УДК 517.927.25

О СВОЙСТВАХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.С. Рыхлов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

Рассматривается вырожденный обыкновенный дифференциальный квадратичный пучок второго порядка с постоянными коэффициентами. Изучается случай, когда корни характеристического уравнения лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от этого начала. Исследуются свойства системы его собственных функций в пространствах $L_2[0,\sigma]$, $\sigma > 0$. Доказываются критерии однократной полноты и минимальности этой системы, а также находятся достаточные условия однократной полноты и минимальности.

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный пучок операторов, квадратичный пучок операторов, вырожденный пучок операторов, второй порядок, постоянные коэффициенты, собственные функции, однократная полнота, однократная минимальность, достаточные условия.

On Properties of the Eigenfunctions of a Quadratic Pencil of the Second Order Differential Operators

V.S. Rykhlov

The degenerated second order ordinary differential quadratic pencil with constant coefficients is considered. The case is studied, when the roots of characteristic equation lie on a straight line coming through the origin and on the both side of the origin. Properties of the system of its eigenfunctions in the spaces $L_2[0,\sigma]$, $\sigma > 0$ is investigated. Criteria of one-fold completeness and minimality of this system are proved and sufficient conditions of one-fold completeness and minimality are found.

Key words: ordinary differential pencil of operators, quadratic pencil of operators, degenerated pencil of operators, second order, constant coefficients, eigenfunctions, one-fold completeness, one-fold minimality, sufficient conditions.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ пучок операторов $L(\lambda)$, определяемый однородным дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$

и двухточечными однородными краевыми условиями:

$$U_\nu(y,\lambda) = U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda) :=$$
$$:= \Big(\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)\Big) + \Big(\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)\Big) = 0, \quad \nu = 1,2, \qquad (1)$$

где $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$. В случае $\alpha_{\nu 1} = \beta_{\nu 1} = 0$ считаем, что краевое условие имеет вид

$$\alpha_{\nu 2} y(0) + \beta_{\nu 2} y(1) = 0.$$

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$ и предположим, что всюду в дальнейшем выполняется основное предположение: *корни ω_1, ω_2 отличны от нуля и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от этого начала.* Не нарушая общности, можно считать:

1^0) $\omega_2 < 0 < \omega_1$.

Далее будет использоваться обозначение $\tau := |\omega_2|/\omega_1$. Ясно, что $\tau > 0$.

Введем функции $y_1(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_2 x)$. При $\lambda \neq 0$ эти функции являются линейно независимыми решениями уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$.

Далее для определенности считаем в (1) $\alpha_{\nu 1} \neq 0$, $\beta_{\nu 1} \neq 0$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются. Обозначим $v_{\nu j} = U_{\nu 0}(y_j,\lambda)/\lambda$, $w_{\nu j} = \exp(-\lambda\omega_j)U_{\nu 1}(y_j,\lambda)/\lambda$ $(\nu, j = 1,2)$ и $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$ $(j = 1,2)$. Пусть $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$.

Характеристический определитель пучка имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1,\lambda) & U_1(y_2,\lambda) \\ U_2(y_1,\lambda) & U_2(y_2,\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} v_{11}+e^{\lambda\omega_1}w_{11} & v_{12}+e^{\lambda\omega_2}w_{12} \\ v_{21}+e^{\lambda\omega_1}w_{21} & v_{22}+e^{\lambda\omega_2}w_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda^2\bigl(a_{\bar1\bar2}+e^{\lambda\omega_1}a_{1\bar2}+e^{\lambda\omega_2}a_{\bar12}+e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}a_{12}\bigr) = \lambda^2\Delta_0(\lambda).$$

Предположим, что всюду в дальнейшем выполняется условие

2^0) $a_{\bar1\bar2}\neq 0$, $a_{1\bar2}\neq 0$, $a_{\bar12}=a_{12}=0$.

При этом условии

$$\Delta_0(\lambda)=a_{\bar1\bar2}+e^{\lambda\omega_1}a_{1\bar2}, \tag{2}$$

и, следовательно, рассматриваемый пучок $L(\lambda)$ не является регулярным [1, с. 66–67] и, более того, не является нормальным по терминологии работы [2].

Решается задача нахождения условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует двукратная полнота системы собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$. При отсутствии такой полноты естественно ставить вопрос о двукратной полноте в пространстве $L_2[0,\sigma]$ при $0<\sigma<1$ или об однократной полноте в пространстве $L_2[0,1]$, или, хотя бы, в пространстве $L_2[0,\sigma]$ при $0<\sigma<1$. При исследовании полноты системы с.п.ф. естественно возникает задача о минимальности этой системы в указанных пространствах и, более того, о безусловной базисности или, что почти одно и то же, о базисности Рисса.

Отметим, что в случае $0<\omega_1<\omega_2$ и при условии $a_{1\bar2}\neq 0$, $a_{\bar12}\neq 0$, $a_{\bar1\bar2}=a_{12}=0$ свойства с.п.ф. детально исследовались в [3], а при условии $\mathbf{2}^0$ в [4]. В случае же $\omega_2<0<\omega_1$ и выполнении условия $\mathbf{2}^0$ двукратная полнота системы с.п.ф. пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,\sigma]$ детально исследовалась в [5,6] и анонсировалась в [7].

Из (2) следует, что уравнение $\Delta_0(\lambda)=0$ имеет счетное число корней, которые выражаются формулой

$$\lambda_k=(2k\pi i+d_0)/\omega_1, \qquad k\in\mathbb{Z}, \tag{3}$$

где $d_0:=\ln_0 c_0$ ($\ln_0$ есть фиксированная ветвь натурального логарифма, такая что $\ln_0 1=0$), $c_0:=-a_{\bar1\bar2}/a_{1\bar2}$.

Обозначим $\Lambda:=\{\lambda_k \mid k\in\mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda\setminus\{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$, которые являются простыми. Точка $\lambda=0$ может быть с.з., а может и не быть, даже если $0\in\Lambda$. Имеет место равенство

$$e^{\lambda\omega_1}=c_0, \qquad \lambda\in\Lambda. \tag{4}$$

В качестве порождающей функции для системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ возьмем порождающую функцию, предложенную в [8]:

$$\gamma(x,\lambda,\Gamma)=\begin{vmatrix} 0 & y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \\ -\Gamma & V_1+e^{\lambda\omega_1}W_1 & V_2+e^{\lambda\omega_2}W_2 \end{vmatrix}, \qquad \lambda\neq 0,$$

где вектор $\Gamma=(\gamma_1,\gamma_2)^T\neq 0$ является параметром. В [8, Lemma 1, Lemma 2] исследовалась возможность брать в качестве Γ векторы V_j и W_j $(j=1,2)$.

Далее будут использоваться альтернативные условия:

3^0) $W_2\neq 0$ или: $W_2=0$ и $a_{1\bar1}=0$;

4^0) $W_2=0$ и $a_{1\bar1}\neq 0$.

В [6] показано, что если выполняется условие $\mathbf{3}^0$, то функция $y(x,\lambda):=\exp(\lambda\omega_1 x)$ является порождающей для системы собственных функций (с.ф.) пучка $L(\lambda)$ при $\lambda\neq 0$. Если же выполняется условие $\mathbf{4}^0$, то порождающей функцией является функция

$$y(x,\lambda):=\exp(\lambda\omega_1 x)+b_0\exp(\lambda(\omega_1+\omega_2 x)), \qquad b_0=\frac{a_{1\bar1}}{a_{\bar1\bar2}}\neq 0. \tag{5}$$

Обозначим $Y := \{y(x,\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$. Если $\lambda = 0 \notin \Lambda$, то система Y совпадает с системой с.ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих с.з. $\lambda \in \Lambda$. В случае выполнения условия $\mathbf{3}^0$ система Y совпадает с обычной тригонометрической системой в экспоненциальной форме и вопрос о полноте системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$ в этом случае является тривиальным. В дальнейшем считаем, что выполняется условие $\mathbf{4}^0$, то есть порождающая функция имеет вид (5). В этом случае, если $\lambda = 0 \in \Lambda$, ситуация сложнее. При $1+b_0 \neq 0$ функция $y(x,0) \equiv 1+b_0$ может не быть с.ф. пучка $L(\lambda)$, а в случае $1+b_0 = 0$ имеем $y(x,0) = \mathbb{O}(x) \equiv 0$ и система Y заведомо не является минимальной и базисом ни в каком пространстве $L_2[0,\sigma]$, где $\sigma > 0$. Но с точки зрения полноты и неполноты с бесконечным дефектом системы Y и $Y \backslash \{\mathbb{O}\}$ эквивалентны.

В [6] было найдено значение параметра $\hat{\sigma} = \frac{1}{1+\tau}$, такое что система Y 2-кратно полна в пространстве $L_2[0,\sigma]$ при $\sigma = \hat{\sigma}$ и 2-кратно неполна с бесконечным дефектом при $\sigma > \hat{\sigma}$. Кроме того, в [7] были сформулированы условия, при которых имеет место 1-кратная полнота системы Y в пространстве $L_2[0,\sigma]$.

В данной статье формулируются и доказываются критерии 1-кратной полноты и минимальности системы Y в пространстве $L_2[0,\sigma]$, а также достаточные условия 1-кратной полноты и минимальности этой системы в таких пространствах.

2. КРИТЕРИИ ОДНОКРАТНОЙ ПОЛНОТЫ И МИНИМАЛЬНОСТИ

Обозначим дефектное подпространство системы Y в $L_2[0,\sigma]$ через $\mathfrak{N}_\sigma$, то есть $\mathfrak{N}_\sigma := L_2[0,\sigma] \ominus \mathfrak{M}_\sigma$, где $\mathfrak{M}_\sigma$ есть замыкание линейной оболочки системы Y.

Чтобы охарактеризовать $\mathfrak{N}_\sigma$, рассмотрим операторы $A_\sigma \in L_2[0,\sigma] \to L_2[0,1]$, $B_\sigma \in L_2[0,\sigma] \to$ $\to L_2[1-\sigma\tau,1]$ и $C_\rho \in L_2[1-\rho,1] \to L_2[0,1]$, определяемые формулами:

$$(A_\sigma f)(x) := \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{l} \bar{c}_0^j f(x+j), & x \in [0,\sigma-l]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l-1} \bar{c}_0^j f(x+j), & x \in (\sigma-l,1]; \end{cases} \tag{6}$$

$$(B_\sigma f)(x) := f\Big(\frac{1-x}{\tau}\Big), \quad x \in [1-\sigma\tau,1]; \tag{7}$$

$$(C_\rho f)(x) := \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f(x-j), & x \in [0,m+1-\rho]; \\ \sum\limits_{j=0}^{m} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f(x-j), & x \in (m+1-\rho,1]; \end{cases} \tag{8}$$

где $l, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и удовлетворяют неравенствам $l < \sigma \le l+1$, $m < \rho \le m+1$.

Лемма 1. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, *то справедливо следующее равенство:* $\mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\sigma^0$, *где*

$$\mathfrak{N}_\sigma^0 := \{f \in L_2[0,\sigma] \mid A_\sigma f + \frac{\bar{b}_0}{\tau} C_{\sigma\tau} B_\sigma f = 0\}.$$

Доказательство. 1) Пусть $f \in \mathfrak{N}_\sigma$, то есть $f \in L_2[0,\sigma]$ и $f \perp Y$. Из (5) следует

$$\int_0^\sigma y(x,\lambda)\overline{f(x)}\,dx = \int_0^\sigma e^{\lambda\omega_1 x}\overline{f(x)}\,dx + \int_0^\sigma b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2 x)}\overline{f(x)}\,dx = 0, \quad \lambda \in \Lambda. \tag{9}$$

Преобразуем каждый интеграл в правой части (9) отдельно.

Для первого интеграла в случае, когда при некотором $l = 0,1,2,\ldots$ выполняется неравенство $l < \sigma \le l+1$, будем иметь

$$\int_0^\sigma e^{\lambda\omega_1 x}\overline{f(x)}\,dx = \left(\int_0^1 + \int_1^2 + \cdots + \int_s^{s+1} + \cdots + \int_{l-1}^{l} + \int_l^\sigma\right) e^{\lambda\omega_1 x}\overline{f(x)}\,dx. \tag{10}$$

Используя соотношение (4), преобразуем интегралы в (10) при $\lambda \in \Lambda$:

$$\int\limits_{s}^{s+1} e^{\lambda\omega_1 x}\overline{f(x)}\,dx = \int\limits_0^1 e^{\lambda\omega_1 x}e^{\lambda\omega_1 s}\overline{f(x+s)}\,dx = \int\limits_0^1 e^{\lambda\omega_1 x}c_0^s\overline{f(x+s)}\,dx, \quad s=\overline{0,l-1}; \tag{11}$$

$$\int\limits_{l}^{\sigma} e^{\lambda\omega_1 x}\overline{f(x)}\,dx = \int\limits_0^{\sigma-l} e^{\lambda\omega_1 x}e^{\lambda\omega_1 l}\overline{f(x+l)}\,dx = \int\limits_0^{\sigma-l} e^{\lambda\omega_1 x}c_0^l\overline{f(x+l)}\,dx. \tag{12}$$

Подставив (11) и (12) в (10), получим при $\lambda\in\Lambda$

$$\int\limits_0^{\sigma} e^{\lambda\omega_1 x}\overline{f(x)}\,dx = \int\limits_0^1 e^{\lambda\omega_1 x}\sum_{s=0}^{l-1}c_0^s\overline{f(x+s)}\,dx + \int\limits_0^{\sigma-l} e^{\lambda\omega_1 x}c_0^l\overline{f(x+l)}\,dx = \int\limits_0^1 e^{\lambda\omega_1 x}\overline{(A_\sigma f)(x)}\,dx. \tag{13}$$

Для второго интеграла в (9) в случае, когда при некотором $m=0,1,2,\ldots$ выполняется неравенство $-m<1-\tau\sigma\le -m+1$ или, что эквивалентно, $m<\tau\sigma\le m+1$, будем иметь при $\lambda\in\Lambda$

$$\int\limits_0^{\sigma} b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2 x)}\overline{f(x)}\,dx = \int\limits_{1-\tau\sigma}^{1} e^{\lambda\omega_1 x}\frac{b_0}{\tau}\overline{f\left(\frac{1-x}{\tau}\right)}\,dx =$$

$$= \left(\int\limits_0^1 + \int\limits_{-1}^{0} + \cdots + \int\limits_{-s}^{-s+1} + \cdots + \int\limits_{-m+1}^{-m+2} + \int\limits_{1-\tau\sigma}^{-m+1}\right) e^{\lambda\omega_1 x}\frac{b_0}{\tau}\overline{f\left(\frac{1-x}{\tau}\right)}\,dx. \tag{14}$$

Используя соотношение (4), преобразуем интегралы в (14) при $\lambda\in\Lambda$:

$$\int\limits_{-s}^{-s+1} e^{\lambda\omega_1 x}\frac{b_0}{\tau}\overline{f\left(\frac{1-x}{\tau}\right)}\,dx = \int_0^1 e^{\lambda\omega_1 x}e^{-\lambda\omega_1 s}\frac{b_0}{\tau}\overline{f\left(\frac{s+1-x}{\tau}\right)}\,dx =$$

$$= \int_0^1 e^{\lambda\omega_1 x}\frac{1}{c_0^s}\frac{b_0}{\tau}\overline{f\left(\frac{s+1-x}{\tau}\right)}\,dx, \quad s=\overline{0,m-1}; \tag{15}$$

$$\int\limits_{1-\tau\sigma}^{-m+1} e^{\lambda\omega_1 x}\frac{b_0}{\tau}\overline{f\left(\frac{1-x}{\tau}\right)}\,dx = \int_{m+1-\tau\sigma}^{1} e^{\lambda\omega_1 x}e^{-\lambda\omega_1 m}\frac{b_0}{\tau}\overline{f\left(\frac{m+1-x}{\tau}\right)}\,dx =$$

$$= \int_{m+1-\tau\sigma}^{1} e^{\lambda\omega_1 x}\frac{1}{c_0^m}\frac{b_0}{\tau}\overline{f\left(\frac{m+1-x}{\tau}\right)}\,dx. \tag{16}$$

Подставив (15) и (16) в (14), получим при $\lambda\in\Lambda$

$$\int\limits_0^{\sigma} b_0 e^{\lambda(\omega_1+\omega_2 x)}\overline{f(x)}\,dx = \int_0^1 e^{\lambda\omega_1 x}\frac{b_0}{\tau}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{1}{c_0^s}\overline{f\left(\frac{s+1-x}{\tau}\right)}\,dx +$$

$$+ \int_{m+1-\tau\sigma}^{1} e^{\lambda\omega_1 x}\frac{b_0}{\tau}\frac{1}{c_0^m}\overline{f\left(\frac{m+1-x}{\tau}\right)}\,dx = \int_0^1 e^{\lambda\omega_1 x}\frac{b_0}{\tau}\overline{\left(C_{\sigma\tau}B_\sigma f\right)(x)}\,dx. \tag{17}$$

Подставив (13) и (17) в (9), будем иметь при $\lambda\in\Lambda$

$$\int\limits_0^{\sigma} y(x,\lambda)\overline{f(x)}\,dx = \int_0^1 e^{\lambda\omega_1 x}\left(\overline{(A_\sigma f)(x)} + \frac{b_0}{\tau}\overline{(C_{\sigma\tau}B_\sigma f)(x)}\right)\,dx = 0. \tag{18}$$

С учетом полноты системы $\{\exp(\lambda\omega_1 x)\mid\lambda\in\Lambda\}$ в $L_2[0,1]$ из (18) следует, что f является решением уравнения

$$A_\sigma f + \frac{\bar b_0}{\tau}C_{\sigma\tau}B_\sigma f = 0, \tag{19}$$

то есть $f \in \mathfrak{N}^0_\sigma$. Таким образом, доказано включение

$$\mathfrak{N}_\sigma \subset \mathfrak{N}^0_\sigma. \tag{20}$$

2) Пусть $f \in \mathfrak{N}^0_\sigma$, то есть выполняется соотношение (19). Но тогда выполняется равенство

$$\int_0^1 e^{\lambda\omega_1 x}\left(\overline{(A_\sigma f)(x)} + \frac{b_0}{\tau}\overline{(C_{\sigma\tau}B_\sigma f)(x)}\right)dx = 0 \tag{21}$$

для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, а следовательно, и для всех $\lambda \in \Lambda$. Очевидно, при $\lambda \in \Lambda$ равенство (21) эквивалентно (9). Следовательно, $f \perp Y$, а это и означает, что $f \in \mathfrak{N}_\sigma$. Таким образом, получено, что $\mathfrak{N}^0_\sigma \subset \mathfrak{N}_\sigma$. Отсюда с учетом включения (20) получаем утверждение леммы. Лемма доказана. □

Из данной леммы вытекает

Теорема 2. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, *то система* Y *1-кратно полна в пространстве* $L_2[0,\sigma]$ *тогда и только тогда, когда уравнение* (19) *имеет в этом пространстве только тривиальное решение.* □

Что касается 1-кратной минимальности, то имеет место

Теорема 3. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, *то система* Y *1-кратно минимальна в пространстве* $L_2[0,\sigma]$ *тогда и только тогда, когда неоднородное уравнение*

$$A_\sigma z + \frac{\bar{b}_0}{\tau}C_{\sigma\tau}B_\sigma z = g_n, \tag{22}$$

где $g_n(x) := \exp\big((2n\pi i - \bar{d}_0)x\big)$, *для каждого* $n \in \mathbb{Z}$ *имеет хотя бы одно решение* $z_n(x)$ *в пространстве* $L_2[0,\sigma]$. *При этом система* $Z := \{z_n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *будет биортогональной к системе* Y *в пространстве* $L_2[0,\sigma]$.

Доказательство. В доказательстве леммы 1 для $k \in \mathbb{Z}$ получено равенство (см. (18))

$$\int\limits_0^\sigma y(x,\lambda_k)\overline{f(x)}\,dx = \int\limits_0^1 e^{\lambda_k\omega_1 x}\left(\overline{(A_\sigma f)(x)} + \frac{b_0}{\tau}\overline{(C_{\sigma\tau}B_\sigma f)(x)}\right)dx. \tag{23}$$

Если z_n является решением уравнения (22), то, учитывая формулу (3), будем иметь

$$\int_0^\sigma y(x,\lambda_k)z_n(x)\,dx = \delta_{kn}, \quad \forall\, k,n \in \mathbb{Z}.$$

То есть система Z является биортогональной к системе Y. А это означает, что система Y минимальна.

Обратно, если система Y минимальна, то существует биортогональная система $Z = \{z_n(x) :\ n \in \mathbb{Z}\}$. Тогда из (23) и (3) получим

$$\delta_{kn} = \int\limits_0^1 e^{2k\pi i x}\left(\overline{(A_\sigma z_n)(x)} + \frac{b_0}{\tau}\overline{(C_{\sigma\tau}B_\sigma z_n)(x)}\right)e^{d_0 x}\,dx, \tag{24}$$

где $k,n \in \mathbb{Z}$. Учитывая теперь, что $\delta_{kn} = \int\limits_0^1 e^{2k\pi i x}e^{-2n\pi i x}\,dx$, и пользуясь тем, что система $\{\exp(2k\pi i x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ полна в $L_2[0,1]$, из (24) получим

$$(A_\sigma z_n)(x) + \frac{b_0}{\tau}(A_{\sigma\tau}Bz_n)(x) = e^{(2n\pi i - \bar{d}_0)x}, \qquad x \in [0,1].$$

А это и означает, что функции z_n, $n \in \mathbb{Z}$, являются решениями уравнения (22). Тем самым теорема 3 доказана. □

Рассмотрим в $L_2[0,\sigma]$ уравнение

$$A_\sigma f + \frac{\bar{b}_0}{\tau}C_{\sigma\tau}B_\sigma f = g, \tag{25}$$

где $g \in L_2[0,1]$ есть заданная функция. Уравнения (19) и (22) есть частные случаи этого уравнения. Из теорем 2 и 3 видно, что уравнение (25) является основным при исследовании полноты и минимальности системы Y в пространстве $L_2[0,\sigma]$. Из формул (6)–(8) непосредственно вытекает

Лемма 2. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$ *и* $l, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *таковы, что* $l < \sigma \le l+1$, $m < \sigma\tau \le m+1$, *то уравнение* (25) *имеет вид:*

1) *при* $\sigma - l \le m + 1 - \sigma\tau$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{l} \bar{c}_0^j f(x+j) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f\left(\frac{j+1-x}{\tau}\right) = g(x), & \text{п.в.} \quad x \in [0, \sigma - l]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l-1} \bar{c}_0^j f(x+j) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f\left(\frac{j+1-x}{\tau}\right) = g(x), & \text{п.в.} \quad x \in (\sigma - l, m + 1 - \sigma\tau]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l-1} \bar{c}_0^j f(x+j) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f\left(\frac{j+1-x}{\tau}\right) = g(x), & \text{п.в.} \quad x \in (m + 1 - \sigma\tau, 1]; \end{cases} \tag{26}$$

2) *при* $m + 1 - \sigma\tau < \sigma - l$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{l} \bar{c}_0^j f(x+j) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f\left(\frac{j+1-x}{\tau}\right) = g(x), & \text{п.в.} \quad x \in [0, m + 1 - \sigma\tau]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l} \bar{c}_0^j f(x+j) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f\left(\frac{j+1-x}{\tau}\right) = g(x), & \text{п.в.} \quad x \in (m + 1 - \sigma\tau, \sigma - l]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l-1} \bar{c}_0^j f(x+j) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f\left(\frac{j+1-x}{\tau}\right) = g(x), & \text{п.в.} \quad x \in (\sigma - l, 1]. \end{cases} \tag{27}$$

3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОКРАТНОЙ ПОЛНОТЫ

Справедливы следующие достаточные условия однократной полноты системы Y в пространстве $L_2[0,\sigma]$.

Теорема 4. *Если выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$, *то для однократной полноты системы* Y *в пространстве* $L_2[0,\sigma]$ *достаточно выполнения одного из условий:*

а) $0 < \sigma \le \min\{1, \frac{1}{\tau}\}$, $0 < \tau < +\infty$*; причем при* $\tau = 1$ *и* $\frac{1}{2} < \sigma \le 1$ *должно быть* $b_0 \ne \pm 1$*;*

б) $|b_0|^2 < \tau$ *в случае* $\frac{1}{\tau} < \sigma \le \frac{2}{1+\tau}$, $\tau > 1$*;*

в) $|b_0|^2 \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{1}{|c_0|^{2j}} < \tau$ *в случае, если при некотором натуральном* k *выполняются неравенства* $\frac{k+1}{1+\tau} < \sigma \le \min\left\{1, \frac{k+2}{1+\tau}\right\}$, $\tau > k$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (19). Покажем, что при условиях теоремы это уравнение имеет только тривиальное решение. Тогда утверждение доказываемой теоремы будет следовать из теоремы 1.

Пусть выполняется условие а) теоремы. В этом случае $0 < \sigma \le 1$ ($l = 0$) и $0 < \sigma\tau \le 1$ ($m = 0$). Здесь l и m параметры, которые фигурируют в лемме 2.

Если $\sigma \le 1 - \sigma\tau$ или, что эквивалентно, $\sigma \le \frac{1}{1+\tau}$, то уравнение (19) имеет вид (26) при $m = l = 0$ и $g = 0$ или, конкретнее,

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in [0,\sigma]; \\ \frac{\bar{b}_0}{\tau} f\left(\frac{1-x}{\tau}\right) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in (1 - \sigma\tau, 1]. \end{cases}$$

Отсюда сразу получаем, что $f(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,\sigma]$. Следовательно, в этом случае уравнение (19) имеет только тривиальное решение, и система Y полна в пространстве $L_2[0,\sigma]$.

Пусть теперь $1 - \sigma\tau < \sigma$ или, что эквивалентно, $\frac{1}{1+\tau} < \sigma$. В этом случае уравнение (19) имеет вид (27) при $m = l = 0$ и $g = 0$ или, конкретнее,

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in [0, 1 - \sigma\tau]; \\ f(x) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} f\left(\frac{1-x}{\tau}\right) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in (1 - \sigma\tau, \sigma]; \\ \frac{\bar{b}_0}{\tau} f\left(\frac{1-x}{\tau}\right) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in (\sigma, 1]. \end{cases} \tag{28}$$

Далее рассмотрим отдельно три случая.

1. Пусть $0 < \tau < 1$. В этом случае $\frac{1}{1+\tau} < \sigma \le \min\{1, \frac{1}{\tau}\} = 1$. Будем обозначать далее для краткости $\mu_0 = \frac{1-\sigma}{\tau}$, $\sigma_0 := \sigma$, $\sigma_{n+1} = 1 - \sigma_n \tau$, $n = 0, 1, \ldots$. Так как $\sigma_1 - \mu_0 = \frac{\tau^2-1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau+1} - \sigma\right) > 0$, то $\sigma_1 > \mu_0$. С учетом этого неравенства, сделав замену переменного $\frac{1-x}{\tau} = \xi$ в третьем соотношении в (28), получим

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{п.в.} \ \ x \in [0, \sigma_1]; \\ f(x) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} f\left(\frac{1-x}{\tau}\right) = 0, & \text{п.в.} \ \ x \in (\sigma_1, \sigma]. \end{cases}$$

Делая замену переменного $\frac{1-x}{\tau} = \xi$ во втором соотношении, будем иметь

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{п.в.} \ \ x \in [0, \sigma_1]; \\ f(1 - \xi\tau) = -\frac{\bar{b}_0}{\tau} f(\xi), & \text{п.в.} \ \ \xi \in [\mu_0, \sigma]. \end{cases}$$

Но так как $f(\xi) = 0$ для п.в. $\xi \in [\mu_0, \sigma_1]$, то в результате на первом шаге получим

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{п.в.} \ \ x \in [0, \sigma_1]; \\ f(x) = 0, & \text{п.в.} \ \ x \in [\sigma_2, \sigma_0]; \\ f(1 - \xi\tau) = -\frac{\bar{b}_0}{\tau} f(\xi), & \text{п.в.} \ \ \xi \in (\sigma_1, \sigma_0]. \end{cases} \tag{29}$$

При этом справедливы неравенства

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_0. \tag{30}$$

В самом деле, так как в рассматриваемом случае выполняется неравенство $\sigma_1 < \sigma_0$, то имеем $\sigma_1 := 1 - \sigma_0\tau < \sigma_2 := 1 - \sigma_1\tau$. Кроме того, так как справедливы соотношения $\sigma_0 - \sigma_2 = \sigma - 1 + (1 - \sigma\tau)\tau = (1 - \tau^2)\left(\sigma - \frac{1}{1+\tau}\right) > 0$, то $\sigma_0 > \sigma_2$.

Далее, в силу того что $f(x) = 0$ для п.в. $x \in [\sigma_2, \sigma]$ и $\sigma_1 < \sigma_2$ (см. (30)), из (29) получим на втором шаге

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{п.в.} \ \ x \in [0, \sigma_3]; \\ f(x) = 0, & \text{п.в.} \ \ x \in [\sigma_2, \sigma_0]; \\ f(1 - \xi\tau) = -\frac{\bar{b}_0}{\tau} f(\xi), & \text{п.в.} \ \ \xi \in (\sigma_1, \sigma_2). \end{cases} \tag{31}$$

При этом справедливы неравенства

$$\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_0. \tag{32}$$

В самом деле, так как $\sigma_2 < \sigma_0$ (см. (30)), то $\sigma_1 := 1 - \sigma_0\tau < \sigma_3 := 1 - \sigma_2\tau$. С другой стороны, так как $\sigma_1 < \sigma_2$ (см. (30)), то $\sigma_3 := 1 - \sigma_2\tau < \sigma_2 := 1 - \sigma_1\tau$.

Далее, в силу того что $f(x) = 0$ для п.в. $x \in (\sigma_1, \sigma_3]$ и $\sigma_3 < \sigma_2$ (см. (32)), из (31) получим на третьем шаге

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{п.в.} \ \ x \in [0, \sigma_3]; \\ f(x) = 0, & \text{п.в.} \ \ x \in [\sigma_4, \sigma_0]; \\ f(1 - \xi\tau) = -\frac{\bar{b}_0}{\tau} f(\xi), & \text{п.в.} \ \ \xi \in (\sigma_3, \sigma_2). \end{cases} \tag{33}$$

При этом справедливы неравенства $\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_4 < \sigma_2 < \sigma_0$. В самом деле, так как $\sigma_3 < \sigma_2$ (см. (32)), то $\sigma_3 := 1 - \sigma_2\tau < \sigma_4 := 1 - \sigma_3\tau$. С другой стороны, так как $\sigma_1 < \sigma_3$ (см. (32)), то $\sigma_4 := 1 - \sigma_3\tau < \sigma_2 := 1 - \sigma_1\tau$.

Продолжая аналогичные рассуждения, на $(2n-1)$-м шаге получим

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{п.в.} \ \ x \in [0, \sigma_{2n-1}]; \\ f(x) = 0, & \text{п.в.} \ \ x \in [\sigma_{2n-2}, \sigma_0]; \\ f(1 - \xi\tau) = -\frac{\bar{b}_0}{\tau} f(\xi), & \text{п.в.} \ \ \xi \in (\sigma_{2n-3}, \sigma_{2n-2}), \end{cases} \tag{34}$$

при этом справедливы неравенства

$$\sigma_1 < \sigma_3 < \cdots < \sigma_{2n-1} < \sigma_{2n-2} < \cdots < \sigma_2 < \sigma_0,$$

а на $2n$-м шаге получим

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in [0, \sigma_{2n-1}]; \\ f(x) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in [\sigma_{2n}, \sigma_0]; \\ f(1-\xi\tau) = -\frac{\bar{b}_0}{\tau} f(\xi), & \text{п.в.} \quad \xi \in (\sigma_{2n-1}, \sigma_{2n-2}), \end{cases} \tag{35}$$

при этом справедливы неравенства

$$\sigma_1 < \sigma_3 < \dots < \sigma_{2n-1} < \sigma_{2n} < \dots < \sigma_2 < \sigma_0.$$

Так как последовательности $\{\sigma_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\sigma_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ монотонные и ограниченные, то они имеют пределы. Найдем эти пределы.

Справедливо представление

$$\sigma_k = 1 - \sigma_{k-1}\tau = 1 - (1 - \sigma_{k-2}\tau)\tau = 1 - \tau + \tau^2 \sigma_{k-2} = \dots = \sum_{j=1}^{k-1} (-\tau)^j + \sigma(-\tau)^k =$$
$$= \frac{1 - (-\tau)^k}{1+\tau} + \sigma(-\tau)^k = \frac{1}{1+\tau} + \left(\sigma - \frac{1}{1+\tau}\right)(-\tau)^k.$$

Так как $0 < \tau < 1$, то отсюда получим

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{2n-1} = \frac{1}{1+\tau} - 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_{2n} = \frac{1}{1+\tau} + 0. \tag{36}$$

Таким образом, при $0 < \tau < 1$ из (34)–(36) следует, что $f(x) = 0$ для п.в. $x \in [0, \sigma]$, и тем самым полнота системы Y в этом случае доказана.

2. Пусть $1 < \tau < +\infty$. В этом случае $\frac{1}{1+\tau} < \sigma \le \min\{1, \frac{1}{\tau}\} = \frac{1}{\tau}$. Будем обозначать далее для краткости $\mu_{n+1} = \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{1-\mu_n}{\tau}\right)$, $n = 0, 1, \dots$

Так как в данном случае $\sigma_1 - \mu_0 = \frac{\tau^2-1}{\tau}\left(\frac{1}{1+\tau} - \sigma\right) < 0$ и $\mu_0 < \sigma$ в силу того что $\frac{1}{1+\tau} < \sigma$, то справедливы неравенства

$$\sigma_1 < \mu_0 < \sigma. \tag{37}$$

С учетом этого, сделав замену переменного $\frac{1-x}{\tau} = \xi$ в третьем соотношении в (28), получим

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in [0, \mu_0); \\ f\left(\frac{1-x}{\tau}\right) = -\frac{\tau}{b_0} f(x), & \text{п.в.} \quad x \in (\sigma_1, \sigma]. \end{cases} \tag{38}$$

Но так как $f(x) = 0$ для п.в. $x \in (\sigma_1, \mu_0)$, то из (37)–(38) получим на нулевом шаге

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in [0, \mu_0); \\ f(x) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in \left(\frac{1-\mu_0}{\tau}, \sigma\right); \\ f\left(\frac{1-x}{\tau}\right) = -\frac{\tau}{b_0} f(x), & \text{п.в.} \quad \xi \in [\mu_0, \sigma]. \end{cases} \tag{39}$$

При этом справедливо неравенство

$$\mu_0 < \frac{1-\mu_0}{\tau}, \tag{40}$$

которое следует из соотношения $\frac{1-\mu_0}{\tau} - \mu_0 = \frac{\tau+1}{\tau^2}\left(\sigma - \frac{1}{1+\tau}\right) > 0$.

Так как $f(x) = 0$ для п.в. $x \in \left(\frac{1-\mu_0}{\tau}, \sigma\right)$, то из (39)–(40) получим

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in [0, \mu_1]; \\ f(x) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in \left(\frac{1-\mu_0}{\tau}, \sigma\right); \\ f\left(\frac{1-x}{\tau}\right) = -\frac{\tau}{b_0} f(x), & \text{п.в.} \quad \xi \in \left[\mu_0, \frac{1-\mu_0}{\tau}\right]. \end{cases} \tag{41}$$

При этом справедливы неравенства

$$\mu_0 < \mu_1 < \frac{1-\mu_0}{\tau} < \sigma. \tag{42}$$

В самом деле, очевидно, $\sigma - \frac{1-\mu_0}{\tau} = \frac{\tau^2-1}{\tau^2}\left(\sigma - \frac{1}{1+\tau}\right) > 0$, то есть $\sigma > \frac{1-\mu_0}{\tau}$. Но тогда $\frac{1-\sigma}{\tau} < \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{1-\mu_0}{\tau}\right)$, что эквивалентно неравенству $\mu_0 < \mu_1$. Кроме того, из (40) вытекает неравенство $\frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{1-\mu_0}{\tau}\right) < \frac{1}{\tau}(1-\mu_0)$, что эквивалентно неравенству $\mu_1 < \frac{1-\mu_0}{\tau}$.

Далее, так как $f(x) = 0$ для п.в. $x \in [\mu_0, \mu_1)$ и $\mu_0 < \mu_1 < \frac{1-\mu_0}{\tau}$ (см. (42)), то из (41) получим на первом шаге

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{п.в. } x \in [0, \mu_1); \\ f(x) = 0, & \text{п.в. } x \in \left(\frac{1-\mu_1}{\tau}, \sigma\right); \\ f\left(\frac{1-x}{\tau}\right) = -\frac{\tau}{b_0} f(x), & \text{п.в. } \xi \in [\mu_1, \sigma]. \end{cases} \tag{43}$$

При этом справедливы неравенства

$$\mu_0 < \mu_1 < \frac{1-\mu_1}{\tau} < \frac{1-\mu_0}{\tau} < \sigma. \tag{44}$$

В самом деле, с учетом (42) нужно показать, что $\mu_1 < \frac{1-\mu_1}{\tau} < \frac{1-\mu_0}{\tau}$. Но так как в силу (42) имеем $\mu_1 < \frac{1-\mu_0}{\tau}$, то получим $\frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{1-\mu_0}{\tau}\right) < \frac{1-\mu_1}{\tau}$, что эквивалентно неравенству $\mu_1 < \frac{1-\mu_1}{\tau}$. А так как $\mu_0 < \mu_1$ (см. (42)), то, очевидно, $\frac{1-\mu_1}{\tau} < \frac{1-\mu_0}{\tau}$.

Продолжая аналогичные рассуждения (см. вывод соотношений (39) и (43)), на n-м шаге получим

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{п.в. } x \in [0, \mu_n); \\ f(x) = 0, & \text{п.в. } x \in \left(\frac{1-\mu_n}{\tau}, \sigma\right); \\ f\left(\frac{1-x}{\tau}\right) = -\frac{\tau}{b_0} f(x), & \text{п.в. } \xi \in [\mu_n, \sigma]. \end{cases} \tag{45}$$

При этом справедливы неравенства (см. вывод неравенств (40) и (44))

$$\mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \frac{1-\mu_n}{\tau} < \dots < \frac{1-\mu_0}{\tau} < \sigma.$$

Так как последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{\frac{1-\mu_n}{\tau}\right\}_{n=1}^{\infty}$ монотонные и ограниченные, то они имеют пределы. Найдем эти пределы.

Справедливы представления

$$\mu_n = \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{1-\mu_{n-1}}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau^2}\mu_{n-1} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau^3}\left(1 - \frac{1-\mu_{n-2}}{\tau}\right) = \dots =$$
$$= -\sum_{j=1}^{2n-1}\left(-\frac{1}{\tau}\right)^j - \frac{\sigma}{\tau^{2n-1}} = \frac{1}{1+\tau}\left(1 + \frac{1}{\tau^{2n-1}}\right) - \frac{\sigma}{\tau^{2n-1}};$$

$$\frac{1-\mu_n}{\tau} = -\sum_{j=1}^{2n}\left(-\frac{1}{\tau}\right)^j + \frac{\sigma}{\tau^{2n}} = \frac{1}{1+\tau}\left(1 - \frac{1}{\tau^{2n}}\right) + \frac{\sigma}{\tau^{2n}}.$$

Следовательно, так как $1 < \tau < +\infty$, то отсюда найдем

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \frac{1}{1+\tau} - 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\mu_n}{\tau} = \frac{1}{1+\tau} + 0. \tag{46}$$

Таким образом, при $1 < \tau < +\infty$ из (45)–(46) получим, что $f(x) = 0$ для п.в. $x \in [0, \sigma]$, и тем самым полнота системы Y в этом случае доказана.

3. Пусть $\tau = 1$. В этом случае $\frac{1}{2} < \sigma \le 1$. Так как $1 - \sigma\tau = \frac{1-\sigma}{\tau}$ при $\tau = 1$, то сделав замену переменного $1 - x = \xi$ в третьем соотношении (28), получим

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{п.в. } x \in [0, 1-\sigma]; \\ f(x) = -\bar{b}_0 f(1-x), & \text{п.в. } x \in (1-\sigma, \sigma]. \end{cases} \tag{47}$$

Рассмотрим второе соотношение в (47). Меняя в нем x на $1-x$, получим

$$f(1-x) = -\bar{b}_0 f(x), \quad \text{п.в. } x \in [1-\sigma, \sigma). \tag{48}$$

Обозначив $\tilde{f}(x) = f(1-x)$, из второго соотношения в (47) и (48) для нахождения $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ получим следующую однородную алгебраическую систему для п.в. $x \in (1-\sigma, \sigma)$

$$\begin{cases} f(x) + \bar{b}_0 \tilde{f}(x) = 0, \\ \bar{b}_0 f(x) + \tilde{f}(x) = 0. \end{cases} \tag{49}$$

Определитель этой системы равен $1 - \bar{b}_0^2$. Если $1 - \bar{b}_0^2 \neq 0$ или $b_0 \neq \pm 1$, то система (49) имеет только тривиальное решение для п.в. $x \in (1-\sigma, \sigma)$. С учетом первого соотношения в (47) отсюда получим $f(x) = 0$ для п.в. $x \in [0, \sigma]$, и тем самым полнота системы Y и в этом случае доказана.

Пусть теперь выполняется условие б) теоремы, в частности $\frac{1}{\tau} < \sigma \leq \frac{2}{1+\tau}$. Очевидно, в этом случае $0 < \sigma \leq 1$ ($l = 0$) и $1 < \sigma\tau < 2$ ($m = 1$). Здесь l и m есть параметры, которые фигурируют в лемме 2. Кроме того, в этом случае $\sigma \leq 2 - \sigma\tau$, то есть уравнение (19) имеет вид (26) при $l = 0$, $m = 1$, $g = 0$ или, более конкретно,

$$\begin{cases} f(x) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} f\left(\frac{1-x}{\tau}\right) = 0, & \text{п.в. } x \in [0, \sigma]; \\ \frac{\bar{b}_0}{\tau} f\left(\frac{1-x}{\tau}\right) = 0, & \text{п.в. } x \in (\sigma, 2-\sigma\tau]; \\ \frac{\bar{b}_0}{\tau} f\left(\frac{1-x}{\tau}\right) + \frac{\bar{b}_0}{\tau}\frac{1}{\bar{c}_0} f\left(\frac{2-x}{\tau}\right) = 0, & \text{п.в. } x \in (2-\sigma\tau, 1]. \end{cases} \tag{50}$$

Первое соотношение в (51) рассматриваем как уравнение относительно $f(x)$, в итоге запишем его в виде

$$f(x) = -\frac{\bar{b}_0}{\tau} f\left(\frac{1-x}{\tau}\right), \quad \text{п.в. } x \in [0, \sigma], \tag{51}$$

или в операторной форме

$$f = P^0_{\sigma,\tau} f, \tag{52}$$

где оператор $\left(P^0_{\sigma,\tau} f\right)(x) := -\frac{\bar{b}_0}{\tau} f\left(\frac{1-x}{\tau}\right)$ отображает пространство $L_2[0, \sigma]$ в $L_2[0, \sigma]$. Очевидно,

$$\|P^0_{\sigma,\tau} f\|^2_{L_2[0,\sigma]} = \int_0^\sigma \left|\frac{b_0}{\tau}\right|^2 \left|f\left(\frac{1-x}{\tau}\right)\right|^2 dx = \frac{|b_0|^2}{\tau} \int_{\frac{1-\sigma}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} |f(x)|^2 dx \leq$$
$$\leq \frac{|b_0|^2}{\tau} \int_0^\sigma |f(x)|^2 dx = \frac{|b_0|^2}{\tau} \|f\|^2_{L_2[0,\sigma]}.$$

Следовательно, $\|P^0_{\sigma,\tau}\|^2 \leq \frac{|b_0|^2}{\tau}$. Так как по условию б) теоремы $|b_0|^2 < \tau$, то $\|P^0_{\sigma,\tau}\|^2 < 1$ и оператор $P^0_{\sigma,\tau}$ является сжимающим. Поэтому в рассматриваемом случае уравнение (52) или, что то же самое, (51), а следовательно, и уравнение (50) имеют только тривиальное решение. Таким образом, система Y в случае б) теоремы является однократно полной в пространстве $L_2[0, \sigma]$.

Пусть теперь выполняется условие в) теоремы. В частности, при некотором $k \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $\frac{k+1}{1+\tau} < \sigma \leq \min\left\{1, \frac{k+2}{1+\tau}\right\}$, $\tau > k$. Очевидно, справедливы неравенства $0 < \sigma \leq 1$ ($l = 0$). Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть $\frac{k+1}{1+\tau} < \sigma \leq \frac{k+1}{\tau}$. Так как $\frac{k}{\tau} < \frac{k+1}{1+\tau}$ в силу того что $\frac{k+1}{1+\tau} - \frac{k}{\tau} = \frac{\tau-k}{\tau(1+\tau)} > 0$, то в этом случае $\frac{k}{\tau} < \sigma \leq \frac{k+1}{\tau}$ или $k < \sigma\tau \leq k+1$ ($m = k$). Кроме того, имеет место неравенство $k+1-\sigma\tau < \sigma$, то есть уравнение (19) имеет вид (27) при $l = 0$, $m = k$, $g = 0$ (здесь l, m и g по-прежнему есть параметры, которые фигурируют в лемме 2) или, конкретнее,

$$\begin{cases} f(x) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f\left(\frac{j+1-x}{\tau}\right) = 0, & \text{п.в. } x \in [0, k+1-\sigma\tau]; \\ f(x) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f\left(\frac{j+1-x}{\tau}\right) = 0, & \text{п.в. } x \in (k+1-\sigma\tau, \sigma]; \\ \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{1}{\bar{c}_0^j} f\left(\frac{j+1-x}{\tau}\right) = 0, & \text{п.в. } x \in (\sigma, 1]. \end{cases} \tag{53}$$

Первые два соотношения в (53) рассматриваем как уравнение относительно $f(x)$ для п.в. $x \in [0, \sigma]$ и запишем их в виде

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{\bar{b}_0}{\tau}\sum\limits_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\bar{c}_0^j}f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big), & \text{п.в.} \quad x \in [0, k+1-\sigma\tau]; \\ f(x) = \frac{\bar{b}_0}{\tau}\sum\limits_{j=0}^{k}\frac{1}{\bar{c}_0^j}f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big), & \text{п.в.} \quad x \in (k+1-\sigma\tau, \sigma]; \end{cases}$$

или в операторной форме

$$f = P^1_{\sigma,\tau} f, \tag{54}$$

где $P^1_{\sigma,\tau} \in L_2[0,\sigma] \to L_2[0,\sigma]$ и определяется формулой

$$\left(P^1_{\sigma,\tau} f\right)(x) := \begin{cases} -\frac{\bar{b}_0}{\tau}\sum\limits_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\bar{c}_0^j}f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big), & \text{п.в. } x \in [0, k+1-\sigma\tau]; \\ -\frac{\bar{b}_0}{\tau}\sum\limits_{j=0}^{k}\frac{1}{\bar{c}_0^j}f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big), & \text{п.в. } x \in (k+1-\sigma\tau, \sigma]. \end{cases} \tag{55}$$

Найдем оценку для нормы оператора $P^1_{\sigma,\tau}$. Для этого построим сопряженный оператор $\left(P^1_{\sigma,\tau}\right)^*$. Очевидно,

$$\langle g, P^1_{\sigma,\tau} f\rangle_{L_2[0,\sigma]} = \int_0^\sigma g(x)\overline{\Big(P^1_{\sigma,\tau} f\Big)}(x)\,dx =$$

$$= -\frac{b_0}{\tau}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{c_0^j}\int_0^\sigma g(x)\overline{f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big)}\,dx - \frac{b_0}{\tau}\frac{1}{c_0^k}\int_{k+1-\sigma\tau}^\sigma g(x)\overline{f\Big(\frac{k+1-x}{\tau}\Big)}\,dx =$$

$$= -\sum_{j=0}^{k-1}\frac{b_0}{c_0^j}\int_{\frac{j+1-\sigma}{\tau}}^{\frac{j+1}{\tau}} g(j+1-\tau x)\overline{f(x)}\,dx - \frac{b_0}{c_0^k}\int_{\frac{k+1-\sigma}{\tau}}^{\sigma} g(k+1-\tau x)\overline{f(x)}\,dx =$$

$$= \int_0^\sigma \Big(\left(P^1_{\sigma,\tau}\right)^* g\Big)(x)\overline{f(x)}\,dx = \langle\left(P^1_{\sigma,\tau}\right)^* g, f\rangle_{L_2[0,\sigma]},$$

то есть

$$\Big(\left(P^1_{\sigma,\tau}\right)^* g\Big)(x) := \begin{cases} -\frac{b_0}{c_0^j}g(j+1-\tau x), & \text{п.в.} \quad x \in \Big[\frac{j+1-\sigma}{\tau}, \frac{j+1}{\tau}\Big), \ j = \overline{0, k-1}; \\ 0, & \text{п.в.} \quad x \in \Big[\frac{j}{\tau}, \frac{j+1-\sigma}{\tau}\Big), \ j = \overline{0, k}; \\ -\frac{b_0}{c_0^k}g(k+1-\tau x), & \text{п.в.} \quad x \in \Big[\frac{k+1-\sigma}{\tau}, \sigma\Big]. \end{cases}$$

Оценим норму оператора $\left(P^1_{\sigma,\tau}\right)^*$. Имеем

$$\|\left(P^1_{\sigma,\tau}\right)^* g\|^2_{L_2[0,\sigma]} = -\sum_{j=0}^{k-1}\int\limits_{\frac{j+1-\sigma}{\tau}}^{\frac{j+1}{\tau}}\frac{|b_0|^2}{|c_0|^{2j}}|g(j+1-\tau x)|^2\,dx + \int\limits_{\frac{k+1-\sigma}{\tau}}^{\sigma}\frac{|b_0|^2}{|c_0|^{2k}}|g(k+1-\tau x)|^2\,dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1}\frac{|b_0|^2}{|c_0|^{2j}}\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\sigma |g(x)|^2\,dx + \frac{|b_0|^2}{|c_0|^{2k}}\frac{1}{\tau}\int\limits_{k+1-\tau\sigma}^{\sigma}|g(x)|^2\,dx \le \frac{|b_0|^2}{\tau}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{|c_0|^{2j}}\|g\|^2_{L_2[0,\sigma]},$$

то есть $\|P^1_{\sigma,\tau}\|^2 = \|\left(P^1_{\sigma,\tau}\right)^*\|^2 \le \frac{|b_0|^2}{\tau}\sum\limits_{j=0}^{k}\frac{1}{|c_0|^{2j}}$. Поэтому при условии в) теоремы оператор $P^1_{\sigma,\tau}$ является сжимающим и, таким образом, уравнение (54), а следовательно, и (53) имеет только тривиальное решение. Таким образом, система Y является в этом случае однократно полной в $L_2[0,\sigma]$.

2) Пусть теперь $\frac{k+1}{\tau} < \sigma \le \min\Big\{1, \frac{k+2}{1+\tau}\Big\}$. Это возможно только при $\tau > k+1$. Так как $\frac{k+2}{1+\tau} < \frac{k+2}{\tau}$, то в этом случае $\frac{k+1}{\tau} < \sigma < \frac{k+2}{\tau}$ или $k+1 < \sigma\tau < k+2$ ($m = k+1$). Кроме того, $k+2-\sigma\tau \ge \sigma$, то есть уравнение (19) имеет вид (26) при $l = 0$, $m = k+1$, $g = 0$ или, конкретнее,

$$\begin{cases} f(x) + \frac{\bar{b}_0}{\tau}\sum\limits_{j=0}^{k}\frac{1}{\bar{c}_0^j}f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in [0, \sigma]; \\ \frac{\bar{b}_0}{\tau}\sum\limits_{j=0}^{k}\frac{1}{\bar{c}_0^j}f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in (\sigma, k+2-\sigma\tau]; \\ \frac{\bar{b}_0}{\tau}\sum\limits_{j=0}^{k+1}\frac{1}{\bar{c}_0^j}f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in (k+2-\sigma\tau, 1]. \end{cases} \tag{56}$$

Первое соотношение в (56) рассматриваем как уравнение относительно $f(x)$ для п.в. $x \in [0,\sigma]$ и запишем его в виде

$$f(x) = -\frac{\bar{b}_0}{\tau}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{\bar{c}_0^j} f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big), \quad \text{п.в.} \quad x \in [0,\sigma],$$

или в операторной форме

$$f = P^0_{\sigma,\tau} f, \tag{57}$$

где $P^0_{\sigma,\tau} \in L_2[0,\sigma] \to L_2[0,\sigma]$ и определяется формулой

$$\left(P^0_{\sigma\tau} f\right)(x) := -\frac{\bar{b}_0}{\tau}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{\bar{c}_0^j} f\Big(\frac{j+1-x}{\tau}\Big), \quad \text{п.в. } x \in [0,\sigma].$$

Оценку для нормы оператора $P^0_{\sigma,\tau}$ находим тем же способом, что и для нормы оператора $P^1_{\sigma,\tau}$, используя переход к сопряженному оператору. Получим аналогично

$$\|P^0_{\sigma,\tau}\|^2 = \|\left(P^0_{\sigma,\tau}\right)^*\|^2 \le \frac{|b_0|^2}{\tau}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{|c_0|^{2j}}.$$

Поэтому при условии в) теоремы оператор $P^0_{\sigma,\tau}$ также является сжимающим и, таким образом, уравнение (57), а следовательно, и (56) имеет только тривиальное решение. Значит, система Y является также и в этом случае однократно полной в $L_2[0,\sigma]$.

Теорема 4 полностью доказана. □

4. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОКРАТНОЙ МИНИМАЛЬНОСТИ

Справедливы следующие достаточные условия однократной минимальности системы Y в пространстве $L_2[0,\sigma]$.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$ *и* $\sigma \ge \sigma_0(\tau) := \frac{1}{\tau}$, *где* $\tau \ge 1$. *Тогда для однократной минимальности системы* Y *в пространстве* $L_2[0,\sigma]$ *достаточно:*

а) выполнения условия

$$\tau < |b_0|^2 \tag{58}$$

в случае $\tau > 1$; *при этом функции биортогональной системы* $Z = \{z_n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *определяются при* $\sigma = \sigma_0(\tau)$ *единственным образом формулой*

$$z_n(x) = z_n^{0\tau}(x) := \Big((E - Q_{0\tau})^{-1} g_n^0\Big)(x), \quad \textit{п.в. } x \in [0,\sigma_0(\tau)], \tag{59}$$

где оператор $Q_{0\tau} \in L_2[0,\sigma_0(\tau)] \to L_2[0,\sigma_0(\tau)]$ *определяется формулой*

$$(Q_{0\tau} f)(x) := \begin{cases} -\frac{\tau}{b_0} f(1-\tau x), & \textit{п.в. } x \in \left[\frac{\tau-1}{\tau^2}, \frac{1}{\tau}\right]; \\ 0, & \textit{п.в. } x \in \left[0, \frac{\tau-1}{\tau^2}\right); \end{cases} \tag{60}$$

а функция $g_n^0(x)$ — *формулой*

$$g_n^0(x) := \frac{\tau}{\bar{b}_0} g_n(1-\tau x), \quad x \in [0,\sigma_0(\tau)]; \tag{61}$$

б) выполнения условия $b_0 \ne \pm 1$ *в случае* $\tau = 1$; *при этом функции биортогональной системы* $Z = \{z_n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *определяются при* $\sigma = \sigma_0(1) = 1$ *единственным образом формулой*

$$z_n(x) = z_n^{01}(x) := \frac{1}{1-\bar{b}_0^2}\Big(g_n(x) - \bar{b}_0 g_n(1-x)\Big), \quad x \in [0,1]. \tag{62}$$

Доказательство. Очевидно, что если система Y минимальна в $L_2[0,\sigma]$, то она будет минимальной и в пространстве $L_2[0,\rho]$ при $\rho > \sigma$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать $\sigma = \sigma_0(\tau)$, $\tau \ge 1$.

Рассмотрим в $L_2[0,\sigma_0(\tau)]$ неоднородное уравнение (22). Так как $0<\sigma_0(\tau)\le 1$ при $\tau\ge 1$, $\sigma_0(\tau)\tau=1$ и $1-\sigma_0(\tau)\tau<\sigma_0(\tau)$, то на основании леммы 2 уравнение (22) в данном случае будет иметь вид (27) при $m=0$, $l=0$, $\sigma=\frac{1}{\tau}$ и $g=g_n$, то есть

$$\begin{cases} f(x)+\frac{\bar b_0}{\tau}f\left(\frac{1-x}{\tau}\right)=g_n(x), & \text{п.в. } x\in[0,\frac{1}{\tau}];\\ \frac{\bar b_0}{\tau}f\left(\frac{1-x}{\tau}\right)=g_n(x), & \text{п.в. } x\in(\frac{1}{\tau},1]. \end{cases} \tag{63}$$

Далее рассмотрим два случая.

а) Пусть $\tau>1$. Сделав замену $\frac{1-x}{\tau}=\xi$, запишем уравнение (63) в виде

$$\begin{cases} f(\xi)=-\frac{\tau}{\bar b_0}f(1-\tau\xi)+\frac{\tau}{\bar b_0}g_n(1-\tau\xi), & \text{п.в. } \xi\in\left[\frac{\tau-1}{\tau^2},\frac{1}{\tau}\right];\\ f(\xi)=\frac{\tau}{\bar b_0}g_n(1-\tau\xi), & \text{п.в. } x\in\left[0,\frac{\tau-1}{\tau^2}\right), \end{cases}$$

или в операторной форме

$$f=Q_{0\tau}f+g_n^0, \tag{64}$$

где оператор $Q_{0\tau}\in L_2[0,\sigma_0(\tau)]\to L_2[0,\sigma_0(\tau)]$ определяется формулой (60), а функция $g_n^0\in$ $\in L_2[0,\sigma_0(\tau)]$ — формулой (61).

Оценим норму оператора $Q_{0\tau}$. Имеем

$$\|Q_{0\tau}f\|^2_{L_2[0,\sigma_0(\tau)]}=\int\limits_{\frac{\tau-1}{\tau^2}}^{\frac{1}{\tau}}\left|\frac{\tau}{\bar b_0}\right|^2|f(1-\tau\xi)|^2\,d\xi=\frac{\tau}{|b_0|^2}\int\limits_0^{\frac{1}{\tau}}|f(x)|^2\,dx=\frac{\tau}{|b_0|^2}\|f\|^2_{L_2[0,\sigma_0(\tau)]}.$$

Следовательно, $\|Q_{0\tau}\|^2=\frac{\tau}{|b_0|^2}$ и значит, при условии (58) оператор $Q_{0\tau}$ — сжимающий. Таким образом, уравнение (64), а следовательно, и (63) имеет единственное решение, которое дается формулой (59). Тогда из теоремы 3 получаем утверждение доказываемой теоремы в этом случае.

б) Пусть $\tau=1$. Тогда уравнение (63) будет иметь вид

$$f(x)+\bar b_0 f(1-x)=g_n(x),\quad \text{п.в. } x\in[0,1]. \tag{65}$$

Взяв $\xi=1-x$, заменив ξ на x и поменяв местами слагаемые, из (65) найдем

$$\bar b_0 f(x)+f(1-x)=g_n(1-x),\quad \text{п.в. } x\in[0,1]. \tag{66}$$

Таким образом, для нахождения $f(x)$ получили линейную алгебраическую систему (65)–(66) для п.в. $x\in[0,1]$. Определитель этой системы равен $1-\bar b_0^2$. Если $b_0\ne\pm1$, то эта система имеет единственное решение, которое определяется формулой (62). Тогда из теоремы 3 получаем утверждение доказываемой теоремы и в этом случае. Теорема 5 доказана. □

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* $\mathbf{1}^0$, $\mathbf{2}^0$, $\mathbf{4}^0$ *и* $\sigma\ge\tilde\sigma:=1$. *Если при некотором* $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ *справедливы неравенства* $k<\tau\le k+1$ *и* $\tau\ne1$ *(случай* $\tau=1$ *рассмотрен в теореме 5), то для однократной минимальности системы* Y *в* $L_2[0,\sigma]$ *достаточно выполнения условия*

$$|b_0|^2\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{|c_0|^{2j}}<\tau. \tag{67}$$

При этом функции биортогональной системы $Z=\{z_n(x)\mid n\in\mathbb{Z}\}$ *определяются при* $\sigma=\tilde\sigma$ *единственным образом формулой*

$$z_n(x)=\tilde z_n^\tau(x):=\left(\left(E-P^1_{1,\tau}\right)^{-1}g_n\right)(x),\quad \textit{п.в. }\ x\in[0,1], \tag{68}$$

где оператор $P^1_{1,\tau}\in L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ *определяется формулой* (55) *при* $\sigma=1$, *а функции* $g_n(x)$ *определены в теореме 3.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать $\sigma = \tilde{\sigma}(= 1)$. Рассмотрим в $L_2[0,1]$ неоднородное уравнение (22). Так как по условию $k < \tau \le k+1$, $\sigma = 1$ и $k+1-\sigma\tau < \sigma$, то это уравнение будет иметь вид (27) при $m = k$, $l = 0$, $\sigma = 1$ и $g = g_n$ или, конкретнее,

$$\begin{cases} f(x) + \frac{\bar{b}_0}{\tau}\sum\limits_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\bar{c}_0^j} f\left(\frac{j+1-x}{\tau}\right) = g_n(x), \quad \text{п.в.} \ \ x \in [0, k+1-\tau]; \\ f(x) + \frac{\bar{b}_0}{\tau}\sum\limits_{j=0}^{k}\frac{1}{\bar{c}_0^j} f\left(\frac{j+1-x}{\tau}\right) = g_n(x), \quad \text{п.в.} \ \ x \in (k+1-\tau, 1], \end{cases} \tag{69}$$

а в операторном виде

$$f = P^1_{1,\tau} f + g_n. \tag{70}$$

Условие (67) является достаточным условием того, что оператор $P^1_{1,\tau}$ является сжимающим (см. доказательство пункта в) теоремы 4). Следовательно, при этом условии уравнение (70), а, значит, и уравнение (69) имеет единственное решение, которое дается формулой (68). Тогда из теоремы 3 получаем утверждение доказываемой теоремы. Теорема 6 полностью доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 06-01-00003) *и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ* (*проект* НШ-2970.2008.1).

Библиографический список

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1983. № 9. С. 190–229.
3. *Рыхлов В.С.* О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1992. Т. 36, № 3. С. 35–44.
4. *Рыхлов В.С.* О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка // Интегральные преобразования и специальные функции: Информационный бюллетень. 2001. Т. 2, № 1. С. 85–103.
5. *Рыхлов В.С.* О полноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Spectral and Evolution Problems: Proceedings of the Eleventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. V. 11. Simferopol, 2001. P. 86–93.
6. *Рыхлов В.С.* О двукратной полноте собственных функций одного квадратичного пучка дифференциальных операторов // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 2009. Т. 6. № 1. С. 237–249.
7. *Рыхлов В.С.* О полноте собственных функций дифференциального пучка второго порядка, корни характеристического уравнения которого лежат на одной прямой // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 88–91.
8. *Rykhlov V.S.* On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators // Spectral and Evolutionary Problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. V. 7. Simferopol, 1997. P. 70–73.

УДК 517.51

ПРОЕКЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ БЕССЕЛЕВЫХ СИСТЕМ

П.А. Терехин

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: terekhinpa@info.sgu.ru

Рассматриваются бесселевы системы в банаховом пространстве относительно модельного пространства последовательностей. Устанавлены обобщенные аналоги теорем Бари, Шура, Новикова и Czaja.

Ключевые слова: бесселева система, базис, проектор, дополняемое подпространство.

Projection Description of Bessel Sequences

P.A. Terekhin

We consider Bessel sequences in Banach space with respect to modeling sequences space. The generalized analogues of theorems of Bari, Schur, Novikov and Czaja are established.

Key words: Bessel sequences, basis, projection, complemented subspace.