Библиографический список

1. *Павленко В. Н., Потапов Д. К.* О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 911–919.

2. *Потапов Д. К.* О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2004. Вып. 4. С. 125–132.

3. *Потапов Д. К.* Задачи со спектральным параметром и разрывной нелинейностью. СПб., 2008. 99 с.

4. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., 1972. 416 с.

5. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. М., 1983. 272 с.

6. *Потапов Д. К.* О структуре множества собственных значений для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 1. С. 150–152.

7. *Потапов Д. К.* Оценки дифференциального оператора в задачах со спектральным параметром для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. № 5(21). С. 268–271.

УДК 517.927.25

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. С. Рыхлов, О. В. Парфилова*

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
*Саратовская государственная академия права,
кафедра информатики
E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

Рассматривается класс пучков обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что корни характеристического уравнения пучков этого класса лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, таким образом, что один корень лежит по одну сторону от начала координат, а остальные по другую сторону. Описываются случаи, когда система корневых функций m-кратно $(3 \le m \le n-1)$ полна в пространстве суммируемых с квадратом функций на основном отрезке.

Ключевые слова: пучок обыкновенных дифференциальных операторов, кратная полнота, корневые функции.

On Multiple Completeness of the Root Functions of the Pencils of Differential Operators with Constant Coefficients

V. S. Rykhlov, O. V. Parfilova*

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
*Saratov State Academy of Law,
Chair of Informatics
E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

A class of the pencils of ordinary differential operators of n-th order with constant coefficients is considered. The roots of the characteristic equation of the pencils from this class are supposed to lie on a straight line containing the origin, provided that one of the roots lies on one part from the origin, the rest lie on another part. The cases when the system of root functions is m-fold $(3 \le m \le n-1)$ complete in the space of square summable functions on main interval are described.

Key words: pencil of ordinary differential operators, multiple completeness, root functions.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном отрезке $[0,1]$ дифференциальным выражением (д. в.):

$$\ell(y,\lambda) := p_0(x,\lambda)y^{(n)} + p_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x,\lambda)y \tag{1}$$

и линейно независимыми краевыми условиями:

$$U_j(y,\lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}(\lambda)y^{(k)}(0) + b_{jk}(\lambda)y^{(k)}(1) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $p_{n-k}(x,\lambda) = \sum\limits_{s=0}^{n-k} p_{sk}(x)\lambda^{\nu}$, $p_{sk}(x) \in L_1[0,1]$, а $a_{jk}(\lambda)$, $b_{jk}(\lambda)$ — произвольные полиномы по λ.

Наряду с краевыми условиями (2) будут рассматриваться краевые условия

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk} y^{(k)}(0) + b_{jk} y^{(k)}(1) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

не содержащие параметра λ.

Далее будем использовать, не повторяя их в данной статье, известные определения собственных значений (с. з.), корневых (собственных и присоединенных) функций, производных (по Келдышу) цепочек из [1–2]. Пусть $\Lambda := \{\lambda_k\}$ есть множество всех с. з. пучка $L(\lambda)$. Предполагаем, что множество Λ счетно. Пусть $Y := \{y_k\}$ есть множество всех корневых функций пучка $L(\lambda)$, соответствующих множеству Λ.

Определение 1. Система Y корневых функций пучка $L(\lambda)$ называется *m-кратно полной* в пространстве $L_2[0,1]$ $(0 < m \le n)$, если из условия ортогональности вектор-функции $h \in L_2^m[0,1] := = \underbrace{L_2[0,1] \oplus \dots \oplus L_2[0,1]}_{m \text{ раз}}$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе Y, следует равенство $h = 0$. $\square$

При изучении спектральных свойств несамосопряженного пучка $L(\lambda)$ одной из основных является задача исследования свойств его корневых функций. Весьма важными являются вопросы о разложениях функций в биортогональные ряды Фурье по корневым функциям, в частности, вопросы полноты корневых функций в $L_2[0,1]$.

В данной статье решается задача нахождения условий на коэффициенты пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота. В последнем случае возникает вопрос об m-кратной полноте при $1 \le m \le n-1$.

Основополагающей по этой задаче является работа [1] (см. также [3, 4]), в которой была сформулирована теорема об n-кратной полноте корневых функций пучка $L(\lambda)$, порожденного дифференциальным выражением с переменными коэффициентами со специальной главной частью

$$l(y,\lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\}$$

и распадающимися краевыми условиями вида (3) (когда часть краевых условий берется только в конце 0 отрезка [0,1], а остальные в 1). Эта теорема была доказана в [5] в случае аналитических и в [6, 7] в случае суммируемых коэффициентов.

Но для некоторых классов пучков $L(\lambda)$, даже с постоянными коэффициентами, вопрос о кратной полноте корневых функций еще не исследовался. Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ пучок обыкновенных дифференциальных операторов, порожденный однородным д. в. n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\ell_0(y,\lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk} \lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk} \in \mathbb{C}, \quad p_{0n} \ne 0 \tag{4}$$

и линейно независимыми нормированными краевыми условиями специального вида:

$$U_i^0(y,\lambda) := \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) = 0, \quad i = \overline{1,l},$$

$$U_i^0(y,\lambda) := \sum_{s+k \le \varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) + \sum_{s+k \le \varkappa_{i1}} \lambda^s \beta_{isk} y^{(k)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{5}$$

где $\lambda, \alpha_{isk}, \beta_{isk} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0,1,\dots,n-1\}$, $1 \le l \le n-1$. Не нарушая общности можно считать (иначе перенумеруем краевые условия), что

$$\varkappa_{n1} - \varkappa_{n0} = \max_{l+1 \le i \le n} \{\varkappa_{i1} - \varkappa_{i0}\}. \tag{6}$$

Пусть всюду далее выполняется основное предположение относительно дифференциального выражения $\ell_0(y,\lambda)$, а именно, что корни ω_j, $j = \overline{1,n}$, характеристического уравнения $\sum\limits_{s+k=n} p_{sk}\omega^k = 0$ различны, отличны от нуля и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, причем так, что один корень ω_n лежит по одну сторону от начала координат, а остальные корни $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ — по другую сторону. Не нарушая общности, можно считать, что

$$\omega_n < 0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{n-1}. \tag{7}$$

Пучок вида (4)–(5) в случае, когда краевые условия не зависят от λ и **a**) $2l > n$, т. е. краевые условия полураспадающиеся; **b**) существует прямая d, проходящая через начало координат и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой их которых число этих корней не меньше, чем $n - l$, детально рассмотрен в [8, 9]. В этих работах получены условия n-кратной и m-кратной полноты при $1 \le m \le n-1$ в пространстве $L_2[0,1]$ и показана точность этого результата. Некоторые другие классы пучков вида (4)–(5) в случае $1 \le l \le n-1$ подробно исследованы в [10–12].

Для рассматриваемого пучка (4)–(5) не выполняется предположение **a**), а при условиях (7) и $1 \le l \le n-2$ не выполняется и предположение **b**). При этом, в отличие от [8–9], рассматриваемые краевые условия (5) могут зависеть от λ.

Однократная полнота корневых функций для частного случая пучка (4)–(5) при $n = 2$ в предположении (7) исследована в [13]. Полнота для случая $l = n-1$, когда краевые условия (5) не зависят от λ и выполняются условия (7), установлена в [8–9].

Для формулировки основного результата введем обозначения

$$a_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk}\omega_j^k \quad (i,j=\overline{1,n}); \quad b_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk}\omega_j^k \quad (i=\overline{l+1,n};\ j=\overline{1,n});$$

$$\varkappa_i = \min\bigl\{\varkappa_{i0} + \varkappa_{n1} - \varkappa_{n0} - \max\{0, \varkappa_{n1} - \varkappa_{n0}\}, \varkappa_{i1}\bigr\}(i=\overline{l+1,n}); [n]_+ = \begin{cases} n, & \text{если } n \ge 0, \\ 0, & \text{если } n < 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Если справедливы неравенства* (7), *выполняются условия* (6) *и*

$$\det(a_{ij})_{i\in\{1,\dots,l\}}^{j\in\{1,\dots,l-1,n\}} \ne 0,\ \det(b_{ij})_{i\in\{l+1,\dots,n\}}^{j\in\{l,\dots,n-1\}} \ne 0,\ b_{nn} \ne 0,\ \det(a_{ij})_{i\in\{1,\dots,n-1\}}^{j\in\{1,\dots,n-1\}} \ne 0,$$

то при $m \le n-l+1$ *система корневых функций пучка* (4)–(5) m*-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $\sum\limits_{i=l+1}^{n}[m-1-\varkappa_i]_+$.

Теорема точна в следующем смысле. При $l = n-1$ и $m = n-l+2 (=3)$ в [14] получены достаточные условия на корни ω_j, при которых система корневых функций пучков вида (4)–(5) m-кратно не полна в $L_2[0,1]$ и имеет бесконечный дефект. В [8, с. 72–77] (см. также [9, с. 58–62]) сформулирована теорема об $(n-l+2)$-кратной неполноте частного случая пучка (4)–(5), краевые условия которого являются полураспадающимися и не зависят от параметра λ. Но доказательство этого факта проведено очень схематично и конец доказательства ошибочен.

Далее докажем теорему 1. Схема доказательства соответствует схеме доказательства теорем 2.1–2.3 из [8–9], а изложение следует тексту статьи [12]. Центральную роль в доказательстве играет лемма 1, которая приводится в следующем параграфе.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ОСНОВНАЯ ЛЕММА

Функции $y_j(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_j x)$, $j = \overline{1,n}$, образуют фундаментальную систему решений уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$ при $\lambda \ne 0$.

Ненулевые собственные значения λ_k, $k = 1, 2, \dots$, пучка (4)–(5) являются нулями целой функции $\Delta(\lambda) := \det(U_i^0(y_j(x,\lambda),\lambda))_{i,j=1}^n$. Несмотря на то что $\Delta(0) = 0$, число $\lambda_0 = 0$ может быть с. з., а может и не быть.

Обозначим через $\Phi_i(x,\lambda)$ функцию, полученную из $\Delta(\lambda)$ заменой i-й строки в случае $l+1 \le i \le n$ строкой $y_1(x,\lambda), \dots, y_n(x,\lambda)$. Непосредственно можно убедиться в том, что столбцы

$$\left(\frac{\partial^k \Phi_i(x,\lambda)}{\partial\lambda^k}, \dots, \frac{\partial^k(\lambda^{m-1}\Phi_i(x,\lambda))}{\partial\lambda^k}\right)^T\Bigg|_{\lambda=\lambda_\nu},$$

где $i = \overline{l+1,n}$, $k = \overline{0,s}$, $m \in \{1,\dots,n\}$, являются производными по Келдышу m-цепочками для корневых функций, соответствующих с. з. λ_ν, которое является нулем $\Delta(\lambda)$ кратности $s+1$. Введем в рассмотрение функции

$$\Theta_i(\lambda) = \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^{j-1}\Phi_i(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} h_j(x)\,dx, \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{8}$$

где $h(x) = \big((h_1(x),\dots,h_m(x)\big)^T \in L_2^m[0,1]$.

Перепишем (8) в виде

$$\Theta_i(\lambda) = \Delta_i(\lambda)/\Delta(\lambda), \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{9}$$

где определитель $\Delta_i(\lambda)$ получается из $\Delta(\lambda)$ заменой i-й строки строкой $u_{n+1,1}(\lambda), u_{n+1,2}(\lambda),\dots, u_{n+1,n}(\lambda)$, где $u_{n+1,k}(\lambda) = \int\limits_0^1 \sum\limits_{j=1}^m h_j(x)\lambda^{j-1} y_k(x,\lambda)\,dx$.

Следующие утверждения потребуются нам в дальнейшем. Их доказательство можно найти, например, в [9, с. 48–49].

Утверждение 1. *Функции $\Phi_{l+1}(x,\lambda),\dots,\Phi_n(x,\lambda)$ являются линейно независимыми решениями уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$, удовлетворяющими первым l условиям (5) в точке 0.*

Утверждение 2. *Функции $\Theta_i(\lambda)$ не зависят от выбора фундаментальной системы решений уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$.*

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\Pi_\varepsilon^+ = \left\{\lambda \in \mathbb{C} | \arg\lambda \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2} + \varepsilon, 2\pi\right)\right\}, \qquad \Pi_\varepsilon^- = \left\{\lambda \in \mathbb{C} | \arg\lambda \in \left[\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right]\right\},$$

где $\varepsilon > 0$ и достаточно мало.

Лемма 1. *Если выполняются условия (6)–(7) и*

$$\det(a_{ij})_{i\in\{1,\dots,l\}}^{j\in\{1,\dots,l-1,n\}} \ne 0, \quad \det(b_{ij})_{i\in\{l+1,\dots,n\}}^{j\in\{l,\dots,n-1\}} \ne 0, \tag{10}$$

то при $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ и $|\lambda| \gg 1$ справедливы оценки

$$|\Theta_i(\lambda)| \le C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_{i1}}, \quad i = \overline{l+1,n},$$

а если

$$\det(a_{ij})_{i\in\{1,\dots,n-1\}}^{j\in\{1,\dots,n-1\}} \ne 0, \quad b_{nn} \ne 0, \tag{11}$$

то при $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ и $|\lambda| \gg 1$ справедливы оценки

$$|\,\Theta_i(\lambda)\,| \le C\,|\,\lambda\,|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_{i0}-\varkappa_{n1}+\varkappa_{n0}+\max\{0,\varkappa_{n1}-\varkappa_{n0}\}}, \quad i = \overline{l+1,n}.$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$. Исходя из вида функций $y_j(x,\lambda)$, $j = \overline{1,n}$, в этом случае будем иметь:

$$U_i(y_j,\lambda) = \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk}\omega_j^k\lambda^{s+k} = \lambda^{\varkappa_{i0}} \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk}\omega_j^k = \lambda^{\varkappa_{i0}} a_{ij}, \quad i = \overline{1,l},\ j = \overline{1,n};$$

$$U_i(y_j,\lambda) = \sum_{s+k\le\varkappa_{i0}} \alpha_{isk}\omega_j^k\lambda^{s+k} + \sum_{s+k\le\varkappa_{i1}} \beta_{isk}\omega_j^k\lambda^{s+k}e^{\lambda\omega_j} =$$

$$= \lambda^{\varkappa_{i1}}e^{\lambda\omega_j}\left(\sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk}\omega_j^k + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + O(\lambda^{\varkappa_{i0}-\varkappa_{i1}}e^{-\lambda\omega_j})\right) =$$

$$= \lambda^{\varkappa_{i1}}e^{\lambda\omega_j}[b_{ij}], \qquad i = \overline{l+1,n}, \quad j = \overline{1,n-1},$$

$$U_i(y_n,\lambda) = \sum_{s+k\le\varkappa_{i0}} \alpha_{isk}\omega_n^k\lambda^{s+k} + \sum_{s+k\le\varkappa_{i1}} \beta_{isk}\omega_n^k\lambda^{s+k}e^{\lambda\omega_n} =$$

$$= \lambda^{\varkappa_{i0}} \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk}\omega_n^k + O(\lambda^{\varkappa_{i0}-1}) = \lambda^{\varkappa_{i0}}\left(a_{in} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \lambda^{\varkappa_{i0}}[a_{in}], \qquad i=\overline{l+1,n},$$

где использовано обозначение $[c] = c + O(\frac{1}{\lambda})$ при $\lambda \to \infty$. Подставим эти выражения в определитель $\Delta(\lambda)$ и разложим его по теореме Лапласа. Раскладываем по минорам первых l строк, располагаем слагаемые по убыванию вещественных частей показателей экспонент и записываем только главные члены. Получим с учетом (10)

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^{\varkappa_{10}}a_{11} & \dots\ \lambda^{\varkappa_{10}}a_{1l} & \dots\ \lambda^{\varkappa_{10}}a_{1n-1} & \lambda^{\varkappa_{10}}a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{l0}}a_{l1} & \dots\ \lambda^{\varkappa_{l0}}a_{ll} & \dots\ \lambda^{\varkappa_{l0}}a_{ln-1} & \lambda^{\varkappa_{l0}}a_{ln} \\ \lambda^{\varkappa_{l+11}}e^{\lambda\omega_1}[b_{l+11}] & \dots\ \lambda^{\varkappa_{l+11}}e^{\lambda\omega_l}[b_{l+1l}] & \dots\ \lambda^{\varkappa_{l+11}}e^{\lambda\omega_{n-1}}[b_{l+1n-1}] & \lambda^{\varkappa_{l+10}}[a_{l+1n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_1}[b_{n1}] & \dots\ \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_l}[b_{nl}] & \dots\ \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_{n-1}}[b_{nn-1}] & \lambda^{\varkappa_{n0}}[a_{nn}] \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{l}\varkappa_{i0}} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots\ a_{1l} & \dots\ a_{1n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots\ a_{ll} & \dots\ a_{ln-1} & a_{ln} \\ \lambda^{\varkappa_{l+11}}e^{\lambda\omega_1}[b_{l+11}] & \dots\ \lambda^{\varkappa_{l+11}}e^{\lambda\omega_l}[b_{l+1l}] & \dots\ \lambda^{\varkappa_{l+11}}e^{\lambda\omega_{n-1}}[b_{l+1n-1}] & \lambda^{\varkappa_{l+10}}[a_{l+1n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_1}[b_{n1}] & \dots\ \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_l}[b_{nl}] & \dots\ \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_{n-1}}[b_{nn-1}] & \lambda^{\varkappa_{n0}}[a_{nn}] \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{l}\varkappa_{i0} + \sum\limits_{i=l+1}^{n}\varkappa_{i1}} \left\{ e^{\lambda\sum\limits_{k=l}^{n-1}\omega_k} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ll-1} & a_{ln} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [b_{l+1l}] & \dots & [b_{l+1n-1}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [b_{nl}] & \dots & [b_{nn-1}] \end{vmatrix} + \dots \right\} =$$

$$= \pm\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{l}\varkappa_{i0} + \sum\limits_{i=l+1}^{n}\varkappa_{i1}} e^{\lambda\sum\limits_{k=l}^{n-1}\omega_k} \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ll-1} & a_{ln} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [b_{l+1l}] & \dots & [b_{l+1n-1}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [b_{nl}] & \dots & [b_{nn-1}] \end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\} =$$

$$= \pm\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{l}\varkappa_{i0} + \sum\limits_{i=l+1}^{n}\varkappa_{i1}} e^{\lambda\sum\limits_{k=l}^{n-1}\omega_k} \det(a_{ik})_{i\in\{1,\dots,l\}}^{k\in\{1,\dots,l-1,n\}} \det(b_{ik})_{i\in\{l+1,\dots,n\}}^{k\in\{l,\dots,n-1\}}[1]. \qquad (12)$$

Дальнейшие рассуждения проведем только для случая $1 < l \le n-2$, чтобы не слишком увеличивать объем статьи. Рассуждения в случае $l = n-1$ являются более простыми, и мы их опускаем.

При всех ненулевых $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливы соотношения:

$$u_{n+1,j}(\lambda) = \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{m} h_k(\xi)\lambda^{k-1}y_j(\xi,\lambda)d\xi =$$

$$= \lambda^{m-1}\int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{m} \lambda^{k-m}h_k(\xi)e^{\lambda\omega_j\xi}d\xi = \lambda^{m-1}\int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j\xi}d\xi, \quad j=\overline{1,n}, \qquad (13)$$

где $h_m(\xi,\lambda) := \sum\limits_{k=1}^{m}\lambda^{k-m}h_k(\xi)$.

Используя эти соотношения, найдем

$$\Delta_{l+1}(\lambda) = \lambda^{m-1} \begin{vmatrix} \lambda^{\varkappa_{10}}a_{11} & \dots & \lambda^{\varkappa_{10}}a_{1n-1} & \lambda^{\varkappa_{10}}a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{l0}}a_{l1} & \dots & \lambda^{\varkappa_{l0}}a_{ln-1} & \lambda^{\varkappa_{l0}}a_{ln} \\ \int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_1\xi}d\xi & \dots & \int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{n-1}\xi}d\xi & \int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_n\xi}d\xi \\ \lambda^{\varkappa_{l+21}}e^{\lambda\omega_1}[b_{l+21}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+21}}e^{\lambda\omega_{n-1}}[b_{l+2n-1}] & \lambda^{\varkappa_{l+20}}[a_{l+2n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_1}[b_{n1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_{n-1}}[b_{nn-1}] & \lambda^{\varkappa_{n0}}[a_{nn}] \end{vmatrix} =$$

$$
= \lambda^{m-1+\sum\limits_{i=1}^{l}\varkappa_{i0}} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \dots & a_{ln-1} & a_{ln} \\ \int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_1\xi}d\xi & \dots & \int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{n-1}\xi}d\xi & \int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_n\xi}d\xi \\ \lambda^{\varkappa_{l+21}}e^{\lambda\omega_1}[b_{l+21}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+21}}e^{\lambda\omega_{n-1}}[b_{l+2n-1}] & \lambda^{\varkappa_{l+20}}[a_{l+2n}] \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_1}[b_{n1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_{n-1}}[b_{nn-1}] & \lambda^{\varkappa_{n0}}[a_{nn}] \end{vmatrix} =
$$

$$
= \lambda^{m-1+\sum\limits_{i=1}^{l}\varkappa_{i0}} \sum_{j=1}^{n}(-1)^{l+j+1}\Delta_{l+1,j}(\lambda)\int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j\xi}d\xi, \tag{14}
$$

разложив определитель по элементам $(l+1)$-й строки, где $\Delta_{l+1,j}(\lambda)$ есть минор элемента $(l+1,j)$, т. е.

$$
\Delta_{l+1,j}(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \dots a_{lj-1} & a_{lj+1} & \dots a_{ln} \\ \lambda^{\varkappa_{l+21}}e^{\lambda\omega_1}[b_{l+21}] & \dots \lambda^{\varkappa_{l+21}}e^{\lambda\omega_{j-1}}[b_{l+2j-1}] & \lambda^{\varkappa_{l+21}}e^{\lambda\omega_{j+1}}[b_{l+2j+1}] & \dots \lambda^{\varkappa_{l+20}}[a_{l+2n}] \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_1}[b_{n1}] & \dots \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_{j-1}}[b_{nj-1}] & \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_{j+1}}[b_{nj+1}] & \dots \lambda^{\varkappa_{n0}}[a_{nn}] \end{vmatrix}.
$$

Раскладываем этот определитель по минорам первых l строк и располагаем слагаемые по убыванию вещественных частей показателей экспонент. Получим при $j=\overline{1,l}$, выписывая только главные члены,

$$
\Delta_{l+1,j}(\lambda) = \pm\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1l} & a_{1n} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \dots & a_{lj-1} & a_{lj+1} & \dots & a_{ll} & a_{ln} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda^{\varkappa_{l+21}}e^{\lambda\omega_{l+1}}[b_{l+2l+1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+21}}e^{\lambda\omega_{n-1}}[b_{l+2n-1}] \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_{l+1}}[b_{nl+1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_{n-1}}[b_{nn-1}] \end{vmatrix} + \dots\right\} =
$$

$$
= \pm\lambda^{\sum\limits_{i=l+2}^{n}\varkappa_{i1}} e^{\lambda\sum\limits_{k=l+1}^{n-1}\omega_k}\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1l} & a_{1n} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \dots & a_{lj-1} & a_{lj+1} & \dots & a_{ll} & a_{ln} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} [b_{l+2l+1}] & \dots & [b_{l+2n-1}] \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ [b_{nl+1}] & \dots & [b_{nn-1}] \end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} =
$$

$$
= \pm\lambda^{\sum\limits_{i=l+2}^{n}\varkappa_{i1}} e^{\lambda\sum\limits_{k=l+1}^{n-1}\omega_k}\left[\det(a_{ik})_{i\in\{1,\dots,l\}}^{k\in\{1,\dots,j-1,j+1,\dots,l,n\}}\det(b_{ik})_{i\in\{l+2,\dots,n\}}^{k\in\{l+1,\dots,n-1\}}\right]. \tag{15}
$$

Аналогично можно получить

$$
\Delta_{l+1,n} = \pm\lambda^{\sum\limits_{i=l+2}^{n}\varkappa_{i1}} e^{\lambda\sum\limits_{k=l+1}^{n-1}\omega_k}\left[\det(a_{ik})_{i\in\{1,\dots,l\}}^{k\in\{1,l\}}\det(b_{ik})_{i\in\{l+2,\dots,n\}}^{k\in\{l+1,\dots,n-1\}}\right]. \tag{16}
$$

При $j=\overline{l+1,n-1}$ будем иметь

$$
\Delta_{l+1,j}(\lambda) = \pm\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l-1} & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \dots & a_{ll-1} & a_{ln} \end{vmatrix}\times\right.
$$

$$
\left.\times\begin{vmatrix} \lambda^{\varkappa_{l+21}}e^{\lambda\omega_l}[b_{l+2l}] & \dots \lambda^{\varkappa_{l+21}}e^{\lambda\omega_{j-1}}[b_{l+2j-1}] & \lambda^{\varkappa_{l+21}}e^{\lambda\omega_{j+1}}[b_{l+2j+1}] & \dots \lambda^{\varkappa_{l+21}}e^{\lambda\omega_{n-1}}[b_{l+2n-1}] \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \dots & \dots\ \dots & \dots & \dots\ \dots \\ \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_l}[b_{nl}] & \dots \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_{j-1}}[b_{nj-1}] & \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_{j+1}}[b_{nj+1}] & \dots \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_{n-1}}[b_{nn-1}] \end{vmatrix} + \dots\right\} =
$$

$$
= \pm\lambda^{\sum\limits_{i=l+2}^{n}\varkappa_{i1}} e^{\lambda\left(\sum\limits_{k=l}^{n-1}\omega_k-\omega_j\right)}\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l-1} & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \dots & a_{ll-1} & a_{ln} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} [b_{l+2l}] & \dots & [b_{l+2j-1}] & [b_{l+2j+1}] & \dots & [b_{l+2n-1}] \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ [b_{nl}] & \dots & [b_{nj-1}] & [b_{nj+1}] & \dots & [b_{nn-1}] \end{vmatrix} + \right.
$$

$$+\ldots\Bigg\} = \pm\lambda^{\sum\limits_{i=l+2}^{n}\varkappa_{i1}} e^{\lambda\left(\sum\limits_{k=l}^{n-1}\omega_k-\omega_j\right)} \left[\det(a_{ik})_{i\in\{1,\ldots,l\}}^{k\in\{1,\ldots,l-1,n\}}\det(b_{ik})_{i\in\{l+2,\ldots,n\}}^{k\in\{l,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n-1\}}\right]. \qquad (17)$$

Таким образом, из (14)–(17) получим

$$\Delta_{l+1}(\lambda)=\lambda^{m-1+\sum\limits_{i=1}^{l}\varkappa_{i0}+\sum\limits_{i=l+2}^{n}\varkappa_{i1}} e^{\lambda\sum\limits_{k=l}^{n-1}\omega_k}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{l}\left[\pm\det(a_{ik})_{i\in\{1,\ldots,l\}}^{k\in\{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,l,n\}}\det(b_{ik})_{i\in\{l+2,\ldots,n\}}^{k\in\{l+1,\ldots,n-1\}}\right]\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda(\omega_j\xi-\omega_l)}d\xi+\right.$$

$$+\sum_{j=l+1}^{n-1}\left[\pm\det(a_{ik})_{i\in\{1,\ldots,l\}}^{k\in\{1,\ldots,l-1,n\}}\det(b_{ik})_{i\in\{l+2,\ldots,n\}}^{k\in\{l,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n-1\}}\right]\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}d\xi+$$

$$\left.+\left[\pm\det(a_{ik})_{i\in\{1,\ldots,l\}}^{k\in\{1,\ldots,l\}}\det(b_{ik})_{i\in\{l+2,\ldots,n\}}^{k\in\{l+1,\ldots,n-1\}}\right]\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda(\omega_n\xi-\omega_l)}d\xi\right). \qquad (18)$$

Положим $\lambda=re^{i\varphi}$ и рассмотрим для определенности $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}-\varepsilon]$. В случае $\varphi\in[\frac{3\pi}{2}+\varepsilon,2\pi]$ проводим аналогичные рассуждения. Используя неравенство Коши – Буняковского, получим при $j=\overline{1,n-1}$

$$\left|\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}d\xi\right|\le\int_0^1|h_m(\xi,\lambda)|e^{r\frac{2}{\pi}\varepsilon\omega_1(\xi-1)}d\xi\le\left(\int_0^1|h_m(\xi,\lambda)|^2d\xi\right)^{\frac12}\times$$

$$\times\left(\int_0^1 e^{2r\frac{2}{\pi}\varepsilon\omega_1(\xi-1)}d\xi\right)^{\frac12}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{|\lambda|^{m-k}}\|h_k\|_{L_2[0,1]}\frac{1}{\sqrt{2r\frac{2}{\pi}\omega_1}}\left(1-e^{-2r\frac{2}{\pi}\varepsilon\omega_1}\right)^{\frac12}\le\frac{C}{\sqrt{|\lambda|}}. \qquad (19)$$

Следовательно, при $j=\overline{1,l}$ справедливы оценки

$$\left|\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda(\omega_j\xi-\omega_l)}d\xi\right|=|e^{\lambda(\omega_j-\omega_l)}|\left|\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}d\xi\right|\le\frac{C}{\sqrt{|\lambda|}}. \qquad (20)$$

Аналогично (19) можно получить и оценку

$$\left|\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda(\omega_n\xi-\omega_l)}d\xi\right|=\left|e^{-\lambda\omega_l}\right|\left|\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_n\xi}d\xi\right|\le\frac{C}{\sqrt{|\lambda|}}. \qquad (21)$$

Из (18)–(21) окончательно найдем

$$|\Delta_{l+1}(\lambda)|\le C|\lambda|^{m-\frac32+\sum\limits_{i=1}^{l}\varkappa_{i0}+\sum\limits_{i=l+1}^{n}\varkappa_{i1}-\varkappa_{l+11}}\left|e^{\lambda\sum\limits_{k=l}^{n-1}\omega_k}\right|.$$

Рассуждая аналогично (14)–(18), получим при $i=\overline{l+2,n}$

$$|\Delta_i(\lambda)|\le C|\lambda|^{m-\frac32+\sum\limits_{k=1}^{l}\varkappa_{k0}+\sum\limits_{k=l+1}^{n}\varkappa_{k1}-\varkappa_{i1}}\left|e^{\lambda\sum\limits_{k=l}^{n-1}\omega_k}\right|.$$

На основании этих оценок, формул (9), (12) и предположений (10) в случае $\lambda\in\Pi_\varepsilon^+$ будем иметь

$$|\Theta_i(\lambda)|=\left|\Delta_i(\lambda)/\Delta(\lambda)\right|\le C|\lambda|^{m-\frac32-\varkappa_{i1}},\quad i=\overline{l+1,n},$$

т. е. утверждение леммы в этом случае доказано.

Пусть теперь $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$. В этом случае будем иметь:

$$U_i(y_j,\lambda)=\sum_{s+k=\varkappa_{i0}}\alpha_{isk}\omega_j^k\lambda^{s+k}=\lambda^{\varkappa_{i0}}\sum_{s+k=\varkappa_{i0}}\alpha_{isk}\omega_j^k=\lambda^{\varkappa_{i0}}a_{ij},\ i=\overline{1,l},\ j=\overline{1,n}; \tag{22}$$

$$U_i(y_j,\lambda)=\sum_{s+k\le\varkappa_{i0}}\alpha_{isk}\omega_j^k\lambda^{s+k}+\sum_{s+k\le\varkappa_{i1}}\beta_{isk}\omega_j^k\lambda^{s+k}e^{\lambda\omega_j}=\lambda^{\varkappa_{i0}}\sum_{s+k=\varkappa_{i0}}\alpha_{isk}\omega_j^k+O(\lambda^{\varkappa_{i0}-1})+$$

$$+e^{\lambda\omega_j}\sum_{s+k\le\varkappa_{i1}}\beta_{isk}\omega_j^k\lambda^{s+k}=\lambda^{\varkappa_{i0}}\left(\sum_{s+k=\varkappa_{i0}}\alpha_{isk}\omega_j^k+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)=\lambda^{\varkappa_{i0}}[a_{ij}],$$

$$i=\overline{l+1,n},\qquad j=\overline{1,n-1}; \tag{23}$$

$$U_i(y_n,\lambda)=\sum_{s+k\le\varkappa_{i0}}\alpha_{isk}\omega_n^k\lambda^{s+k}+\sum_{s+k\le\varkappa_{i1}}\beta_{isk}\omega_n^k\lambda^{s+k}e^{\lambda\omega_n}=\sum_{s+k\le\varkappa_{i0}}\alpha_{isk}\omega_n^k\lambda^{s+k}+$$

$$+\lambda^{\varkappa_{i1}}e^{\lambda\omega_n}\sum_{s+k=\varkappa_{i1}}\beta_{isk}\omega_n^k+O\left(\lambda^{\varkappa_{i1}-1}e^{\lambda\omega_n}\right)=\lambda^{\varkappa_{i1}}e^{\lambda\omega_n}\left(\sum_{s+k=\varkappa_{i1}}\beta_{isk}\omega_n^k+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)=$$

$$=\lambda^{\varkappa_{i1}}e^{\lambda\omega_n}[b_{in}],\qquad i=\overline{l+1,n}. \tag{24}$$

Подставим эти асимптотические формулы в $\Delta(\lambda)$ и воспользуемся предположением (6). Получим

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda^{\varkappa_{10}}a_{11} & \dots & \lambda^{\varkappa_{10}}a_{1n-1} & \lambda^{\varkappa_{10}}a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda^{\varkappa_{l0}}a_{l1} & \dots & \lambda^{\varkappa_{l0}}a_{ln-1} & \lambda^{\varkappa_{l0}}a_{ln}\\ \lambda^{\varkappa_{l+10}}[a_{l+11}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{l+10}}[a_{l+1n-1}] & \lambda^{\varkappa_{l+11}}e^{\lambda\omega_n}[b_{l+1n}]\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda^{\varkappa_{n0}}[a_{n1}] & \dots & \lambda^{\varkappa_{n0}}[a_{nn-1}] & \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_n}[b_{nn}] \end{vmatrix}=$$

$$=\lambda^{\sum\limits_{k=1}^{n}\varkappa_{k0}}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{l1} & \dots & a_{ln-1} & a_{ln}\\ [a_{l+11}] & \dots & [a_{l+1n-1}] & [b_{l+1n}]e^{\lambda\omega_n}\lambda^{\varkappa_{l+11}-\varkappa_{l+10}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn-1}] & [b_{nn}]e^{\lambda\omega_n}\lambda^{\varkappa_{n1}-\varkappa_{n0}} \end{vmatrix}=$$

$$=\lambda^{\sum\limits_{k=1}^{n}\varkappa_{k0}+\varkappa_{n1}-\varkappa_{n0}}e^{\lambda\omega_n}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & \dfrac{a_{1n}}{\lambda^{\varkappa_{n1}-\varkappa_{n0}}}e^{-\lambda\omega_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{l1} & \dots & a_{ln-1} & \dfrac{a_{ln}}{\lambda^{\varkappa_{n1}-\varkappa_{n0}}}e^{-\lambda\omega_n}\\ [a_{l+11}] & \dots & [a_{l+1n-1}] & [b_{l+1n}]\lambda^{\varkappa_{l+11}-\varkappa_{l+10}-\varkappa_{n1}+\varkappa_{n0}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn-1}] & [b_{nn}] \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по последнему столбцу и воспользуемся предположением (11). Получим

$$\Delta(\lambda)=\pm\lambda^{\sum\limits_{k=1}^{n}\varkappa_{k0}+\varkappa_{n1}-\varkappa_{n0}}e^{\lambda\omega_n}\left\{\frac{a_{1n}}{\lambda^{\varkappa_{n1}-\varkappa_{n0}}}\begin{vmatrix} a_{21} & \dots\ a_{2n-1}\\ \dots & \dots\\ [a_{l+11}] & \dots\ [a_{l+1n-1}]\\ \dots & \dots\\ [a_{n1}] & \dots\ [a_{nn-1}] \end{vmatrix}e^{-\lambda\omega_n}+\dots+\frac{a_{ln}}{\lambda^{\varkappa_{n1}-\varkappa_{n0}}}\times\right.$$

$$\times\begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1n-1} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ a_{l-11} & \dots a_{l-1n-1} \\ [a_{l+11}] & \dots [a_{l+1n-1}] \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ [a_{n1}] & \dots [a_{nn-1}] \end{vmatrix} e^{-\lambda\omega_n} + [b_{l+1n}]\lambda^{\varkappa_{l+11}-\varkappa_{l+10}-\varkappa_{n1}+\varkappa_{n0}} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1n-1} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \dots a_{ln-1} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ [a_{n1}] & \dots [a_{nn-1}] \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+[b_{nn}]\left.\begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1n-1} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ [a_{n-11}] & \dots [a_{n-1n-1}] \end{vmatrix}\right\} = \pm\lambda^{\sum\limits_{k=1}^{n}\varkappa_{k0}+\varkappa_{n1}-\varkappa_{n0}} e^{\lambda\omega_n}\Bigg\{[b_{nn}]\det(a_{ij})_{i\in\{1,\dots,n-1\}}^{j\in\{1,\dots,n-1\}} +$$

$$+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Bigg\} = \pm\lambda^{\sum\limits_{k=1}^{n}\varkappa_{k0}+\varkappa_{n1}-\varkappa_{n0}} e^{\lambda\omega_n} b_{nn}\det(a_{ij})_{i\in\{1,\dots,n-1\}}^{j\in\{1,\dots,n-1\}}[1]. \tag{25}$$

Далее, подставляя (13), (22)–(24) в $\Delta_i(\lambda)$ при $i=\overline{l+1,n}$, вынося из каждой строки λ в соответствующей степени и экспоненту из последнего столбца, а затем раскладывая полученный определитель по последнему столбцу и применяя оценки, аналогичные (19)–(21), получим

$$\Delta_i(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{k=1}^{n}\varkappa_{k0}-\varkappa_{i0}+m-1} e^{\lambda\omega_n} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1n-1} & a_{1n}e^{-\lambda\omega_n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \dots a_{ln-1} & a_{ln}e^{-\lambda\omega_n} \\ [a_{l+11}] & \dots [a_{l+1n-1}] & [b_{l+1n}]\lambda^{\varkappa_{l+11}-\varkappa_{l+10}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ [a_{i-11}] & \dots [a_{l-1n-1}] & [b_{i-1n}]\lambda^{\varkappa_{i-11}-\varkappa_{i-10}} \\ \int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_1\xi}d\xi & \dots \int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{n-1}\xi}d\xi & \int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda(\omega_n\xi-1)}d\xi \\ [a_{i+11}] & \dots [a_{l+1n-1}] & [b_{i+1n}]\lambda^{\varkappa_{i+11}-\varkappa_{i+10}} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ [a_{n1}] & \dots [a_{nn-1}] & [b_{nn}]\lambda^{\varkappa_{n1}-\varkappa_{n0}} \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\lambda^{\sum\limits_{k=1}^{n}\varkappa_{k0}-\varkappa_{i0}+m-1} e^{\lambda\omega_n} \left\{ a_{1n}e^{-\lambda\omega_n} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n-1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \dots & a_{ln-1} \\ [a_{l+11}] & \dots & [a_{l+1n-1}] \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_1\xi}d\xi & \dots & \int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{n-1}\xi}d\xi \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn-1}] \end{vmatrix} + \dots + \right.$$

$$+[b_{l+1n}]\lambda^{\varkappa_{l+11}-\varkappa_{l+10}} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \dots & a_{ln-1} \\ [a_{l+21}] & \dots & [a_{l+2n-1}] \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_1\xi}d\xi & \dots & \int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{n-1}\xi}d\xi \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn-1}] \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda(\omega_n\xi-1)}d\xi \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \dots & a_{ln-1} \\ [a_{l+11}] & \dots & [a_{l+1n-1}] \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ [a_{n1}] & \dots & [a_{nn-1}] \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+[b_{nn}]\lambda^{\varkappa_{n1}-\varkappa_{n0}} \left.\begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1n-1} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \dots a_{ln-1} \\ [a_{l+11}] & \dots [a_{l+1n-1}] \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ \int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_1\xi}d\xi & \dots \int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{n-1}\xi}d\xi \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ [a_{n-11}] & \dots [a_{n-1n-1}] \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= O\left(|\lambda|^{\sum\limits_{k=1}^{n}\varkappa_{k0}-\varkappa_{i0}+m-\frac{3}{2}+\max\{0,\varkappa_{n1}-\varkappa_{n0}\}}\left|e^{\lambda\omega_n}\right|\right).$$

На основании этих оценок, формул (9), (25) и предположений (11) в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ будем иметь:

$$|\Theta_i(\lambda)| = |\Delta_i(\lambda)/\Delta(\lambda)| \le C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_{i0}-\varkappa_{n1}+\varkappa_{n0}+\max\{0,\varkappa_{n1}-\varkappa_{n0}\}}, \quad i=\overline{l+1,n},$$

т. е. утверждение леммы и в этом случае доказано.

Таким образом, лемма полностью доказана. □

Следствие 1. *Если выполняются условия* (6)–(7), (10)–(11) *и* $\lambda \in \Pi_\varepsilon^\pm$*, то при* $|\lambda| \gg 1$ *справедливы оценки*

$$|\Theta_i(\lambda)| \le C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_i}, \quad i=\overline{l+1,n}, \tag{26}$$

где $\varkappa_i$ *определены перед формулировкой теоремы* 1.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ КРАТНОЙ ПОЛНОТЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\overline{h} := (\bar{h}_1(x), \dots, \bar{h}_m(x))^T \in L_2^m[0,1]$ и ортогональна всем производным m-цепочкам. Тогда на основании утверждения 2 и того факта, что столбцы

$$\left.\left(\frac{\partial^k\Phi_i(x,\lambda)}{\partial\lambda^k}, \dots, \frac{\partial^k(\lambda^{m-1}\Phi_i(x,\lambda))}{\partial\lambda^k}\right)^T\right|_{\lambda=\lambda_\nu},$$

где $i=\overline{l+1,n}$, $k=\overline{0,s}$, $m \in \{1,\dots,n\}$, являются производными m-цепочками для корневых функций, соответствующих с. з. λ_ν, которые являются нулями $\Delta(\lambda)$ кратности $s+1$, из (8)–(9) следует, что все особенности $\Theta_i(\lambda)$ устранимы. Согласно оценкам (26) и теореме Лиувилля, $\Theta_i(\lambda)$ есть полиномы степени $m-2-\varkappa_i$ при $m-2-\varkappa_i \ge 0$, которые можно записать в виде

$$\Theta_i(\lambda) \equiv \lambda^{m-2-\varkappa_i}(\overline{h},\zeta_{0i}) + \lambda^{m-3-\varkappa_i}(\overline{h},\zeta_{1i}) + \dots + (\overline{h},\zeta_{m-2-\varkappa_i i}),$$

где $\zeta_{ji} \in L_2[0,1]$ есть вполне определенные функции, а при $m-2-\varkappa_i < 0$ справедливы тождества

$$\Theta_i(\lambda) \equiv 0.$$

В случае $m-2-\varkappa_i \ge 0$ в дефектном подпространстве производных m-цепочек выберем подпространство H, ортогональное вектор-функциям $\zeta_{ki}(x)$, $k=\overline{0,m-2-\varkappa_i}$, $i=\overline{l+1,n}$. Пусть теперь $\overline{h} \in H$. Тогда $\Theta_i(\lambda) \equiv 0$ и, значит,

$$\Delta_i(\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^m \lambda^{j-1}\Phi_i(x,\lambda)h_j(x)\,dx \equiv 0, \quad i=\overline{l+1,n}. \tag{27}$$

Так как в силу утверждения 1 система функций $\Phi_{l+1},\dots,\Phi_n$ является системой линейно-независимых решений уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$, удовлетворяющих первым l краевым условиям (5), то из (27) следует тождество

$$\int_0^1 y(x,\lambda)\sum_{j=1}^m \lambda^{j-1}h_j(x)\,dx\equiv 0 \tag{28}$$

для любого решения $y(x,\lambda)$ уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$, удовлетворяющего первым l краевым условиям (5). Но эти решения находятся в виде

$$y(x,\lambda)=\gamma_1 e^{\lambda\omega_1 x}+\gamma_2 e^{\lambda\omega_2 x}+\dots+\gamma_n e^{\lambda\omega_n x}, \tag{29}$$

если удовлетворить первые l условий (5). Следовательно, приходим к следующей линейной однородной системе l уравнений для нахождения γ_j

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\gamma_j=0,\quad i=\overline{1,l}. \tag{30}$$

Эту систему можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{l-1} a_{ij}\gamma_j+a_{in}\gamma_n=-\sum_{j=l}^{n-1}a_{ij}\gamma_j,\quad i=\overline{1,l}.$$

Если в правой части последней системы взять любые $\gamma_l,\dots,\gamma_{n-1}$, то в силу того что по условию теоремы $\det(a_{ij})_{i\in\{1,\dots,l\}}^{j\in\{1,\dots,l-1,n\}}\neq 0$, можно однозначно определить $\gamma_1,\dots,\gamma_{l-1},\gamma_n$.

Следовательно, для любого $m\le n-l+1$ существует такая фундаментальная система решений $(\gamma_1^i,\gamma_2^i,\dots,\gamma_n^i)^T$, $i=\overline{1,n-l}$, системы (30), что

$$\Gamma_{m-1}=\begin{vmatrix} \gamma_{n-m+1}^1 & \cdots & \gamma_{n-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n-m+1}^{m-1} & \cdots & \gamma_{n-m+1}^{m-1}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{31}$$

и хотя бы одно из чисел γ_n^i, $i=\overline{1,n-l}$, отлично от нуля.

На основании (28)–(29) для такой фундаментальной системы решений системы (30) справедливы тождества

$$\sum_{j=1}^n\int_0^1 \gamma_j^i e^{\lambda\omega_j x}\sum_{k=1}^m \lambda^{k-1}h_k(x)\,dx\equiv 0,\quad i=\overline{1,n-l}. \tag{32}$$

Покажем, что из этих $n-l$ тождеств следует, что $h_k=0$ при $k=\overline{1,m}$. Будем следовать схеме рассуждений [8, с. 77–80] (см. также [9, с. 63–64]).

В силу предположений (7), согласно теории роста целых функций и того факта, что есть отличные от нуля γ_n^i из (32), следуют тождества

$$\sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^i\int_0^1 e^{\lambda\omega_j x}\sum_{k=1}^m \lambda^{k-1}h_k(x)\,dx\equiv 0,\quad i=\overline{1,n-l}, \tag{33}$$

$$\int_0^1 e^{\lambda\omega_j x}\sum_{k=1}^m \lambda^{k-1}h_k(x)\,dx\equiv 0. \tag{34}$$

Разложим $e^{\lambda\omega_j x}$ в ряд по степеням λ

$$e^{\lambda\omega_j x}=1+\lambda\omega_j x+\frac{(\lambda\omega_j x)^2}{2!}+\dots+\frac{(\lambda\omega_j x)^N}{N!}+\dots,$$

подставим в (33)–(34), представим левые части (33)–(34) в виде рядов по степеням λ и приравняем к нулю коэффициенты. Тогда при $N \geq N_0$, где N_0 — достаточно большое число, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_n^N}{N!}\displaystyle\int_0^1 x^N h_1(x)\,dx + \dots + \dfrac{\omega_n^{N-m+1}}{(N-m+1)!}\displaystyle\int_0^1 x^{N-m+1} h_m(x)\,dx = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{\gamma_j^i\omega_j^N}{N!}\int_0^1 x^N h_1(x)\,dx + \dots + \sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{\gamma_j^i\omega_j^{N-m+1}}{(N-m+1)!}\int_0^1 x^{N-m+1}h_m(x)\,dx = 0, \quad i = \overline{1, n-l}. \end{cases} \tag{35}$$

Это линейная алгебраическая система относительно m неизвестных $\int_0^1 x^N h_1(x)\,dx$, $\dots$, $\int_0^1 x^{N-m+1} h_m(x)\,dx$.

Возьмем первые m уравнений в (35) и рассмотрим соответствующую систему с квадратной матрицей:

$$D_N^m = \begin{vmatrix} \dfrac{\omega_n^N}{N!} & \dfrac{\omega_n^{N-1}}{(N-1)!} & \dots & \dfrac{\omega_n^{N-m+1}}{(N-m+1)!} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{\gamma_j^1\omega_j^N}{N!} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{\gamma_j^1\omega_j^{N-1}}{(N-1)!} & \dots & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{\gamma_j^1\omega_j^{N-m+1}}{(N-m+1)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{\gamma_j^{m-1}\omega_j^N}{N!} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{\gamma_j^{m-1}\omega_j^{N-1}}{(N-1)!} & \dots & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{\gamma_j^{m-1}\omega_j^{N-m+1}}{(N-m+1)!} \end{vmatrix}.$$

Преобразуем этот определитель следующим образом:

$$D_N^m = \pm\frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)!\dots(N-m+1)!}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & \omega_n & \dots & \omega_n^{m-2} & \omega_n^{m-1} \\ \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^1\omega_j^{N-m+1} & \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^1\omega_j^{N-m+2} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^1\omega_j^{N-1} & \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^1\omega_j^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^{m-1}\omega_j^{N-m+1} & \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^{m-1}\omega_j^{N-m+2} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^{m-1}\omega_j^{N-1} & \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^{m-1}\omega_j^N \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)!\dots(N-m+1)!}\sum_{k=1}^m(-1)^{k+1}\omega_n^{k-1}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^1\omega_j^{N-m+1} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^1\omega_j^{N-m+k-1} & \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^1\omega_j^{N-m+k+1} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^1\omega_j^N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^{m-1}\omega_j^{N-m+1} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^{m-1}\omega_j^{N-m+k-1} & \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^{m-1}\omega_j^{N-m+k+1} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j^{m-1}\omega_j^N \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)!\dots(N-m+1)!}\sum_{k=1}^m(-1)^{k+1}\omega_n^{k-1}\sum_{1\leq j_1,\dots,j_{k-1},j_{k+1},\dots,j_m\leq n-1}\omega_{j_1}^{N-m+1}\omega_{j_2}^{N-m+2}\dots\times$$

$$\times\,\omega_{j_{k-1}}^{N-m+k-1}\omega_{j_{k+1}}^{N-m+k+1}\dots\omega_{j_m}^N\begin{vmatrix} \gamma_{j_1}^1 & \dots & \gamma_{j_{k-1}}^1 & \gamma_{j_{k+1}}^1 & \dots & \gamma_{j_m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{j_1}^{m-1} & \dots & \gamma_{j_{k-1}}^{m-1} & \gamma_{j_{k+1}}^{m-1} & \dots & \gamma_{j_m}^{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)!\dots(N-m+1)!}\sum_{k=1}^m(-1)^{k+1}\omega_n^{k-1}\sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_{m-1}\leq n-1}\begin{vmatrix} \gamma_{i_1}^1 & \dots & \gamma_{i_{m-1}}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{i_1}^{m-1} & \dots & \gamma_{i_{m-1}}^{m-1} \end{vmatrix}\times$$

$$\times\sum_{\{j_1,j_2,\dots,j_{k-1},j_{k+1},\dots,j_m\}=\{i_1,i_2,\dots,i_{m-1}\}}(-1)^{I(j_1,\dots,j_{k-1},j_{k+1},\dots,j_m)}\omega_{j_1}^{N-m+1}\omega_{j_2}^{N-m+2}\dots\omega_{j_{k-1}}^{N-m+k-1}\times$$

$$\times\,\omega_{j_{k+1}}^{N-m+k+1}\dots\omega_{j_m}^N = \pm\frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)!\dots(N-m+1)!}\sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_{m-1}\leq n-1}\begin{vmatrix} \gamma_{i_1}^1 & \dots & \gamma_{i_{m-1}}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{i_1}^{m-1} & \dots & \gamma_{i_{m-1}}^{m-1} \end{vmatrix}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^m(-1)^{k+1}\omega_n^{k-1}\sum_{\{j_1,j_2,\dots,j_{k-1},j_{k+1},\dots,j_m\}=\{i_1,i_2,\dots,i_{m-1}\}}(-1)^{I(j_1,\dots,j_{k-1},j_{k+1},\dots,j_m)}\omega_{j_1}^{N-m+1}\omega_{j_2}^{N-m+2}\dots\times$$

$$\times\,\omega_{j_{k-1}}^{N-m+k-1}\omega_{j_{k+1}}^{N-m+k+1}\dots\omega_{j_m}^N = \pm\frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)!\dots(N-m+1)!}\times$$

$$\times \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_{m-1}\le n-1} \begin{vmatrix} \gamma^1_{i_1} & \dots & \gamma^1_{i_{m-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma^{m-1}_{i_1} & \dots & \gamma^{m-1}_{i_{m-1}} \end{vmatrix} \omega_{i_1}^{N-m+1}\omega_{i_2}^{N-m+1}\dots\omega_{i_{m-1}}^{N-m+1}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\omega_n^{k-1}\times$$

$$\times \sum_{\{j_1,j_2,\dots,j_{k-1},j_{k+1},\dots,j_m\}=\{i_1,i_2,\dots,i_{m-1}\}} (-1)^{I(j_1,\dots,j_{k-1},j_{k+1},\dots,j_m)}\omega^0_{j_1}\omega^1_{j_2}\dots\omega^{k-2}_{j_{k-1}}\omega^k_{j_{k+1}}\dots\omega^{m-1}_{j_m} =$$

$$= \pm\frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)!\dots(N-m+1)!}\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_{m-1}\le n-1} \begin{vmatrix} \gamma^1_{i_1} & \dots & \gamma^1_{i_{m-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma^{m-1}_{i_1} & \dots & \gamma^{m-1}_{i_{m-1}} \end{vmatrix} \omega_{i_1}^{N-m+1}\omega_{i_2}^{N-m+1}\dots\times$$

$$\times\, \omega_{i_{m-1}}^{N-m+1}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\omega_n^{k-1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega^{k-2}_{i_1} & \dots & \omega^{k-2}_{i_{k-1}} & \omega^{k-2}_{i_{k+1}} & \dots & \omega^{k-2}_{i_{m-1}} \\ \omega^{k}_{i_1} & \dots & \omega^{k}_{i_{k-1}} & \omega^{k}_{i_{k+1}} & \dots & \omega^{k}_{i_{m-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega^{m-1}_{i_1} & \dots & \omega^{m-1}_{i_{k-1}} & \omega^{m-1}_{i_k} & \dots & \omega^{m-1}_{i_{m-1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\frac{\omega_n^{N-m+1}}{N!(N-1)!\dots(N-m+1)!}\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_{m-1}\le n-1} \begin{vmatrix} \gamma^1_{i_1} & \dots & \gamma^1_{i_{m-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma^{m-1}_{i_1} & \dots & \gamma^{m-1}_{i_{m-1}} \end{vmatrix} \omega_{i_1}^{N-m+1}\omega_{i_2}^{N-m+1}\dots\times$$

$$\times\, \omega_{i_{m-1}}^{N-m+1}W(\omega_{i_1},\omega_{i_2},\dots,\omega_{i_{m-1}},\omega_n)(-1)^{m-1},$$

где $I(j_1,\dots,j_{k-1},j_{k+1},\dots,j_m)$ обозначает число инверсий перестановки индексов $(i_1,i_2,\dots,i_{m-1})$ таких, что $1\le i_1<i_2<\dots<i_{m-1}\le n-1$.

Отсюда, из (7) и из (31) можно заключить, что слагаемое, соответствующее $i_{m-1}=n-1$, $i_{m-2}=n-2$, …, $i_1=n-m+1$, при N достаточно большом мажорирует сумму всех других слагаемых, т. е. имеет место равенство

$$D_N^m = \pm\frac{\omega_n^{N-m+1}\omega_{n-1}^{N-m+1}\omega_{n-2}^{N-m+1}\dots\omega_{n-m+1}^{N-m+1}}{N!(N-1)!\dots(N-m+1)!}\Gamma_{m-1}W(\omega_{n-m+1},\dots,\omega_{n-1},\omega_n)\big(1+o(1)\big),$$

где $o(1)\to 0$ при $N\to\infty$. Следовательно, при $N\ge N_0$ получим $D_N^m\ne 0$. Тогда из системы (35) будем иметь при $N\ge N_0$

$$\int_0^1 x^N h_1(x)\,dx = \int_0^1 x^{N-1}h_2(x)\,dx = \dots = \int_0^1 h_m(x)x^{N-m+1}\,dx = 0.$$

А отсюда следует, что $h_k=0$ при $k=\overline{1,m}$ и, тем самым, теорема доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270) *и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ* (*проект* НШ-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // ДАН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.

2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.

3. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. Т. 26, № 4. С. 15–41 .

4. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М., 1983. № 9. С. 190–229.

5. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: дис. … д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973. 242 с.

6. *Шкаликов А. А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функциональный анализ. 1976. Т. 10, № 4. С. 69–80.

7. *Хромов А. П.* О порождающих функциях вольтерровых операторов // Мат. сборник. 1977. Т. 102 (144), № 3. С. 457–472.

8. *Вагабов А. И.* Разложения в ряды Фурье по главным функциям дифференциальных операторов и их применения: дис. … д-ра физ.-мат. наук. М., 1988. 201 с.

9. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д, 1994. 160 с.

10. *Рыхлов В. С.* О кратной неполноте собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче // Докл. Российской академии естественных наук. 2004. № 4. С. 72–79.

11. *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2009. № 6. С. 42–53.
12. *Рыхлов В. С.* О кратной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 24–34.
13. *Рыхлов В. С.* О свойствах собственных функций одного квадратичного пучка дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 31–44.
14. *Шигаева О. В.* Кратная неполнота системы собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 50–59.

УДК 517.946

О КЛАССИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ БИПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

К. И. Худавердиев, М. Н. Гейдарова

Бакинский государственный университет,
кафедра математики
E-mail: karlenkhudaverdiyev@yahoo.com

Изучены вопросы существования и единственности классического решения одномерной смешанной задачи с однородными граничными условиями типа Рикье для одного класса полулинейных бипараболических уравнений четвёртого порядка. Методом априорных оценок доказана теорема существования в целом классического решения изучаемой смешанной задачи.

Ключевые слова: бипараболическое уравнение, классическое решение, существование в малом, существование в целом, априорная оценка.

On Classical Solvability of One-Dimensional Mixed Problem for Fourth Order Semilinear Biparabolic Equations

K. I. Khudaverdiyev, M. N. Heydarova

Baku State University,
Chair of Mathematics
E-mail: karlenkhudaverdiyev@yahoo.com

Existence and uniqueness of classical solution of one-dimensional mixed problem with Riquier type homogenous boundary conditions for one class of fourth order semilinear biparabolic equations are studied. A priori estimates method is used to prove the existence in large theorem for classical solution of mixed problem under consideration.

Key words: biparabolic equation, classical solution, existence in small, existence in large, a priori estimate.

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению вопросов существования (как в малом, так и в целом) и единственности классического решения следующей одномерной смешанной задачи:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)) \tag{1}$$

$$(0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant x\leqslant \pi),$$

$$u(0,x)=\varphi(x)\quad (0\leqslant x\leqslant \pi),\quad u_t(0,x)=\psi(x)\quad (0\leqslant x\leqslant \pi), \tag{2}$$

$$u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0\quad (0\leqslant t\leqslant T), \tag{3}$$

где $0<T<+\infty$, F, φ, ψ — заданные функции, а $u(t,x)$ — искомая функция, причём под классическим решением задачи (1)–(3) понимаем функцию $u(t,x)$, непрерывную в замкнутой области $[0,T]\times[0,\pi]$ вместе с производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющую всем условиям (1)–(3) в обычном смысле.

Отметим некоторые работы, в определённом смысле связанные с задачей (1)–(3).

В 1969 году в работе [1] Ю. И. Ковача рассмотрена задача (1)–(3) в случае, когда $F=F(t,x,u(t,x))$ и специальным методом последовательных приближений доказана теорема существования и единственности ее классического решения.

В том же году в работе [2] Ю. И. Ковача рассмотрена задача (1)–(3) в случае, когда $F=F(t,x,u(t-\tau(t,x),x))$, где $\tau(t,x)\geqslant 0$; принципом сжатых отображений доказано существование в малом ее классического решения.