



УДК 539.3

МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ И ЕГО МОДИФИКАЦИЯ В ЗАДАЧАХ СТАТИЧЕСКОГО ИЗГИБА ТОНКОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

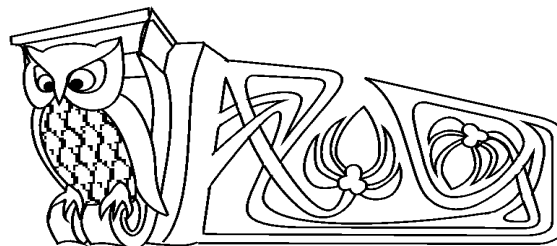
О.М. Ромакина, Ю.В. Шевцова*

Саратовский государственный университет,
кафедра компьютерной алгебры и теории чисел,
*кафедра геометрии

E-mail: romakinaom@hotmail.ru, yv-shevtsova@mail.ru

Приводится методика численного определения напряженно-деформированного состояния (НДС) изгибаемой тонкой ортотропной пластинки при нетрадиционных способах закрепления ее краев. Результаты числовых расчетов для трех различных материалов позволяют оценить влияние анизотропии материала и способа закрепления пластинки на ее НДС.

Ключевые слова: метод сплайн-коллокации, пластинка, изгиб пластинки.



Spline-Collocation Method and its Modification in the Problems of Static Bending of Thin Orthotropic Rectangular Plate

O.M. Romakina, Yu.V. Shevtsova*

Saratov State University,
Chair of Computer's Algebra and Theory of Numbers,
*Chair of Geometry

E-mail: romakinaom@hotmail.ru, yv-shevtsova@mail.ru

A numerical method for determining the stress-strain state (SSS) of a bended thin rectangular plate with non-classical boundary conditions is presented. Numerical results for three different materials can be used to estimate the influence of the material anisotropy and boundary conditions on its SSS.

Key words: spline-collocation method, plate, bending of plate.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Задача статического изгиба тонкой ортотропной пластинки в системе координат $Oxyz$, начало которой помещено в срединной плоскости, а координатные оси параллельны главным направлениям анизотропии, сводится к нахождению прогиба $w(x, y)$, удовлетворяющего уравнению [1]

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y). \quad (1)$$

Изгибающие моменты M_x , M_y , крутящий момент H_{xy} и перерезывающие силы N_x , N_y выражаются через функцию $w(x, y)$ по формулам [1]

$$\begin{aligned} M_x &= -D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -D_2 \left(\nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & H_{xy} &= -2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ N_x &= - \left(D_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), & N_y &= - \left(D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + D_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right), \\ N_x^* &= - \left(D_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_3 + 2D_k) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right), & N_y^* &= - \left((D_3 + 2D_k) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + D_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $D_i = E_i h^3 / 12 (1 - \nu_1 \nu_2)$ ($i = 1, 2$) — жесткости изгиба; $D_k = G h^3 / 12$ — жесткость кручения; $D_3 = D_1 \nu_2 + 2D_k$; E_i, ν_i ($i = 1, 2$) — модули Юнга и коэффициенты Пуассона для главных направлений анизотропии.

Граничные условия для функции $w(x, y)$ записываются в соответствии со способом закрепления контура пластинки.

В дальнейшем рассматриваются прямоугольные пластинки с размерами в плане $a \times b$, у которых края параллельны главным направлениям ортотропии.

В безразмерных переменных $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ для безразмерного прогиба $W(\xi, \eta) = w(x, y)/h$ из уравнения (1) получаем

$$D_1^* \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2D_3^* c^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + D_2^* c^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} = q(\xi, \eta), \quad (3)$$



а формулы (2) принимают вид

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D_1^* a^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \nu_2 c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right), & M_y &= -D_2^* a^2 \left(\nu_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right), & H_{xy} &= 2D_k^* a^2 c \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta}, \\
 N_x &= -a \left(D_1^* \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + D_3^* c^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} \right), & N_y &= -ac \left(D_3^* \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + D_2^* c^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} \right), \\
 N_x^* &= -a \left(D_1^* \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + (D_3^* + 2D_k^*) c^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right), & N_y^* &= -ac \left((D_3^* + 2D_k^*) \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + D_2^* c^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} \right). \quad (4)
 \end{aligned}$$

В формулах (3) и (4) обозначено $D_i^* = D_i h / a^4$ ($i = 1, 2, 3, k$), $c = a/b$.

2. РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ

Для прямоугольной ортотропной пластинки точные аналитические решения краевых задач для уравнения (3) известны только в случаях опертого контура пластинки и когда две противоположные стороны подкреплены шарнирами при произвольных условиях на остальной части контура [1]. При других, более сложных способах закрепления применяются различные приближенные методы. В частности, для пластинки, у которой стороны $\xi = 0$ и $\xi = 1$ как-то закреплены, численное решение можно получить эффективным методом сплайн-коллокации [2]. Согласно этому методу решение уравнения (3) ищется в виде

$$W(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^N \varphi_j(\xi) W_j(\eta), \quad (5)$$

где через $\varphi_j(\xi)$ ($j = \overline{0, N}$) обозначены линейные комбинации нормализованных B -сплайнов пятой степени $B_{5,r}(\xi)$ ($r = \overline{-2, N+2}$) [3], построенных на соответствующем расширении равномерной сетки, узлы которой определены по правилу $\xi_i = i/N$ ($i = \overline{0, N}$). Эти комбинации подбираются так, чтобы автоматически были выполнены условия при $\xi = 0$ и $\xi = 1$, и имеют вид:

в случае свободно опертых сторон

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(\xi) &= 12B_{5,-2}(\xi) - 3B_{5,-1}(\xi) + B_{5,0}(\xi), & \varphi_1(\xi) &= -B_{5,-1}(\xi) + B_{5,1}(\xi), \\
 \varphi_2(\xi) &= -B_{5,-2}(\xi) + B_{5,2}(\xi), & \varphi_{N-2}(\xi) &= B_{5,N-2}(\xi) - B_{5,N+2}(\xi), \\
 \varphi_{N-1}(\xi) &= -B_{5,N-1}(\xi) + B_{5,N+1}(\xi), & \varphi_N(\xi) &= B_{5,N}(\xi) - 3B_{5,N+1}(\xi) + 12B_{5,N+2}(\xi);
 \end{aligned}$$

при жесткой заделке

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(\xi) &= 41,25B_{5,-2}(\xi) - 0,125B_{5,-1}(\xi) + B_{5,0}(\xi), & \varphi_1(\xi) &= 32,5B_{5,-2}(\xi) - 2,25B_{5,-1}(\xi) + B_{5,1}(\xi), \\
 \varphi_2(\xi) &= 2,25B_{5,-2}(\xi) - 0,125B_{5,-1}(\xi) + B_{5,2}(\xi), \\
 \varphi_{N-2}(\xi) &= B_{5,N-2}(\xi) - 0,125B_{5,N+1}(\xi) + 2,25B_{5,N+2}(\xi), \\
 \varphi_{N-1}(\xi) &= B_{5,N-1}(\xi) - 2,25B_{5,N+1}(\xi) + 32,5B_{5,N+2}(\xi), \\
 \varphi_N(\xi) &= B_{5,N}(\xi) - 4,125B_{5,N+1}(\xi) + 41,25B_{5,N+2}(\xi);
 \end{aligned}$$

при любом способе закрепления $\varphi_j(\xi) = B_{5,j}(\xi)$ ($j = \overline{3, N-3}$).

Система $N+1$ обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка для неизвестных функций $W_j(\eta)$ ($j = \overline{0, N}$) получается из требования, чтобы результат подстановки выражения (5) в уравнение (3) выполнялся в точках коллокации $\xi = \xi_i^*$ ($i = \overline{0, N}$). Точки коллокации выбираются по правилу: $\xi_i^* = \xi_i + t/N$ ($i = \overline{0, N/2-1}$), $\xi_{N/2}^* = \xi_{N/2}$, $\xi_i^* = \xi_i - t/N$ ($i = \overline{N/2+1, N}$), $0 < t < 1$. Эта система стандартным приемом преобразуется в записанную в нормальной форме Коши систему уравнений первого порядка, которая в векторной форме может быть представлена в виде

$$\frac{d\bar{Y}}{d\eta} = A\bar{Y}(\eta) + \bar{F}(\eta), \quad (6)$$



где $\bar{Y} = (W_i, \frac{dW_i}{d\eta}, \frac{d^2W_i}{d\eta^2}, \frac{d^3W_i}{d\eta^3})$, $(i = \overline{0, N})$ — вектор неизвестных, а матрица $A = \{a_{r,s}\}$ и вектор $\bar{F} = \{f_r(\eta)\}$, $r, s = \overline{0, N}$ имеют известные компоненты, которые выражаются через значения функций $\varphi_j(\xi)$ и их производных и функции $q(\xi, \eta)$ в точках коллокации.

Граничные условия для вектора \bar{Y} получаются из граничных условий на сторонах $\eta = 0$ и $\eta = 1$ и всегда могут быть записаны в виде

$$H_1 \bar{Y}(0) = \bar{e}_1, \quad H_2 \bar{Y}(1) = \bar{e}_2, \quad (7)$$

с прямоугольными матрицами H_1 и H_2 размерности $(2N + 2) \times (4N + 4)$ и $(4N + 4) \times (4N + 4)$ — мерными векторами e_1 и e_2 , компоненты которых известны.

Краевая задача (6), (7) решается численно методом дискретной ортогонализации, который, как показывают решения многочисленных тестовых задач, обеспечивает получение практически точных результатов.

Указанный подход был применен при изучении напряженно-деформированного состояния (НДС) двух пластинок, у одной из которых контур жестко зашпемлен (задача 1), а у другой стороны $\xi = 0$ и $\eta = 0$ закреплены жестко, а при $\xi = 1$ и $\eta = 1$ выполняются условия шарнирного опирания (задача 2). При постоянной нагрузке интенсивности $q(x, y) = q_0 = 1 \text{ кН/м}^2$ вычисления проводились для квадратных пластинок $a = b = 1 \text{ м}$, $h = 0.01 \text{ м}$ из ортотропных материалов АГ-4с ($E_1 = 2.1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $E_2 = 1.6 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $G = 0.42 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $\nu_2 = 0.07$ [4]) и дельта-древесины ($E_1 = 3.05 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $E_2 = 0.467 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $G = 0.22 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $\nu_2 = 0.02$ [1]) и для стальной пластинки ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu = 0.03$). Графики изменения величины прогиба W вдоль диагонали $\xi = \eta$ представлены для задачи 1 на рис. 1, а, для задачи 2 — на рис. 1, б. На этих рисунках кривые 1 соответствуют материалу АГ-4с, кривые 2 — дельта-древесине, кривые 3 — стали.

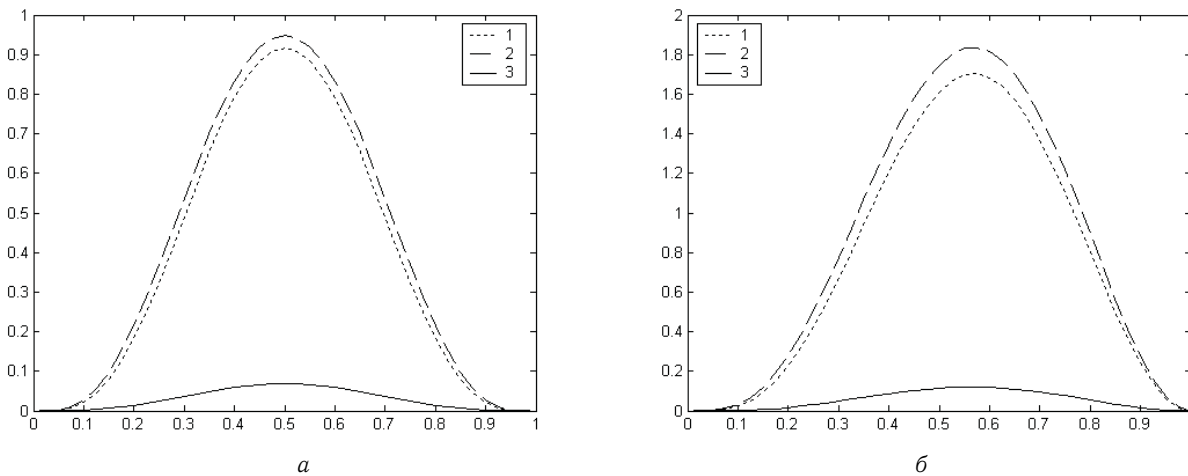


Рис. 1. Изменение величины прогиба W вдоль диагонали: а — задача 1, б — задача 2

Максимальные значения прогиба W и изгибающих моментов M_x и M_y , а также значения моментов в серединах сторон контура пластинки приведены для задачи 1 в табл. 1, а для задачи 2 — в табл. 2. В табл. 2 в скобках для каждого значения указаны координаты точки, в которой эти значения получаются; значения в первой строке соответствуют материалу АГ-4с, во второй — дельта-древесине, в третьей — стали.

Таблица 1

Максимальные значения прогиба и изгибающих моментов для ортотропной пластинки.

Задача 1. Метод КМСК

$\max W = W(0.5, 0.5)$	$\max M_x = M_x(0.0, 0.5)$	$\max M_y = M_y(0.5, 0.0)$	$M_x(0.5, 0.5)$	$M_y(0.5, 0.5)$
9.165E-1	5.927E-4	3.691E-4	2.541E-4	1.446E-4
9.482E-1	8.207E-4	3.423E-5	4.089E-4	9.915E-6
6.905E-2	5.131E-4	5.131E-4	2.289E-4	2.289E-4



Таблица 2

Максимальные значения прогиба и изгибающих моментов для ортотропной пластинки.

Задача 2. Метод КМСК

max W	max M_x	max M_y	$M_x(0.5, 0.5)$	$M_y(0.5, 0.5)$
1.703E+0 (0.575;0.575)	8.307E-4 (0.0;0.575)	5.197E-4 (0.575;0.0)	3.484E-4	2.015E-4
1.838E+0 (0.575;0.550)	1.176E-3 (0.0;0.55)	3.220E-4 (0.575;0.0)	4.930E-5	1.552E-5
1.201E-1 (0.575;0.575)	6.940E-4 (0.0;0.575)	6.940E-4 (0.575;0.0)	3.042E-4	3.042E-4

3. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ

Если у пластинки закреплены одна или две смежных стороны, то метод сплайн-коллокации в классическом виде [2] неприменим, так как не удается подобрать такие комбинации B -сплайнов, чтобы тождественно удовлетворялись граничные условия на двух противоположных сторонах. В этом случае численное решение можно получить модифицированным методом сплайн-коллокации [4]. Детальное изложение этого метода применительно к ортотропным пластинкам приведено в [5].

Для определенности будем считать, что закреплена сторона $\xi = 0$. Тогда согласно [4, 5] решение краевой задачи для уравнения (3) ищется в виде

$$W(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{N+2} \varphi_j(\xi) W_j(\eta). \quad (8)$$

Здесь функции $\varphi_j(\xi)$ ($j = \overline{0, N+2}$), как и в классическом варианте метода сплайн-коллокации, должны обеспечить выполнение граничных условий при $\xi = 0$, а функции $W_{N+1}(\eta)$ и $W_{N+2}(\eta)$ определяются из алгебраических при задании на стороне $\xi = 1$ прогиба и угла поворота или дифференциальных уравнений, если при $\xi = 1$ заданы изгибающий момент и перерезывающая сила.

В обоих указанных случаях по-прежнему требуется выполнение в точках коллокации уравнения (3) и граничных условий на сторонах $\eta = 0$ и $\eta = 1$, а полученная таким образом система обыкновенных уравнений и граничные условия преобразуются к виду (6), (7).

Отметим, что при задании на стороне $\xi = 1$ нагрузки к уравнениям четвертого порядка, полученным после подстановки (8) в (3), добавляются два уравнения второго порядка, которые получаются из граничных условий при $\xi = 1$. Выполнение граничных условий на сторонах $\eta = 0$ и $\eta = 1$ в этом случае требуется не только в точках коллокации, но и в концевых точках стороны $\xi = 1$. Тогда вектор неизвестных имеет компоненты

$$\bar{Y}(\eta) = \left(W_i, \frac{dW_i}{d\eta}, \frac{d^2 W_i}{d\eta^2}, \frac{d^3 W_i}{d\eta^3}, W_{N+1}, W_{N+2}, \frac{dW_{N+1}}{d\eta}, \frac{dW_{N+2}}{d\eta} \right) \quad (i = \overline{0, N}),$$

соответственно увеличивается размерность матриц A , H_1 , H_2 и векторов \bar{F} , \bar{e}_1 , \bar{e}_2 .

Совершенно аналогично решается задача, если сторона $\xi = 0$ не закреплена, а например, свободна или нагружена усилиями заданной интенсивности. В этом случае безразмерный прогиб $W(\xi, \eta)$ ищется в виде

$$W(\xi, \eta) = \sum_{j=-2}^{N+2} B_{5,j}(\xi) W_j(\eta),$$

а функции $W_{-1}(\eta)$ и $W_{-2}(\eta)$ определяются из дифференциальных уравнений второго порядка, которые получаются из граничных условий при $\xi = 0$. Модифицированный метод сплайн-коллокации был применен для вычисления прогибов и изгибающих моментов в пластинках из стеклопластика АГ-4с и дельта-древесины и стали от действия распределенных усилий $q(x, y) = q_0 = \text{const}$. Предполагалось, что угловые точки подкреплены шарнирами, а остальная часть граничного контура пластинок свободна от нагрузки и закрепления. Графики изменения прогиба вдоль диагонали $\xi = \eta$ для этого случая показаны на рис. 2, нумерация кривых принята такой же, как и на рис. 1, в силу симметрии графики построены для значений $\xi \leq 0.5$. Значения прогиба W в долях q_0/D^* в характерных точках приведены в табл. 3, а изгибающих моментов M_x и M_y — в табл. 4.

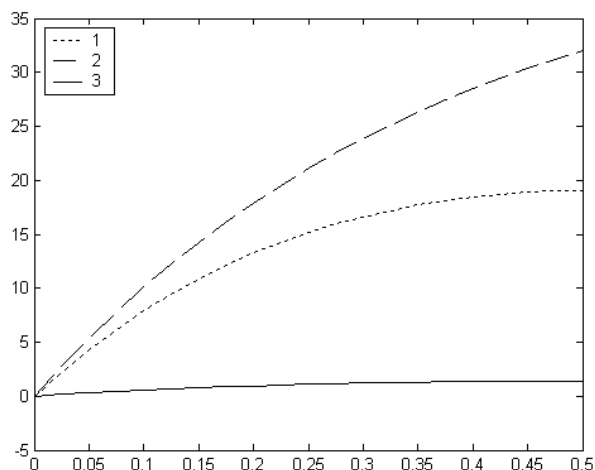


Рис. 2. Задача 3. Изменение величины прогиба W вдоль диагонали

Таблица 3

Значения прогиба ортотропной пластинки в характерных точках.

Метод ММСК

$\max W$	$W(0.5, 0.5)$	$W(0.0, 0.5)$	$W(0.0, 0.5)$
1.901E+1(0.5;0.5)	1.901E+1	1.479E+1	1.247E+1
4.119E+1(0.0;0.5)	4.043E+1	4.119E+1	1.283E+1
1.393E+0(0.5;0.5)	1.393E+0	9.697E-1	9.697E-1

Таблица 4

Значения изгибающих моментов ортотропной пластинки в характерных точках.

Метод ММСК

$\max M_x = M_x(0.5; 0.0)$	$\max M_y = M_y(0.0; 0.5)$	$M_x(0.5, 0.5)$	$M_y(0.5, 0.5)$
1.947E-3	1.759E-3	8.573E-4	9.610E-4
2.909E-3	1.430E-3	4.753E-4	1.149E-3
1.504E-3	1.504E-3	1.117E-3	1.117E-3

Приведенные графики и таблицы позволяют оценить влияние анизотропии материала и способа закрепления пластинки на ее НДС.

Библиографический список

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: ГИТТЛ, 1957. 463 с.
2. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) // Прикл. механика. 1995. Т. 31, № 6. С. 3–26.
3. Завьялов Ю.С., Квасов Ю.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
4. Недорезов П.Ф., Шевцова Ю.В., Ромакина О.М. Модифицированный метод сплайн-коллокации в зада-
- чах изгиба прямоугольных пластинок // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. Второй Всероссий. науч. конф. Самара: Изд-во Самар. гос. техн. ун-та, 2005. Ч.1. С. 203–209.
5. Шевцова Ю.В. Применение модифицированного метода сплайн-коллокации в задачах изгиба ортотропных прямоугольных пластинок // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. гос. техн. ун-та, 2005. С. 146–149.