Из (74) следует, что в пространстве l_2 последовательность $\tilde{\alpha}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ слабо сходится к α, а $\tilde{\beta}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ слабо сходится к β. Отсюда и из теоремы 9 [6, с. 219] следует утверждение теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270) *и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ* (*проект* НШ-4383.2010.1)

Библиографический список

1. *Аллахвердиев, Дж.Э.* Об одной задаче оптимального управления в гильбертовом пространстве / Дж.Э. Аллахвердиев, Н.К. Аллахвердиева // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. XIII, № 12. – С. 2124–2134.
2. *Аллахвердиева, Н.К.* Необходимое и достаточное условие оптимальности для некоторой задачи управления системой, описываемой дифференциально-операторным уравнением / Н.К. Аллахвердиева // Вопросы математической кибернетики и прикладной математики. – Баку: ЭЛМ, 1980. – Вып. 4. – С. 44–54.
3. *Гохберг, И.Ц.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
4. *Крейн, С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
5. *Васильев, Ф.П.* Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 399 с.
6. *Люстерник, Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 519 с.

УДК 514.133+514.17

КОНЕЧНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ 3(4)-КОНТУРЫ РАСШИРЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Л.Н. Ромакина

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: romakinaln@mail.ru

Введены в рассмотрение конечные замкнутые n-контуры расширенной гиперболической плоскости H^2. Подробно исследованы топологические и метрические свойства конечных замкнутых 3(4)-контуров. Получены аналоги предложения Паша. Доказано: существование двух типов 4-контуров; выпуклость простого 4-контура.

Ключевые слова: конечный замкнутый n-контур, простой 4-контур, внутренность конечного замкнутого контура, выпуклый замкнутый конечный контур.

Finite Closed 3(4)-Loops of Extended Hyperbolic Plane

L.N. Romakina

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: romakinaln@mail.ru

This article considers finite closed n-loops of the extended hyperbolic plane H^2. The paper deals with topological and metric properties of the finite closed 3(4)-loops. Pasha statement analogues have been also obtained. We proved the existence of two types 4-loops and convexity of the plain 4-loop.

Key words: finite closed n-loop, plain 4-loop, interior of a finite closed isotropic loop, convex finite closed loop.

ВВЕДЕНИЕ

1. *Расширенной гиперболической плоскостью* H^2 называют проективную плоскость с фиксированной на ней овальной линией γ [1], линию γ в этом случае называют *абсолютом плоскости* H^2. Все точки линии γ называют бесконечно удаленными, или несобственными. Внутренняя область относительно овальной линии γ является полной плоскостью Лобачевского, а на множестве всех внешних относительно абсолюта точек, образующих так называемую идеальную область плоскости Лобачевского, можно построить различные геометрии. Каждую прямую плоскости H^2 по наличию общих с абсолютом точек можно отнести к одному из трех типов. Прямые, пересекающие абсолют в двух действительных точках, называют *гиперболическими*, в двух мнимо сопряженных точках — *эллиптическими*, а касательные к абсолюту называют *параболическими*, или *изотропными прямыми*. В работе [2] на прямых указанных типов с помощью точек абсолюта введены понятия: направление, луч, отрезок, квазиотрезок, середина отрезка и квазиотрезка, квазисередина отрезка. Ослабляя строгость определений, приведем те из них, которые будут использованы в данной работе.

Проективная прямая является замкнутой, поэтому для точек на ней имеют место те же отношения порядка, что и для точек, например, окружности евклидовой плоскости. Единственным инвариантом для точек проективной прямой является сложное, или ангармоническое, отношение четырех точек.

Начнем с параболических прямых. Так как именно параболическими являются все прямые евклидовой плоскости, то нам нужно лишь описать известные отношения средствами проективной геометрии. Сопровождая следующие рассуждения рис. 1, прямые будем изображать замкнутыми линиями l.

Пусть на параболической прямой l (рис. 1, *а*) точка K принадлежит абсолюту. Удаление точки K меняет топологию прямой l, но сохраняет связность. Так что теперь любая точка A прямой l разделяет прямую на две части. Получаем два направления на прямой l, два *луча* с началом в точке A. Любые две точки A и B прямой l разделяют ее на три пересекающиеся не более чем в одной точке части, две из которых — лучи AK и BK. Третью часть называют *отрезком* AB. Или более строго: *отрезком* AB *параболической прямой* l называют множество, состоящее из точек A, B и всех точек X прямой l, разделяющих с абсолютной точкой прямой l пару точек A, B.

Разделенность (неразделенность) пар A, B и X, K точек прямой l соответствует неравенству $(ABXK) < 0$ ($(ABXK) > 0$), где $(ABXK)$ — сложное отношение четырех данных точек. Положение точки X отрезка AB параболической прямой l (рис. 1, *а*) можно характеризовать неравенством $(ABXK) < 0$, а точки Y луча BK — неравенством $(AYBK) < 0$.

Эллиптическая прямая не имеет общих действительных точек с абсолютом, поэтому как и проективная прямая является замкнутой. Любые две точки A и B эллиптической прямой l (рис. 1, *б*) разбивают множество всех точек этой прямой, за исключением точек A и B, на два непустых непересекающихся множества, каждое из которых называют *отрезком эллиптической прямой с концами в точках* A *и* B. На рис. 1, *б* изображены два отрезка эллиптической прямой AXB, AYB. Если K_1, K_2 — абсолютные мнимо сопряженные точки эллиптической прямой l, то для каждой пары точек A, B на прямой l найдется единственная пара действительных точек S_1, S_2, гармонически разделяющая и пару A, B, и пару K_1, K_2: $(S_1S_2AB) = -1$, $(S_1S_2K_1K_2) = -1$. Точки S_1, S_2 принадлежат различным отрезкам, определенным точками A и B. Если точка S_1 (S_2) принадлежит отрезку AXB (AYB), в этом случае $(S_1XAB) > 0$ ($(S_2YAB) > 0$), ее называют *серединой* этого отрезка.

Гиперболическая прямая имеет две действительные абсолютные точки. Поэтому как гипербола евклидовой плоскости она состоит из двух связных частей, называемых *ветвями*.

Пусть на гиперболической прямой l (рис. 1, *в*) с бесконечно удаленными точками K_1, K_2 точки A и B принадлежат одной ветви: $(ABK_1K_2) > 0$. Тогда эти точки разделяют ветвь на три пересекающиеся не более чем в одной точке части: луч AK_1, луч BK_2 и отрезок AB. *Отрезком* AB *гиперболической прямой* l называют множество, состоящее из точек A, B одной ветви и всех точек X прямой l, разделяющих с каждой абсолютной точкой прямой l пару точек A, B. Условие принадлежности точки X отрезку AB можно записать неравенством $(ABXK_1) < 0$.

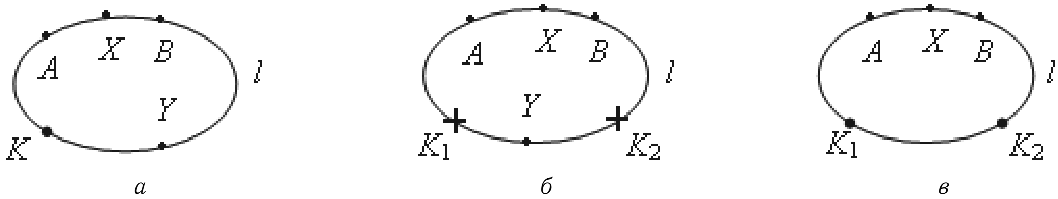

Рис. 1

Если AB — отрезок гиперболической прямой l, то на l существует единственная пара действительных точек S_1, S_2, гармонически разделяющая пары точек A, B и K_1, K_2: $(S_1S_2AB) = -1$, $(S_1S_2K_1K_2) = -1$. Одна из точек S_1, S_2 принадлежит отрезку AB, ее называют *серединой отрезка* AB. Другая точка принадлежит ветви прямой l, не содержащей точек A и B, ее называют *квазисерединой отрезка* AB.

Если точки A и B принадлежат различным ветвям гиперболической прямой l с несобственными точками K_1, K_2, то они делят прямую l на две части. Одна из частей содержит точку K_1, другая — точку K_2. Каждую часть называют *квазиотрезком* гиперболической прямой с концами в точках A и B.

2. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — такая упорядоченная последовательность действительных точек расширенной гиперболической плоскости H^2, что каждая прямая $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ является изотропной. Совокупность всех отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ соответствующих изотропных прямых назовем *замкнутым конечным n-контуром* или кратко: *n-контуром*. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ назовем ***вершинами***, прямые $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ — ***сторонами***, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ — ***ребрами*** n-контура. Ребра, имеющие общую вершину, и вершины, принадлежащие одному ребру, назовем *смежными* ребрами, вершинами соответственно.

Точку плоскости H^2 назовем *особой* точкой n-контура, если она является общей точкой несмежных ребер данного n-контура.

Замкнутый конечный контур назовем *простым*, если он не имеет особых точек. В противном случае контур будем называть *составным*.

Точку плоскости H^2 назовем *внутренней* относительно n-контура, если она не принадлежит данному n-контуру, и каждая прямая, проходящая через эту точку, имеет с n-контуром, по крайней мере, две общие точки.

Непустое множество всех внутренних относительно n-контура точек плоскости H^2 назовем *внутренностью* данного контура. Обозначение: $\operatorname{int} F$ — внутренность контура F.

По определению конечный замкнутый n-контур не содержит бесконечно удаленных точек, а каждая его сторона касается абсолютной овальной квадрики плоскости H^2, следовательно, каждая его точка является внешней по отношению к абсолюту. Не каждая прямая плоскости H^2, в отличие от любой прямой евклидовой плоскости или плоскости Лобачевского, разделяет плоскость на части, поэтому используемое в указанных геометриях определение выпуклого многоугольника как многоугольника, все точки которого принадлежат одной полуплоскости относительно каждой из сторон, для многоугольников плоскости H^2, в частности для изотропных контуров, неприменимо. Кроме того, любые две точки плоскости H^2 могут определять: отрезок параболической прямой; два отрезка эллиптической прямой; отрезок или квазиотрезок гиперболической прямой плоскости H^2. С учетом этого, корректируя известное определение евклидовой геометрии, можно ввести следующее определение выпуклого замкнутого конечного контура плоскости H^2.

Пусть замкнутый конечный контур F плоскости H^2 обладает внутренностью. Будем говорить, что отрезок (квазиотрезок) *принадлежит внутренности* контура F, если каждая точка отрезка (квазиотрезка) является внутренней относительно данного контура.

Замкнутый конечный контур F плоскости H^2 назовем *выпуклым*, если для любых двух его внутренних точек существует отрезок или квазиотрезок с концами в этих точках, принадлежащий внутренности данного контура.

В данной работе установлено, что из всех замкнутых конечных 3(4)-контуров выпуклым является только каждый простой 4-контур, конечный замкнутый 3-контур не обладает внутренностью. Получены аналоги предложения Паша: для 3-контуров — утверждения 2), 3) теоремы 1, для 4-контуров — утверждения 4)–6) теоремы 2.

1. КОНЕЧНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ 3-КОНТУРЫ ПЛОСКОСТИ H^2

Теорема 1. *Пусть ABC — конечный замкнутый 3-контур плоскости H^2. Выполняются следующие утверждения:*

1) не существует точек, внутренних относительно контура ABC;

2) любая прямая плоскости H^2 имеет с контуром ABC, по крайней мере, одну общую точку;

3) если некоторая прямая не содержит вершин контура ABC и пересекает два его ребра, то она пересекает и третье ребро контура.

Доказательство. На проективной плоскости любую овальную линию можно задать уравнением

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0. \tag{1}$$

Проективный репер плоскости H^2, уравнение абсолютной линии γ в котором имеет вид (1), назовем *каноническим*.

В каждом каноническом репере плоскости H^2 первые две вершины и единичная точка принадлежат линии γ, а третья вершина является полюсом прямой, соединяющей две первые вершины.

Каждое ребро данного контура ABC — отрезок изотропной прямой. Не теряя общности рассуждений, вершину A_3 канонического репера $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ плоскости H^2 совместим с точкой A, а вершины A_1, A_2 — с несобственными точками сторон AB и AC соответственно (рис. 2). Единичную точку E репера R поместим в точку касания прямой BC с линией γ. В присоединенном репере R вершины данного контура имеют координаты $A(0:0:1)$, $B(2:0:1)$, $C(0:2:1)$, а его стороны заданы уравнениями $AB: x_2 = 0$; $AC: x_1 = 0$; $BC: x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$.

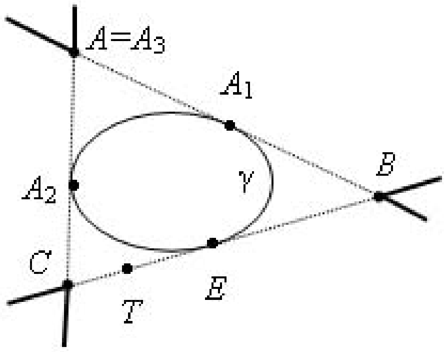

Рис. 2

Пусть $M(m_1 : m_2 : m_3)$ — произвольная точка плоскости H^2. Покажем, что существует прямая, проходящая через точку M и пересекающая данный контур в единственной точке. Выберем некоторую точку на прямой BC, не принадлежащую отрезку BC, например, точку $T(1:3:2)$. Точка T принадлежит лучу CE, не содержащему точку B, так как $(BTCE) = -2 < 0$.

Прямая MT в репере R задана уравнением:

$$x_1(3m_3 - 2m_2) + x_2(2m_1 - m_3) + x_3(m_2 - 3m_1) = 0$$

и пересекает прямые AB и AC соответственно в точках

$$B_0(3m_1 - m_2 : 0 : 3m_3 - 2m_2), \qquad C_0(0 : 3m_1 - m_2 : 2m_1 - m_3).$$

Для четверок точек A, B, B_0, A_1 и A, C, C_0, A_2 имеем

$$(ABB_0A_1) = \frac{3m_1 - m_2}{3(m_1 + m_2 - 2m_3)}, \qquad (ACC_0A_2) = \frac{-(3m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 - 2m_3}.$$

Следовательно, числа (ABB_0A_1) и (ACC_0A_2) разных знаков, т. е. одна и только одна из точек B_0, C_0 принадлежит ребру данного 3-контура. Таким образом, для каждой точки плоскости H^2 найдется содержащая ее прямая, пересекающая любой замкнутый конечный 3-контур в единственной точке, т. е. никакая точка плоскости H^2 не является внутренней относительно 3-контура. Первое утверждение доказано.

Для доказательства второго и третьего утверждений произвольной прямой a присвоим в репере R координаты $(a_1 : a_2 : a_3)$. Тогда точки пересечения прямой a сторонами данного контура имеют координаты

$$AB \cap a = T_1(-a_3 : 0 : a_1), \qquad AC \cap a = T_2(0 : -a_3 : a_2), \qquad BC \cap a = T_3(a_3 + 2a_2 : -a_3 - 2a_1 : a_2 - a_1).$$

Знаки чисел $I_1 = (ABT_1A_1)$, $I_2 = (ACT_2A_2)$, $I_3 = (BCT_3E)$ определяют принадлежность точек T_1, T_2, T_3 соответствующим ребрам данного контура. Если прямая a не содержит вершин контура ABC (иначе второе утверждение теоремы очевидно), то числа I_1, I_2, I_3 определены и $I_1 I_2 I_3 \neq 0$. Так как в репере R

$$I_1 = (ABT_1A_1) = \frac{a_3}{2a_1 + a_3}, \qquad I_2 = (ACT_2A_2) = \frac{a_3}{2a_2 + a_3}, \qquad I_3 = (BCT_3E) = -\frac{2a_1 + a_3}{2a_2 + a_3},$$

то возможны только следующие наборы знаков чисел I_1, I_2, I_3:

I_1	+	+	−	−
I_2	+	−	+	−
I_3	−	+	+	−

Каждый возможный набор знаков содержит «минус», значит, хотя бы одна из точек T_1, T_2, T_3 принадлежит ребру контура. И ни один набор не имеет точно два «минуса», т. е. принадлежность контуру двух и только двух точек из T_1, T_2, T_3 невозможна. Таким образом, прямая a имеет с контуром ABC, по крайней мере, одну общую точку и если она пересекает какие-либо два ребра контура ABC, то она пересекает и третье его ребро. Теорема 1 доказана.

Отметим, что 3-контур не имеет инварианта фундаментальной группы G преобразований плоскости H^2, поэтому все 3-контуры G-эквивалентны.

2. КОНЕЧНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ 4-КОНТУРЫ ПЛОСКОСТИ H^2

Вершины (ребра) замкнутого конечного 4-контура назовем *противоположными*, если они не являются смежными.

Прямые, соединяющие противоположные вершины замкнутого конечного 4-контура, назовем *диагональными прямыми* данного контура.

Теорема 2. *Пусть $\wp$ — множество всех замкнутых конечных 4-контуров расширенной гиперболической плоскости. Справедливы утверждения:*

1) любой контур в $\wp$ или простой, или составной с двумя особыми точками;

2) диагональные прямые каждого контура из $\wp$ неизотропные и взаимно ортогональные, они различных типов (гиперболического типа) тогда и только тогда, когда контур простой (составной); диагонали простого (составного) контура из $\wp$ пересекаются в их середине (квазисередине);

3) прямая, содержащая точки пересечения противоположных сторон контура из $\wp$, является гиперболической (эллиптической) тогда и только тогда, когда контур является простым (составным);

4) каждая прямая пересекает, по крайней мере, два ребра любого составного контура из $\wp$; если прямая имеет с составным контуром из $\wp$ единственную общую точку, то эта точка для контура является особой;

5) каждая прямая, не содержащая вершину простого контура из $\wp$, либо не имеет с этим контуром общих точек, либо пересекает точно два ребра контура;

6) если изотропная прямая пересекает ребро простого контура из $\wp$, то она пересекает и противоположное ему ребро;

7) любой простой контур из $\wp$ является выпуклым;

8) каждая точка на ребре простого контура F из $\wp$ однозначно определяет два простых контура F_1, F_2 из $\wp$ так, что $\operatorname{int} F_1 \cap \operatorname{int} F_2 = \emptyset$ и $\operatorname{int} F = \operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2$;

9) любой составной контур F из $\wp$ имеет внутренность, не является выпуклым и его можно представить в виде объединения двух простых контуров F_1, F_2 из $\wp$ так, что $\operatorname{int} F_1 \cap \operatorname{int} F_2 = \emptyset$ и $\operatorname{int} F = \operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2$.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — некоторый контур из $\wp$. Присоединим к нему канонический репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, используемый при доказательстве теоремы 1, следующим образом.

Совместим вершину A_3 с точкой A, а вершины A_1 и A_2 — с несобственными точками прямых AB и AD соответственно. Тогда конечным точкам B и D можно присвоить координаты $B(b:0:1)$, $D(0:d:1)$, где $bd \neq 0$, так как точки B и D не совпадают с точкой A. Некоординатные изотропные прямые, проходящие соответственно через точки B и D, имеют в репере R уравнения

$$BC: 4x_1 + b^2x_2 - 4bx_3 = 0, \qquad CD: d^2x_1 + 4x_2 - 4dx_3 = 0.$$

Следовательно, вершина C задана в репере R координатами $(4b : 4d : 4 + bd)$.

Несобственные точки прямых AB, BC, CD, DA имеют в репере R соответственно координаты

$$K_2 = A_1(1:0:0), \qquad K_3(b^2:4:2b), \qquad K_4(4:d^2:2d), \qquad K_1 = A_2(0:1:0), \tag{2}$$

а точки пересечения противоположных сторон данного контура — координаты

$$AB \cap CD = P(4:0:d), \qquad BC \cap AD = N(0:4:b). \tag{3}$$

Определим принадлежность точек P и N ребрам данного контура. Используя координаты (2), (3), получаем

$$(ABK_2P) = (CDK_4P) = (CBK_3N) = (ADK_1N) = \frac{4 - bd}{4}.$$

По условию $bd \neq 0$. Если $bd = 4$, то прямая BD является изотропной, и точка C принадлежит абсолютной квадрике. Но контур $ABCD$ — конечный, следовательно, $bd \neq 4$. Поэтому возможны только два случая.

1. Имеет место неравенство

$$bd < 4. \tag{4}$$

Тогда все числа (ABK_2P), (CDK_4P), (CBK_3N), (ADK_1N) больше нуля, и, следовательно, ни одна из точек P и N не принадлежит контуру $ABCD$. Контур $ABCD$ является простым (рис. 3).

2. Выполняется неравенство

$$bd > 4. \tag{5}$$

Тогда все числа (ABK_2P), (CDK_4P), (CBK_3N), (ADK_1N) меньше нуля. Следовательно, каждая из точек P, N принадлежит одновременно двум противоположным ребрам данного контура, т. е. контур является составным с особыми точками P, N (рис. 4).

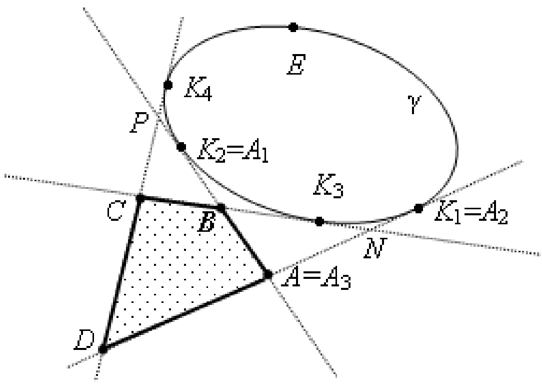

Рис. 3

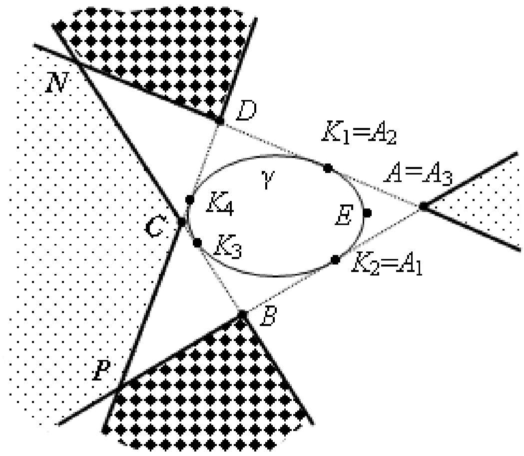

Рис. 4

Таким образом, каждый контур из $\wp$ является либо простым, либо составным с двумя особыми точками. Первое утверждение доказано.

Уравнения диагональных прямых каждого контура $ABCD$ из $\wp$ имеют вид

$$AC:\ dx_1 - bx_2 = 0, \qquad BD:\ dx_1 + bx_2 - bdx_3 = 0. \tag{6}$$

Пусть ζ_{AC} и ζ_{BD} — значения квадратичной тангенциальной формы $\psi = 4X_1X_2 - X_3^2$, соответствующей заданию (1) абсолюта плоскости H^2, от координат (6) прямых AC и BD. Тогда $\zeta_{AC} = -4bd$, $\zeta_{AC} = 4bd - b^2d^2$. Числа ζ_{AC}, ζ_{BD} отличны от нуля, так как $bd \neq 0$, $bd \neq 4$. Знак числа ζ_{AC} (ζ_{BD}) определяет тип прямой AC (BD). Числа ζ_{AC} и ζ_{BD} одного знака, отрицательные, только при $bd > 4$, следовательно, прямые AC и BD принадлежат одному типу, гиперболическому, тогда и только тогда, когда контур $ABCD$ является составным. В противном случае, при условии (4), соответствующем простому контуру из $\wp$, одна из диагональных прямых контура является гиперболической, другая — эллиптической.

Квадратичной тангенциальной форме $\psi = 4X_1X_2 - X_3^2$ соответствует билинейная тангенциальная форма $\Psi = 2X_1Y_2 + 2X_2Y_1 - X_3Y_3$. Координаты прямых AC и BD (6) сопряжены относительно формы Ψ, следовательно, диагональные прямые AC и BD ортогональны.

Точка O пересечения диагоналей контура $ABCD$ в репере R имеет координаты $O(b : d : 2)$, а несобственные точки $L_{1,2}$ ($Z_{1,2}$) прямой AC (BD) — координаты

$$L_{1,2}(b : d : \pm\sqrt{bd}), \qquad Z_{1,2}(b^2d - 2b \pm b\sqrt{bd(bd-4)} : 2d : bd \pm \sqrt{bd(bd-4)}).$$

Если $bd > 4$, точки $L_{1,2}$, $Z_{1,2}$ — действительные, если $bd < 4$, точки одной из пар $L_{1,2}$, $Z_{1,2}$ являются действительными, другой — мнимо сопряженными.

Непосредственная проверка дает: $(OAL_1L_2) = (COL_1L_2)$, $(OBZ_1Z_2) = (DOZ_1Z_2)$. По лемме 1 [2, с. 94] на прямой AC (BD) найдется единственная точка $\tilde{O}$ такая, что пара точек O, $\tilde{O}$

гармонически разделит пару точек A, C (B, D). Согласно определению при $bd > 4$ ($bd < 4$) точка O является квазисерединой (серединой) диагоналей данного составного (простого) контура $ABCD$.

Второе утверждение теоремы доказано.

Прямая PN, заданная в репере R уравнением $dx_1 + bx_2 + 4x_3 = 0$, является гиперболической (эллиптической) только при $bd < 4$ ($bd > 4$), т. е. тогда и только тогда, когда контур $ABCD$ простой (составной). Доказано утверждение 3).

Зададим произвольную прямую a в репере R координатами $(a_1 : a_2 : a_3)$. Полагая, что прямая a не проходит через точку A, примем $a_3 = 1$. Точки пересечения сторон контура $ABCD$ прямой a имеют в репере R координаты

$$AB \cap a = T_1(-1 : 0 : a_1), \qquad BC \cap a = T_2(b^2 + 4a_2 b : -4 - 4a_1 b : 4a_2 - a_1 b^2),$$

$$CD \cap a = T_3(4 + 4a_2 d : -d^2 - 4a_1 d : a_2 d^2 - 4a_1), \qquad AD \cap a = T(0 : -1 : a_2).$$

Найдем выражение чисел $I_1 = (ABK_2T_1)$, $I_2 = (BCK_3T_2)$, $I_3 = (CDK_4T_3)$, $I_4 = (ADK_1T_4)$ через параметры b, d, фиксированные числа для каждого данного контура $ABCD$, и координаты a_1, a_2 прямой a:

$$I_1 = ba_1 + 1, \qquad I_2 = \frac{4(ba_1 + 1) + 4(da_2 + 1) + bd - 4}{(4 - bd)(ba_1 + 1)}, \tag{7}$$

$$I_4 = da_2 + 1, \qquad I_3 = \frac{4(ba_1 + 1) + 4(da_2 + 1) + bd - 4}{(4 - bd)(da_2 + 1)}. \tag{8}$$

Если прямая a не содержит вершин контура $ABCD$, то числа I_1, I_2, I_3, I_4 определены и каждое из них отлично от нуля.

Рассмотрим отдельно варианты для составного и простого контуров из $\wp$.

1. Контур $ABCD$ — составной, имеет место неравенство (5).

Предположим, что прямая a не пересекает какие-либо два ребра контура $ABCD$. Эти ребра могут быть либо смежными, либо противоположными. Пусть для начала прямая a не пересекает смежные ребра AB и AD, тогда ее координаты a_1, a_2 удовлетворяют системе неравенств

$$ba_1 + 1 > 0, \qquad da_2 + 1 > 0. \tag{9}$$

При условиях (5), (9) числа I_2, I_3 меньше нуля, следовательно, прямая a пересекает ребра BC и CD. По условию прямая a не проходит через вершину C, следовательно, точки ее пересечения с ребрами BC и CD различные, т. е. a имеет с контуром две общие точки.

Пусть теперь прямая a не пересекает два противоположных ребра данного составного контура, например, ребра AB и CD. Тогда числа I_1, I_3 больше нуля. В данном случае при $bd > 4$ это возможно лишь при $I_4 < 0$. Но тогда $I_2 < 0$. Значит, прямая a пересекает ребра AD и BC. Прямая a будет иметь с контуром одну общую точку только в случае совпадения точек ее пересечения ребрами AD и BC. Это возможно, так как указанные ребра имеют общую особую точку N.

Итак, каждая прямая пересекает, по крайней мере, два ребра составного контура из $\wp$, и если прямая имеет с составным контуром из $\wp$ единственную общую точку, то эта точка для контура является особой. Доказано утверждение 4).

2. Контур $ABCD$ — простой, выполняется неравенство (4).

Тогда согласно представлениям (7), (8) для чисел I_1, I_2, I_3, I_4 возможны только следующие наборы знаков:

I_1	+	+	−	−	+	−	+
I_2	+	+	−	+	−	+	−
I_3	+	−	+	+	−	−	+
I_4	+	−	+	−	+	+	−

Таким образом, для каждого простого контура из $\wp$ существуют прямые, пересекающие его, и прямые, не имеющие с ним общих точек. Каждый из наборов, содержащий знак «минус», содержит точно два «минуса». Поэтому если прямая, не содержащая вершину простого контура из $\wp$, пересекает ребро контура, она пересекает точно два его ребра. Доказано утверждение 5).

Если прямая a является изотропной, то ее координаты $(a_1 : a_2 : 1)$ обращают квадратичную тангенциальную форму ψ, определяющую абсолют плоскости H^2, в нуль. Следовательно, числа I_1, I_2, I_3, I_4 из (7), (8) для изотропной прямой a можно записать в виде

$$I_1 = ba_1 + 1, \qquad I_2 = \frac{4(da_2+1)}{4-bd}, \tag{10}$$

$$I_4 = da_2 + 1, \qquad I_3 = \frac{4(ba_1+1)}{4-bd}. \tag{11}$$

Так как для простого контура $ABCD$ имеет место неравенство $bd < 4$, то числа в парах I_1, I_3 и I_2, I_4 из (10), (11) одного знака. Следовательно, если прямая a пересекает ребро AB (BC) контура, то она пересекает и противоположное ему ребро CD (DA). Утверждение 6) доказано.

Далее. Пусть $ABCD$ — простой контур из $\wp$ и $AB \cap CD = P$, $BC \cap AD = N$ (рис. 5). Условимся обозначать через W_X ту часть плоскости H^2, определенную изотропными прямыми, проходящими через точку X, которая не содержит точек абсолюта. Покажем, что контур $ABCD$ имеет внутренность и

$$\operatorname{int}(ABCD) = W_P \cap W_N. \tag{12}$$

Пусть точка M принадлежит множеству $W_P \cap W_N$. Прямые AB и CD разделяют изотропную прямую BC на две части: отрезок BC и объединение лучей BK_3, CK_3. Отрезок BC не содержит бесконечно удаленных точек, следовательно, полностью принадлежит множеству W_P. Отрезок AD также принадлежит множеству W_P. Поэтому для каждой точки M из W_P прямая MP пересекает и отрезок BC, и отрезок AD. Аналогично, для каждой точки M из W_N прямая MN пересекает и отрезок AB, и отрезок CD. Таким образом, для любой точки M из $W_P \cap W_N$ на отрезках AB, BC, CD, DA существуют попарно различные точки $V_1 = AB \cap MN$, $V_2 = BC \cap MP$, $V_3 = CD \cap MN$, $V_4 = DA \cap MP$. По условию контур $ABCD$ — простой, следовательно, точки P и N ему не принадлежат, т. е. $(PV_1AB) < 0$, $(PV_3CD) < 0$, $(NV_2BC) < 0$, $(NV_4AD) < 0$. Отсюда следует, что прямые MP и MN разделяют каждую из следующих пар прямых: MA и MB, MB и MC, MC и MD, MD и MA. В силу этого точки A и C (B и D) принадлежат одной части G_1 (G_2) плоскости H^2, определенной прямыми MP и MN. Точки V_1, V_3 (V_2, V_4) лежат на прямой MN (MP), поэтому ломаные V_4AV_1 и V_2CV_3 (V_1BV_2 и V_3DV_4) полностью принадлежат части G_1 (G_2).

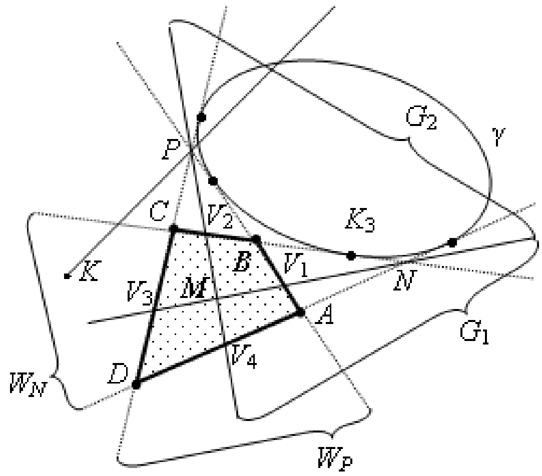

Рис. 5

Каждая прямая l, проходящая через точку M, целиком лежит либо в части G_1, либо в части G_2. В первом случае l пересекает и ломаную V_4AV_1, и ломаную V_2CV_3, во втором — каждую из ломаных V_1BV_2, V_3DV_4.

Итак, любая прямая, проходящая через точку множества $W_P \cap W_N$, пересекает данный простой контур $ABCD$ в двух точках, т. е. $W_P \cap W_N = \operatorname{int}(ABCD)$.

Покажем, что точки плоскости H^2, не принадлежащие множеству $W_P \cap W_N$, не являются внутренними относительно контура $ABCD$. Предположим, что точка K не принадлежит множеству $W_P \cap W_N$. Тогда K не принадлежит хотя бы одному из множеств W_P, W_N, например, не принадлежит множеству W_P. В этом случае прямая KP принадлежит дополнению множества W_P до H^2. Так как отрезки BC и AD целиком лежат во множестве W_P, прямая KP эти отрезки не пересекает. Но прямая KP не пересекает и отрезки AB, CD, так как P не принадлежит контуру. Итак, для каждой точки плоскости H^2, не принадлежащей множеству $W_P \cap W_N$, найдется прямая, не имеющая с данным контуром общих точек. Следовательно, если точка не принадлежит множеству $W_P \cap W_N$, то она не является внутренней относительно данного контура. Таким образом, имеет место равенство (12).

Согласно построению множества W_P, W_N не содержат точек абсолюта, следовательно, каждая внутренняя точка относительно контура $ABCD$ является внешней по отношению к абсолютной линии.

Докажем, что простой контур $ABCD$ — выпуклый.

Пусть M и T — внутренние относительно контура $ABCD$ точки. Тогда $M \in W_P \cap W_N$ и $T \in W_P \cap W_N$.

Обозначим X_1 и X_2 точки пересечения прямой MT прямыми AB и CD соответственно. Рассмотрим возможные варианты.

1. Прямая MT — изотропная. Пусть S — несобственная точка прямой MT. По построению множество W_P не содержит точек абсолюта, следовательно, $S \notin W_P$. Так как $M \in W_P$ и $T \in W_P$, каждая из точек M и T разделяет с S пару точек X_1, X_2:

$$(MSX_1X_2) < 0, \qquad (TSX_1X_2) < 0. \tag{13}$$

Пусть X — произвольная точка отрезка MT параболической прямой, тогда пара точек X, S разделяет пару точек M, T:

$$(XSMT) < 0. \tag{14}$$

При условиях (13), (14) имеет место неравенство $(XSX_1X_2) < 0$, т. е. X принадлежит отрезку X_1X_2 параболической прямой MT. Следовательно, $X \in W_P$. Аналогично можно показать, что $X \in W_N$. Таким образом, X — внутренняя относительно контура $ABCD$ точка.

2. Прямая MT — гиперболическая. Точки M и T являются внешними по отношению к абсолюту, поэтому определяют отрезок гиперболической прямой. Пусть S_0 — середина, а S — квазисередина отрезка MT. Тогда так как точки M и T принадлежат множеству W_P, то $S_0 \in W_P$, а $S \notin W_P$, следовательно,

$$(MSX_1X_2) < 0, \qquad (TSX_1X_2) < 0. \tag{15}$$

Для каждой точки X отрезка MT выполняется неравенство $(XS_0MT) > 0$, откуда следует, что $(XSMT) < 0$. С учетом неравенств (15) имеем $(XSX_1X_2) < 0$, т. е. $X \in W_P$. Рассуждая аналогично, получим $X \in W_N$. Следовательно, каждая точка отрезка MT является внутренней относительно контура $ABCD$.

3. Если прямая MT эллиптическая, то точки M и T определяют на ней два различных отрезка, обозначим их MO_1T и MO_2T. Так как обе точки M и T принадлежат множеству W_P, то пара точек M, T не разделяет пару точек X_1, X_2: $(MTX_1X_2) > 0$. Следовательно, точки X_1, X_2 принадлежат одному из отрезков, определенных точками M и T, например, отрезку MO_1T. Тогда $MO_2T \subset W_P$. Аналогично заключаем, что $MO_2T \subset W_N$. Следовательно, $MO_2T \subset \operatorname{int}(ABCD)$.

Показали, что какова бы ни была прямая MT, существует отрезок, соединяющий точки M, T и принадлежащий внутренности данного контура. По определению контур $ABCD$ выпуклый. Утверждение 7) доказано.

На ребре AB простого контура $ABCD$ выберем некоторую точку K. Через K проходят две изотропные прямые, одна из них совпадает со стороной AB контура, другую обозначим k. Согласно утверждению 6) прямая k пересекает ребро CD данного контура (пусть $k \cap CD = L$), тогда по утверждению 5) прямая k не пересекает ребра BC и DA. Следовательно, отрезок AB (CD) является объединением отрезков AK и KB (CL и LD) и контуры $F_1 = AKLD$, $F_2 = KBCL$ являются простыми. Таким образом, точка K однозначно определяет два простых контура F_1, F_2 из $\wp$.

Пусть $AB \cap CD = P$, $BC \cap AD = N$, $KL \cap AD = V$, $KL \cap BC = J$. Тогда по условию (12) для контуров F_1, F_2 получаем:

$$\operatorname{int} F_1 = W_P \cap W_V, \qquad \operatorname{int} F_2 = W_P \cap W_J. \tag{16}$$

Так как контуры F_1, F_2 — простые, точки V, J прямой KL не принадлежат отрезку KL, следовательно, эти точки не принадлежат множеству W_P. Точка N не принадлежит простому контуру F, т. е. также не принадлежит множеству W_P. Поэтому

$$W_P \cap (W_V \cap W_J) = \varnothing. \tag{17}$$

Равенства (16), (17) приводят к условию $\operatorname{int} F_1 \cap \operatorname{int} F_2 = \emptyset$.

Прямые NV, NJ и VJ изотропные, поэтому

$$W_V \cup W_J = W_N \cup (W_V \cap W_J). \tag{18}$$

Учитывая равенства (16), (18), (17), (12), получаем $\operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2 = \operatorname{int} F$. Доказано утверждение 8).

Пусть теперь $F = ABCD$ — составной контур, где $AB \cap CD = P$, $BC \cap AD = N$. По утверждению 4) каждая прямая пересекает хотя бы два ребра составного контура из $\wp$, и если прямая имеет с составным контуром из $\wp$ только одну общую точку, эта точка является для контура особой. Пусть l — произвольная прямая, проходящая через особую точку P (N). Если l принадлежит множеству W_P (W_N), то она пересекает ребра BC и AD $(AB$ и $CD)$, также принадлежащие этому множеству, следовательно, l имеет с контуром еще хотя бы одну общую точку. Если l принадлежит множеству $\hat{W}_P$ $(\hat{W}_N)$, дополнению множества W_P (W_N) до плоскости H^2, то l пересекает дополнения отрезков BC и AD $(AB$ и $CD)$ до содержащих их прямых. Следовательно, P (N) — единственная общая точка прямой l и контура $ABCD$. Таким образом, каждая прямая, проходящая через любую точку M множества $W_P \cap W_N$, имеет с контуром не менее двух общих точек, и для каждой точки K, не принадлежащей множеству $W_P \cap W_N$, найдется прямая (KP, KN), пересекающая контур в единственной точке. Следовательно, для составного контура $ABCD$ также имеет место равенство (12).

Точка P (N) разбивает каждый из отрезков AB и CD $(BC$ и $AD)$ на два отрезка:

$$AB = AP \cup PB, \qquad CD = CP \cup PD, \qquad BC = BN \cup NC, \qquad AD = AN \cup ND. \tag{19}$$

Очевидно, контуры $F_1 = APCN$ и $F_2 = BPDN$ (см. рис. 4) принадлежат $\wp$. По утверждениям 2), 3) диагональные прямые AC и BD контура F гиперболические, а прямая PN эллиптическая. Тогда контуры F_1 и F_2 в силу утверждения 2) являются простыми. Докажем, что $\operatorname{int} F_1 \cap \operatorname{int} F_2 = \emptyset$ и $\operatorname{int} F = \operatorname{int} F_1 \cap \operatorname{int} F_2$.

Предположим, что существует точка M: $M \in \operatorname{int} F_1$ и $M \in \operatorname{int} F_2$. Тогда любая прямая m, проходящая через точку M, пересекает каждый простой контур F_1, F_2 в двух точках. Полагая, что прямая m не содержит особых точек P и N, общих для контуров F_1, F_2, получим четыре различные точки пересечения прямой m ребрами контуров F_1, F_2. Прямая m не может пересечь некоторую прямую дважды, поэтому при разложениях (19) m пересекает каждое ребро контура F.

В то же время, какова бы ни была точка M плоскости H^2, найдутся проходящие через нее прямые, имеющие с данным контуром из $\wp$ менее четырех общих точек. Действительно, если S — несобственная точка какой-либо стороны контура, то прямая MS не пересекает, по крайней мере, одно из ребер данного контура. Пришли к противоречию. Следовательно, $\operatorname{int} F_1 \cap \operatorname{int} F_2 = \emptyset$.

Пусть точка M принадлежит множеству $\operatorname{int} F_1$ $(\operatorname{int} F_2)$, тогда каждая проходящая через M прямая пересекает контур F_1 (F_2) в двух точках X, Y. Но имеют место равенства (19), т. е. все ребра контуров F_1, F_2 полностью принадлежат контуру F. Поэтому $X \in F$, $Y \in F$. Следовательно, $M \in \operatorname{int} F$. Итак,

$$\operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2 \subset \operatorname{int} F. \tag{20}$$

Обратно. Противоположные стороны контуров F_1 (F_2) пересекаются в точках B, D $(A$, $C)$. По ранее доказанному

$$\operatorname{int} F = W_P \cap W_N, \qquad \operatorname{int} F_1 = W_B \cap W_D, \qquad \operatorname{int} F_2 = W_A \cap W_C. \tag{21}$$

Пусть $M \in \operatorname{int} F$, или

$$M \in W_P \cap W_N. \tag{22}$$

Предположим, что $M \notin \operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2$, т. е. $M \notin \operatorname{int} F_1$ и $M \notin \operatorname{int} F_2$. Тогда на основании равенств (21) M не принадлежит хотя бы одному из множеств W_B, W_D и хотя бы одному из множеств W_A, W_C. Допустим, что

$$M \notin W_A \qquad \text{и} \qquad M \notin W_B. \tag{23}$$

Тогда точка M принадлежит дополнениям множеств W_A и W_B до плоскости H^2: $M \in \hat{W}_A$ и $M \in \hat{W}_B$. Следовательно,

$$M \in \hat{W}_A \cap \hat{W}_B. \tag{24}$$

Через точки A и B проходят три изотропные прямые AB, AN, BN, две из которых (AN, BN) определяют множества $\hat{W}_N$ и W_N. По построению каждое из множеств $\hat{W}_A$, $\hat{W}_B$ содержит абсолютную квадрику, следовательно, $\hat{W}_A \cap \hat{W}_B \subset \hat{W}_N$. Поэтому из условия (24) следует условие: $M \in \hat{W}_N$. Но тогда $M \notin W_N$. Пришли к противоречию с условием (22). Следовательно, допущения (23) не имеют места. Аналогично исключаем условия: $M \notin W_A$ и $M \notin W_D$; $M \notin W_C$ и $M \notin W_B$; $M \notin W_C$ и $M \notin W_D$. Получаем противоречие предположения $M \notin \operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2$ с условием $M \in \operatorname{int} F$. Откуда следует, что $\operatorname{int} F \subset \operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2$. Учитывая условие (20), приходим к утверждению теоремы: $\operatorname{int} F = \operatorname{int} F_1 \cup \operatorname{int} F_2$.

Остается доказать, что составной контур $ABCD$ из $\wp$ не является выпуклым.

По построению каждая точка прямой PN, за исключением точек P и N, является внутренней относительно контура $ABCD$. Выберем на прямой PN точки T, L, разделяющие пару точек P, N. Тогда каждый из отрезков, определенных точками T, L на эллиптической прямой PN, содержит точку P или N, т. е. не принадлежит полностью множеству $\operatorname{int}(ABCD)$. Следовательно, контур $ABCD$ не является выпуклым. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Случаям простого и составного контуров из $\wp$ соответствуют принципиально различные положения на абсолютной линии γ несобственных точек K_1, K_2, K_3, K_4 последовательно взятых сторон AB, BC, CD, DA контура. Действительно, пусть $X = K_1K_2 \cap K_3K_4$, $Y = K_2K_3 \cap K_1K_4$. В используемом каноническом репере R точки K_1, K_2, K_3, K_4 заданы координатами (2), поэтому точки X и Y имеют координаты $X(-b : d : 0)$, $Y(2b : 2d : bd)$. Точка X является внутренней (внешней) относительно линии γ при $bd < 0$ ($bd > 0$), а точка Y является внутренней (внешней) относительно γ при условии $bd \in (0; 4)$ ($bd \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$). Внутренними относительно γ точки X, Y одновременно быть не могут. Остаются два варианта:

1) одна из точек X, Y внутренняя, другая — внешняя относительно абсолюта ($bd < 4$, $ABCD$ — простой изотропный контур);

2) обе точки X, Y — внешние относительно линии γ ($bd > 4$, $ABCD$ — составной изотропный контур).

В первом случае разделены или пары точек K_1, K_2 и K_3, K_4 (рис. 3), или пары точек K_2, K_3 и K_4, K_1; во втором — никакая пара соседних точек из K_1, K_2, K_3, K_4 не разделена (рис. 4).

Замечание 2. Пусть $ABCD$ — простой контур. По утверждению 2) теоремы 2 диагональные прямые AC и BD различных типов. Предположим, что прямая AC (BD) — эллиптическая (гиперболическая). Тогда $bd < 0$.

Пусть $M(1 : m_2 : m_3)$ — некоторая точка плоскости H^2. Непосредственная проверка показывает, что при $bd < 0$ прямые $MP(dm_2 : (4m_3 - d) : -4m_2)$, $MN(4m_3 - bm_2 : b : -4)$ одновременно являются эллиптическими тогда и только тогда, когда одновременно эллиптическими (гиперболическими) являются прямые $MA(m_2 : 1 : 0)$, $MC(4dm_3 + bdm_2 - 4m_2 : 4 + bd - 4b + m_3 : 4bm_2 - 4d)$ ($MB(m_2 : bm_3 - 1 : -bm_2)$, $MD(dm_3 - m_2 : 1 : -d)$).

Поэтому на основании равенства (12) получаем

$$\operatorname{int}(ABCD) = W_A \cap W_C, \qquad \operatorname{int}(ABCD) = \hat{W}_B \cap \hat{W}_D.$$

Замечание 3. С проективной точки зрения на плоскости H^2 простое отношение трех точек A, B, C параболической прямой l с несобственной точкой K есть число $t = -(ABCK)$, инвариантное относительно преобразований фундаментальной группы G плоскости H^2. Если $(ABCK) = -t$, говорят, что точка C делит отрезок AB параболической прямой в отношении t: $(AB, C) = t$.

При доказательстве утверждения 1) теоремы 2 определены числа (ABK_2P), (CDK_4P), (CBK_3N), (ADK_1N), равные в используемом каноническом репере R отношению $\frac{4-bd}{4}$. Учитывая, что K_1, K_2, K_3, K_4 — несобственные точки сторон изотропного контура $ABCD$, получаем:

$$(AB, P) = (CD, P) = (CB, N) = (AD, N) = \frac{4}{bd - 4} = \Delta.$$

Определяя Δ, условимся в простых отношениях трех точек первой указывать ту вершину ребра 4-контура, которая принадлежит диагональной прямой эллиптического типа.

Таким образом, число Δ является инвариантом конечного замкнутого 4-контура относительно группы G и равно отношению, в котором точки пересечения противоположных сторон контура делят его ребра, принадлежащие данным сторонам. При $\Delta < 0$ ($\Delta > 0$) конечный замкнутый 4-контур является простым (составным).

Покажем, что любые два 4-контура плоскости H^2 с равными инвариантами ΔG-эквивалентны. Пусть $ABCD$ и $A'B'C'D'$ — конечные замкнутые 4-контуры плоскости H^2, для которых имеют место равенства:

$$(AB, P) = (CD, P) = (CB, N) = (AD, N) = \Delta_0,$$

$$(A'B', P') = (C'D', P') = (C'B', N') = (A'D', N') = \Delta_0,$$

где $\mathrm{P} = AB \cap CD$, $N = AD \cap BC$, $P' = A'B' \cap C'D'$, $N' = A'D' \cap B'C'$.

Несобственные точки сторон AB, AD и BC ($A'B$, $A'D'$ и $B'C'$) обозначим A_1, A_2 и E (A_1', A_2' и E') соответственно. Выберем проективные реперы $R_0 = \{A_1, A_2, A, E\}$ и $R' = \{A_1', A_2', A', E'\}$. По основной теореме о проективных преобразованиях существует единственное проективное преобразование f, которое репер R_0 переводит в репер R'. Так как первые две вершины и единичная точка реперов R_0 и R' принадлежат абсолюту, то уравнение абсолютной овальной линии γ в каждом выбранном репере имеет вид (1). Следовательно, линия γ инвариантна относительно преобразования f, т. е. f входит в фундаментальную группу G преобразований плоскости H^2.

Изотропные прямые l_1, l_2, l с несобственными точками A_1, A_2, E переходят при f в изотропные прямые l_1', l_2', l' с несобственными точками A_1', A_2', E' соответственно. Так как $B = l_1 \cap l$, $B' = l_1' \cap l'$, $N = l_2 \cap l$, $N' = l_2' \cap l'$, то $f(B) = B'$, $f(N) = N'$. Пусть $f(C) = C_1$. Тогда $(C_1B', N') = (CB, N) = \Delta_0$. Но простое отношение $(C'B', N')$ также равно Δ_0, т. е. $(C_1B', N') = (C'B', N')$. Следовательно, $C_1 = C'$. Аналогично можно показать, что $f(D) = D'$. Поэтому $f(ABCD) = A'B'C'D'$.

Таким образом, контуры $ABCD$ и $A'B'C'D'$ G-эквивалентны.

Теорема 3. *Если простые 4-контуры F_1, F_2, ..., F_n, $n \in N$, соответственно с инвариантами Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n образуют разбиение простого 4-контура F с инвариантом Δ, то*

$$|\Delta| = \prod_{i=1}^{n} |\Delta_i|. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть в каноническом репере R контур F задан координатами своих вершин: $A(0:0:1)$, $B(b:0:1)$, $C(4b:4d:4+bd)$, $D(0:d:1)$. Тогда несобственные точки прямых AB, BC, CD, DA имеют в репере R координаты (2), а точки пересечения противоположных сторон данного контура — координаты (3).

Применим метод математической индукции.

1. На стороне, например, AB, контура F выберем точку $T(t:0:1)$. Согласно утверждению 8) теоремы 2 точка T определяет разбиение контура F на простые контуры $F_1 = ATT'D$ и $F_2 = TBCT'$. Выразим модуль инварианта Δ контура F через модули инвариантов Δ_1, Δ_2 контуров F_1, F_2. Так как в репере R

$$\Delta = -(ABPK_2) = \frac{4}{bd-4}, \qquad \Delta_1 = -(ATPK_2) = \frac{4}{dt-4}, \qquad \Delta_2 = -(TBPK_2) = \frac{4-dt}{4-bd},$$

то при $n = 2$ теорема справедлива:

$$|\Delta| = |\Delta_1||\Delta_2|. \tag{26}$$

2. Предположим, что формула (25) верна для $n = k$, $k \in N$, т. е. имеет место равенство

$$|\Delta| = \prod_{i=1}^{k} |\Delta_i|, \tag{27}$$

где Δ_1, Δ_2, ..., Δ_k — инварианты простых 4-контуров соответственно F_1, F_2, ..., F_k, удовлетворяющих равенствам: 1) $(\forall\ p, q = \overline{1,k})\ \mathrm{int}\, F_p \cap \mathrm{int}\, F_q = \varnothing$; 2) $\bigcup\limits_{p=1}^{k} \mathrm{int}\, F_p = \mathrm{int}\, F$.

3. Докажем справедливость формулы (25) для $n = k+1$. Разобьем некоторый контур F_j, $j = \overline{1,k}$, на контуры F_j^1, F_j^2 соответственно с инвариантами Δ^1, Δ^2. По формуле (26) $|\Delta_j| = |\Delta^1||\Delta^2|$. Поэтому в силу предположения (27) $|\Delta| = |\Delta_1||\Delta_2|\cdots|\Delta_{j-1}||\Delta^1||\Delta^2||\Delta_{j+1}|\ldots|\Delta_k|$, т. е. $|\Delta| = \prod\limits_{i=1}^{k+1}|\Delta_i|$.

Теорема 3 доказана.

Библиографический список

1. *Розенфельд, Б.А.* Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства / Б.А. Розенфельд, М.П. Замаховский. – М.: МЦНМО, 2003. – 560 с.
2. *Ромакина, Л.Н.* Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей / Л.Н. Ромакина. – Саратов: Научная книга, 2008. – 279 с.

УДК 517.984

ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА – ДИРИХЛЕ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.А. Халова

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: HalovaVA@info.sgu.ru

В статье получен аналог теоремы Жордана – Дирихле о сходимости разложений по собственным функциям оператора $Ly = \alpha y'(x) - y'(1-x)$ с граничным условием $U(y) = ay(0) + by(1) - (y,\varphi) = 0$.

Ключевые слова: теорема Жордана – Дирихле, резольвента.

On Analogue of Jordan – Dirichlet Theorem about the Convergence of the Expansions in Eigenfunctions of a Certain Class of Differential-Difference Operators

V.A. Khalova

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
E-mail: HalovaVA@info.sgu.ru

An analogue of Jordan – Dirichlet theorem is established of convergence of the expansions in eigen functions of the operator $Ly = \alpha y'(x) - y'(1-x)$ with the boundary condition $U(y) = ay(0) + by(1) - (y,\varphi) = 0$.

Key words: Jordan – Dirichlet theorem, resolvent.

Рассматривается оператор

$$Ly = \alpha y'(x) - y'(1-x), \quad x \in [0,1], \quad \alpha^2 \neq 1, \tag{1}$$

с граничным условием

$$U(y) = ay(0) + by(1) - (y,\varphi) = 0, \tag{2}$$

где $y'(1-x) = \frac{d}{d\xi}y(\xi)|_{\xi=1-x}$, a, b — заданные постоянные, $(y,\varphi) = \int\limits_0^1 y(t)\varphi(t)\,dt$, $\varphi(t) \in C[0,1]$.

В настоящей статье для разложений по собственным и присоединенным функциям (в дальнейшем с.п.ф.) оператора (1)–(2) установлен аналог теоремы Жордана – Дирихле из теории тригонометрических рядов Фурье [1, с. 121–122]. Данная работа продолжает исследования функционально-дифференциальных и интегральных операторов с операторами отражения. В работе [2] такой результат был получен для оператора дифференцирования $y'(x)$ с краевым условием $\int\limits_0^1 y(t)\,d\sigma(t) = 0$, где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации, имеющая скачки в точках 0 и 1. В работе [3] аналог теоремы Жордана – Дирихле установлен для разложений по с.п.ф. оператора

$$Ly = \beta y'(x) + y'(1-x), \quad x \in [0,1], \quad \beta^2 \neq 1,$$