривались пластинки из ортотропных материалов АГ-4с ( $\rho = 1900 \text{ кг/м}^3$ ,  $E_1 = 2.1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $E_2 = 1.6 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $G = 0.42 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $\nu_2 = 0.07$  [4]) и дельта-древесины ( $\rho = 1400 \text{ кг/м}^3$ ,  $E_1 = 3.05 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $E_2 = 0.467 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $G = 0.22 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 0.02$  [1]) и стальная пластинка ( $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 0.3$ ) с геометрическими размерами  $a = b = 1.0 \text{ м}$ ,  $h = 0.01 \text{ м}$ . Вычисления проводились для следующих вариантов закрепления контура пластинки: задача 1 — стороны  $\xi = 0$  и  $\eta = 0$  жестко закреплены, остальная часть контура свободна от закрепления и нагрузки; задача 2 — угловая точка  $\xi = \eta = 1.0$  подкреплена шарниром, при  $\xi = 0$  и  $\eta = 0$  — жесткая заделка, стороны  $\xi = 1$  и  $\eta = 1$  свободны; задача 3 — контур пластинки свободен от нагрузки и закрепления за исключением угловых точек, которые подкреплены шарнирами.

В задачах 1 и 2 безразмерная амплитуда  $W(\xi, \eta)$  аппроксимируется выражением

$$W(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{N+2} \varphi_j(\xi) W_j(\eta),$$

где функции  $\varphi_j(\xi)$  определяются по формулам  $\varphi_j(\xi) = B_{5,j}(\xi) + \delta_0^{-1} \{ B_{5,-2}(\xi) [ B_{5,j}(\xi_0) B'_{5,-1}(\xi_0) - B'_{5,j}(\xi_0) B_{5,-1}(\xi_0) ] - B_{5,-1}(\xi) [ B_{5,j}(\xi_0) B'_{5,-1}(\xi_0) - B'_{5,j}(\xi_0) B_{5,-1}(\xi_0) ] \}$  ( $j = \overline{0, 2}$ ),  $\varphi_j(\xi) = B_{5,j}(\xi)$  ( $j = \overline{3, N+2}$ ). В задаче 3 для  $W(\xi, \eta)$  используется выражение (6).

Некоторые результаты этих расчетов приведены в табл. 1–3, где указаны приближенные значения  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) первых трех резонансных частот  $\omega_{rez}^{(k)} = \omega_k - \delta$ , где  $\delta < 0.01 c^{-1}$  при  $k = 1$  и  $\delta < 1 c^{-1}$ , если  $k = 2, 3$ , номера таблиц соответствуют номерам рассмотренных задач. В этих же таблицах даны значения локальных экстремумов функции  $w_*(\xi, \eta) = W(\xi, \eta) / \max |W(\xi, \eta)|$ , которые характеризуют размеры «горбов» и «впадин» на изогнутой срединной поверхности колеблющейся пластинки.

Таблица 1

Значения локальных экстремумов функции  $w_*(\xi, \eta)$  при первых трех резонансных частотах. Задача 1

Материал	$k$	$\omega_k, c^{-1}$	Локальные экстремумы $w_*(\xi, \eta)$
	1	106.05	$w_*(1.0; 1.0) = 1.000$
Сталь	2	407	$w_*(0.55; 0.55) = 0.388$ ; $w_*(1.0; 1.0) = -1.000$
	3	731	$w_*(0.40; 1.00) = 0.958$ ; $w_*(0.45; 0.45) = -0.624$ ; $w_*(1.0; 1.0) = -1.000$
АГ-4с	1	57.61	$w_*(1.0; 1.0) = 1.000$
	2	233	$w_*(1.0; 0.45) = 0.529$ ; $w_*(1.0; 1.0) = -1.000$
	3	385	$w_*(0.40; 1.00) = 0.815$ ; $w_*(0.45; 0.45) = -0.568$ ; $w_*(1.0; 0.40) = 0.836$ ; $w_*(1.0; 1.0) = -1.000$
Дельта-древесина	1	59.25	$w_*(1.0; 1.0) = 1.000$
	2	149	$w_*(1.0; 0.45) = 0.744$ ; $w_*(1.0; 1.0) = -1.000$
	3	350	$w_*(1.0; 0.30) = -1.00$ ; $w_*(1.00; 1.00) = -0.981$ ; $w_*(1.0; 0.70) = 0.725$

Таблица 2

Значения локальных экстремумов функции  $w_*(\xi, \eta)$  при первых трех резонансных частотах. Задача 2

Материал	$k$	$\omega_k, c^{-1}$	Локальные экстремумы $w_*(\xi, \eta)$
	1	232.00	$w_*(0.72; 0.72) = 1.000$
Сталь	2	603	$w_*(0.46; 0.46) = 1.00$ ; $w_*(0.7; 1.0) = -0.937$
	3	829	$w_*(0.36; 1.00) = -1.00$ ; $w_*(0.35; 1.00) = 0.199$ ; $w_*(0.80; 1.00) = 0.419$
АГ-4с	1	104.93	$w_*(1.0; 0.60) = 1.000$
	2	320	$w_*(0.45; 0.45) = 0.945$ ; $w_*(1.0; 0.67) = -1.000$ ; $w_*(0.67; 1.00) = -0.788$
	3	568	$w_*(0.35; 0.75) = 0.498$ ; $w_*(0.65; 0.30) = -0.435$ ; $w_*(0.72; 1.00) = -1.00$
Дельта-древесина	1	104.97	$w_*(1.0; 0.58) = 1.000$
	2	324	$w_*(0.35; 0.55) = 0.465$ ; $w_*(0.50; 1.0) = 0.504$ ; $w_*(1.0; 0.72) = -1.00$
	3	492	$w_*(0.45; 0.70) = 0.636$ ; $w_*(0.50; 0.30) = -0.778$ ; $w_*(0.75; 1.00) = -0.590$ ; $w_*(1.00; 0.82) = -1.000$



Таблица 3

Значения локальных экстремумов функции  $w_*(\xi, \eta)$  при первых трех резонансных частотах. Задача 3

Материал	$k$	$\omega_k, c^{-1}$	Локальные экстремумы $w_*(\xi, \eta)$
	1	108.94	$w_*(0.50; 0.50) = 1.000$
Сталь	2	679	$w_*(0.50; 0.50) = -1.00; w_*(0.50; 0.00) = 0.788$
	3	1411	$w_*(0.15; 0.00) = 0.547; w_*(0.00; 0.50) = -1.00; w_*(0.50; 0.50) = 0.072$
АГ-4с	1	59.16	$w_*(0.50; 0.50) = 1.000$
	2	343	$w_*(0.50; 0.50) = 1.00; w_*(0.00; 0.50) = 0.882; w_*(0.50; 0.00) = 0.759$
Дельта-древесина	3	776	$w_*(0.00; 0.50) = -1.00; w_*(0.50; 0.50) = 0.174;$ $w_*(0.50; 0.00) = -0.910; w_*(0.00; 0.15) = 0.803;$ $w_*(0.15; 0.00) = 0.497$
	1	46.00	$w_*(0.50; 0.50) = 1.000$
Дельта-древесина	2	354	$w_*(0.00; 0.50) = 1.00; w_*(0.50; 0.0) = 0.228; w_*(0.50; 0.50) = -0.849$
	3	789	$w_*(0.50; 0.50) = 1.00; w_*(0.00; 0.15) = 0.794; w_*(0.00; 0.50) = -0.674;$ $w_*(0.30; 0.00) = 0.795; w_*(0.50; 0.20) = -0.964$

В табл. 1 и 2 для стали, а в табл. 3 и для ортотропных материалов значения  $w_*(\xi, \eta)$  приводятся с учетом симметрии деформированного состояния.

Формы изогнутой поверхности для пластинки из АГ-4с при  $\omega = \omega_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) изображены на рис. 1–2.

Данные таблиц и графики позволяют оценить влияние анизотропии материала и способа закрепления на форму изогнутой поверхности и значения резонансных частот и локальных экстремумов прогиба.

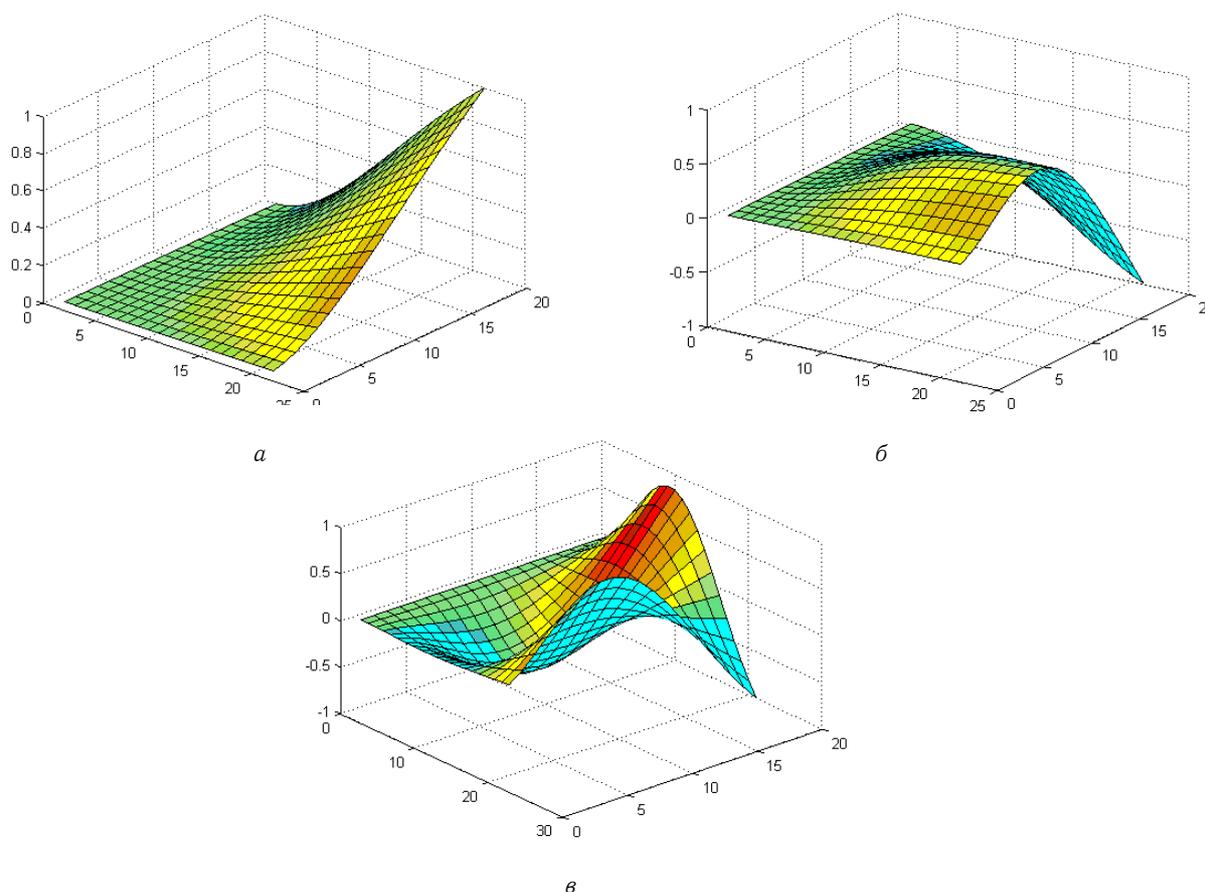


Рис. 1. Форма поверхности пластинки из АГ-4с. Задача 1: а — при первой резонансной частоте, б — при второй резонансной частоте, в — при третьей резонансной частоте

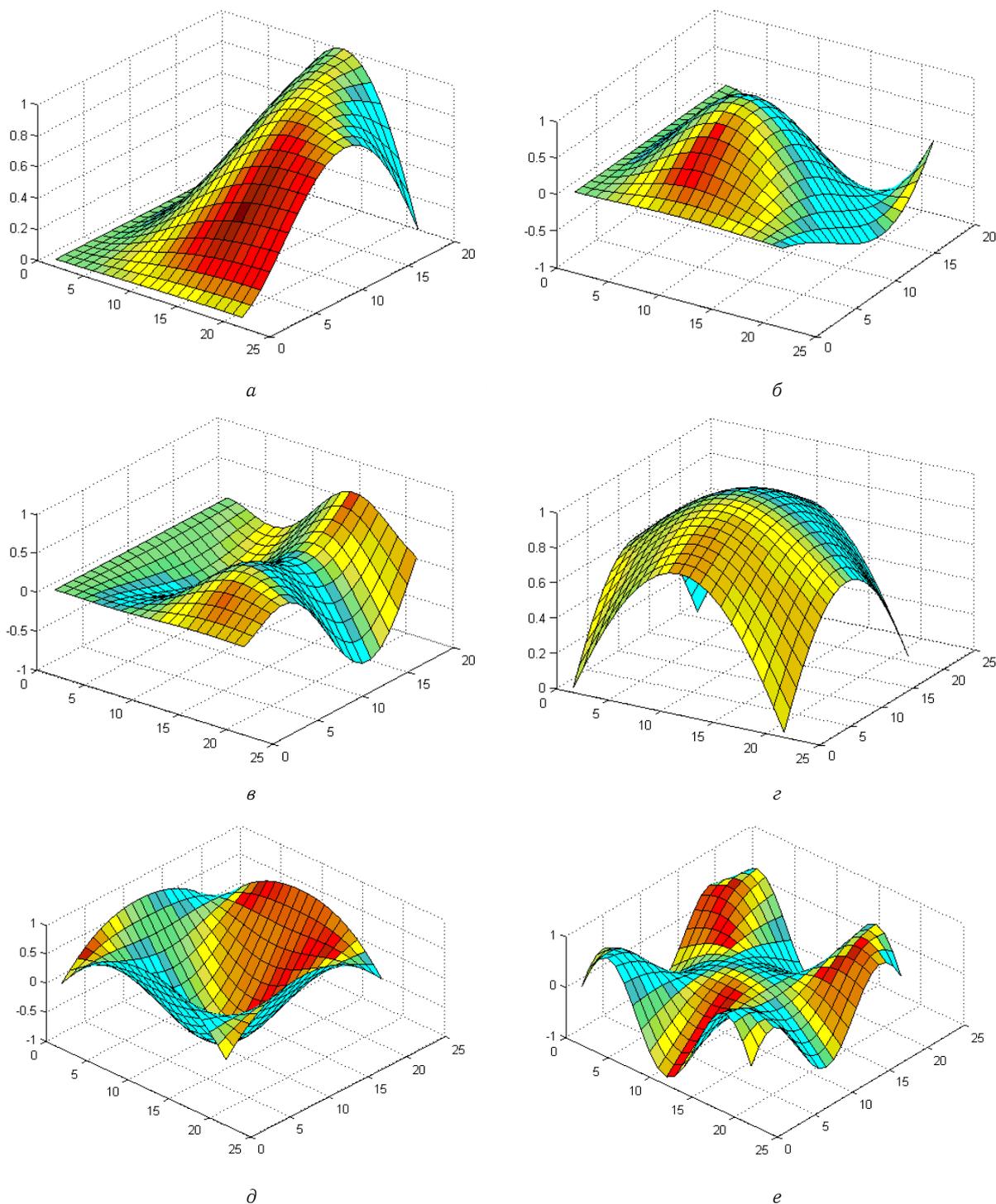


Рис. 2. Форма поверхности пластинки из АГ-4с. Задача 2: *a* — при первой резонансной частоте, *б* — при второй резонансной частоте, *в* — при третьей резонансной частоте. Задача 3: *г* — при первой резонансной частоте, *д* — при второй резонансной частоте, *e* — при третьей резонансной частоте

### Библиографический список

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: ГИТТЛ, 1957. 463 с.
2. Недорезов П.Ф., Шевцова Ю.В., Ромакина О.М. Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах изгиба прямоугольных пластинок // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. Второй Всерос. науч. конф. Самара: Самар. гос. техн. ун-та, 2005. Ч.1. С. 203–209.
3. Завьялов Ю.С., Квасов Ю.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 268 с.