ничных условиях / А. А. Шкаликов // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 1983. – № 9. – С. 190–229.

4. *Gasymov, M. G.* О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов / M. G. Gasymov, A. M. Magerramov // Докл. АН Азерб. ССР. – 1974. – Т. 30, № 12. – С. 9–12.

5. *Келдыш, М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений / М. В. Келдыш // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 77, № 1. – С. 11–14.

6. *Хромов, А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук / Хромов А. П. – Новосибирск, 1973. – 242 с.

7. *Шкаликов, А. А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями / А. А. Шкаликов // Функц. анализ. – 1976. – Т. 10, № 4. – С. 69–80.

8. *Хромов А. П.* О порождающих функциях вольтерровых операторов / А. П. Хромов // Мат. сборник. – 1977. – Т. 102(144), № 3. – С. 457–472.

9. *Freiling, G.* Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel / G. Freiling// Math. Z. – 1984. – V. 188, № 1. – P. 55–68.

10. *Тихомиров, С. А.* Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / Тихомиров С. А. – Саратов, 1987. – 126 с.

11. *Вагабов, А. И.* Разложения в ряды Фурье по главным функциям дифференциальных операторов и их применения: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук / Вагабов А. И. – М., 1988. – 201 с.

12. *Вагабов, А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов / А. И. Вагабов. – Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1994. – 160 с.

13. *Рыхлов, В. С.* О полноте собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами / В. С. Рыхлов // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 6. – С. 42–53.

14. *Рыхлов, В. С.* О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных диференциальных операторов / В. С. Рыхлов // Математика. Механика: Сб. науч.тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. – Вып. 3. – С. 114–117.

15. *Рыхлов, В. С.* О кратной неполноте собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче / В. С. Рыхлов // Докл. РАЕН. – Саратов: Изд-во Сарат. гос. техн. ун-та, 2004. – № 4. – С. 72–79.

УДК 517.956

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

П.В. Садчиков, А.Д. Баев

Воронежский государственный университет,
кафедра уравнений в частных производных
и теорий вероятностей
E-mail: sadch@freemail.ru, alexsandrbaev@mail.ru

Рассматриваются краевые задачи в полупространстве для одного класса псевдодифференциальных уравнений. Установлены коэрцитивные априорные оценки и теоремы о существовании решений таких краевых задач.

Ключевые слова: вырождающееся эллиптическое уравнение, априорная оценка, псевдодифференциальный оператор, краевая задача.

About Some Boundary Problems in the Semispace for a Class of Pseudo-Differential Equations with Degeneracy

P.V. Sadchikov, A.D. Baev

Voronezh State University
Chair of the Equations in Partial Derivatives and Probability Theory
E-mail: sadch@freemail.ru, alexsandrbaev@mail.ru

Boundary problems in the halfspace for one class of the pseudo-differential equations are considered. The coercetive a priori estimations and theorems of the existence of solutions for these problems are established.

Key words: degenerating elliptic equation, a priori estimation, pseudo-differential operator, boundary problem.

Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений относятся к неклассическим задачам математической физики. Одна из главных трудностей, возникающих в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических уравнений) членов на постановку краевых задач и их разрешимость.

Фундаментальные результаты для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка принадлежат М. В. Келдышу [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [2] и М. М. Смирновым [3]. Некоторые краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка были исследованы в работах В. А. Рукавишникова, А. Г. Ереклинцева [4], С. Н. Антонцева, С. И. Шмарева [5]. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при «степенном» характере вырождения рассматривались в работах М. И. Вишика, В. В. Грушина [6], а при произвольном порядке вырождения — в работах В. П. Глушко [7], А. Д. Баева [8, 9].

В настоящей работе исследуется вопрос о существовании решений краевых задач в полупространстве для вырождающихся псевдодифференциальных уравнений. Частными случаями таких уравнений являются вырождающиеся эллиптические дифференциальные уравнения, содержащие невырожденную производную по переменной t первого порядка. Установлены априорные оценки решений краевых задач для вырождающихся псевдодифференциальных уравнений. Разработан новый метод исследования таких краевых задач, основанный на свойствах нового класса псевдодифференциальных операторов с переменным символом, построенных по специальному интегральному преобразованию F_{α}.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \mathrm{const}$ для $t \geq d$ при некотором $d > 0$. Здесь и в дальнейшем $t \in R^1_+$. Следуя работе [8], рассмотрим интегральное преобразование:

$$F_{\alpha}[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1}$$

определенное, например, на функциях $u(t) \in C_0^{\infty}\left(R^1_+\right)$. Это преобразование связано с преобразованием Фурье следующим равенством: $F_{\alpha}[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_{\alpha}(\tau)]$, где $u_{\alpha}(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}\, u(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. Для преобразования F_{α} справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_{\alpha}[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2\left(R^1_+\right)}$, что дает возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2\left(R^1\right)$ и $L_2\left(R^1_+\right)$, а также рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_{α} сохраним старое обозначение, обозначив через F_{α}^{-1} обратное к F_{α} преобразование, отображающее $L_2\left(R^1\right)$ на $L_2\left(R^1_+\right)$. Легко показать, что на функциях $u(t) \in C_0^{\infty}\left(R^1_+\right)$ выполняются соотношения $F_{\alpha}\left[D^j_{\alpha,t}u\right](\eta) = \eta^j F_{\alpha}[u](\eta)$, $j = 1, 2, \ldots$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\alpha(t)}$.

Следуя работе [8], определим пространства $H_{s,\alpha}(R^n_+)$, $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}\left(R^n_+\right)$ (s — действительное) состоит из тех функций локально интегрируемых в $L_2\left(R^n_+\right)$ функций $v(x,t)$ ($x \in R^{n-1}$, $t \in R^1_+$), для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n} \left(1 + |\xi|^2 + \eta^2\right)^s |F_{\alpha}F_{x\to\xi}[v(x,t)]|^2\, d\xi d\eta, \qquad \xi \in R^{n-1}, \quad \eta \in R^1.$$

Здесь и в дальнейшем $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}\ldots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}\left(R^n_+\right)$ ($s \geq 0$, $q > 1$) состоит из функций $v(x,t) \in H_{s,\alpha}\left(R^n_+\right)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \left\{\sum_{l=0}^{[s/q]} \left\|F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha}[\left(1 + |\xi|^2 + \eta^2\right)^{\frac{s-ql}{2}} F_{\alpha}F_{x\to\xi}[\partial^l_t v]]\right\|^2_{L_2(R^n_+)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь и в дальнейшем $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\left[\frac{s}{q}\right]$ — целая часть $\frac{s}{q}$.

Определение 3. Пространство $H_s(R^{n-1})$ (s — действительное число) состоит из всех локально интегрируемых в $L_2(R^{n-1})$ функций $g(x)$, для которых конечна норма

$$\|g\|_s = \left\|F^{-1}_{s\to x}[(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} F_{x\to\xi}[g]]\right\|_{L_2(R^{n-1})}.$$

Пусть выполнено следующее условие:

Условие 1. *Существует число* $\nu \in (0,1]$ *такое, что* $\left|\alpha^{/}(t)\alpha^{-\nu}(t)\right| \le c < \infty$ *при всех* $t \in [0,\, +\infty)$. *Кроме того,* $\alpha\,(t) \in C^{\infty}\,[0,+\infty)$.

Можно показать, что такое число ν существует, если $\alpha\,(+0) = \alpha^{/}\,(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле $K^{(q)}\,(t, D_x, D_{\alpha,t})\,v = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha}[\lambda\,(t,\xi,\eta)\,F_{\alpha}F_{x\to\xi}[v\,(x,t)]]$.

Предположим, что символ весового псевдодифференциального оператора $\lambda\,(t,\xi,\eta)$ удовлетворяет следующему условию:

Условие 2. *Функция* $\lambda\,(t,\xi,\eta) \in C^{\infty}\left(R^{n+1}_{+}\right)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\left|\left(\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k}\frac{\partial^{j}}{\partial\eta^{j}}\lambda\,(t,\xi,\eta)\right| \le c_{jk}\left(1+|\xi|^{2}+\eta^{2}\right)^{\frac{1}{2}(q-j+\delta k)}, \qquad j = 0,1,\ldots,$$

где постоянные $c_{jk} > 0$ *не зависят от* $t \in R^{1}_{+}$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^{1}$, $\delta \in [0;1)$.

Обозначим класс функций $\lambda\,(t,\xi,\eta)$, удовлетворяющих условию 2, через $S^{q}_{\alpha,\delta}$.

Такой класс символов $\lambda(t,\xi,\eta)$ при $\delta = 0$ был исследован в [9].

Рассмотрим операторы $A^{(q)}_{\pm}(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = K^{(q)}_{\pm}(t, D_x, D_{\alpha,t})v - \frac{\partial v}{\partial t}$, где $K^{(q)}_{\pm}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $\lambda_{\pm}(t,\xi,\eta)$, которые удовлетворяют условию 2 при $q > 1$, а также следующему условию:

Условие 3. *Функции* $\lambda_{\pm}(t,\xi,\eta) \in C^{\infty}(R^{n+1}_{+})$ *и при всех* $t \in (0;+\infty)$, $(\xi,\eta) \in R^{n}$ *справедливы оценки* $\pm\mathrm{Re}\,\lambda_{\pm}(t,\xi,\eta) \ge c(1+|\xi|^{2}+\eta^{2})^{\frac{q}{2}}$ *с некоторой константой* $c > 0$.

Рассмотрим в R^{n}_{+} задачу вида

$$A^{(q)}_{-}(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = f, \tag{2}$$

$$v(x,+0) = g(x). \tag{3}$$

Наряду с задачей (2)–(3), рассмотрим уравнение

$$A^{(q)}_{+}(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = f. \tag{4}$$

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $s \ge 0$, $q > 1$ *— действительные числа, выполнены условия* 1–3. *Тогда для любого решения* $v(x,t)$ *задачи* (2)–(3), *принадлежащего пространству* $H_{s+q,\alpha,q}(R^{n}_{+})$, *справедлива априорная оценка*

$$\|v\|_{s+q,\alpha,q} \le c_1(\|f\|_{s,\alpha,q} + \|g\|_{s+\frac{q}{2}} + \|v\|_{L_2(R^{n}_{+})}), \tag{5}$$

а для любого решения $v(x,t)$ *уравнения* (4), *принадлежащего пространству* $H_{s+q,\alpha,q}(R^{n}_{+})$, *справедлива априорная оценка*

$$\|v\|_{s+q,\alpha,q} \le c_1(\|f\|_{s,\alpha,q} + \|v\|_{L_2(R^{n}_{+})}), \tag{6}$$

с постоянными $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, *не зависящими от* v, f, g.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть* $f(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R^{n}_{+})$, $g(x) \in H_{s+\frac{1}{2}q}(R^{n-1})$. *Тогда существует оператор* R_{-}: $H_{s,\alpha,q}(R^{n}_{+}) \to H_{s+q,\alpha,q}(R^{n}_{+})$ *такой, что функция* $R_{-}f(x,t)$ *удовлетворяет условию* (3) *и справедливо равенство*

$$A^{(q)}_{-}R_{-} = I + T_{-}R_{-},$$

где I *— единичный оператор, а порядок оператора* T_{-} *в шкале пространств* $H_{s,\alpha,q}(R^{n}_{+})$ *не превосходит* $q-1$. *Пусть* $f(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R^{n}_{+})$, *тогда существует оператор* R_{+}: $H_{s,\alpha,q}(R^{n}_{+}) \to H_{s+q,\alpha,q}(R^{n}_{+})$ *такой, что* $A^{(q)}_{+}R_{+} = I + T_{+}R_{+}$, *причем порядок оператора* T_{+} *в шкале пространств* $H_{s,\alpha,q}(R^{n}_{+})$*не превосходит* $q-1$.

Оператор R_{-} называется правым регуляризатором задачи (2)–(3), а оператор R_{+} называется правым регуляризатором уравнения (4). Если справедливы априорные оценки (5) и (6), то правые регуляризаторы являются и левыми.

Наряду с задачей (2)–(3), рассмотрим задачу

$$A_{-}^{(q)}(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) - \mu v(x,t) = f(x,t), \tag{7}$$

$$v(x,+0) = g(x). \tag{8}$$

Рассмотрим также уравнение

$$A_{+}^{(q)}(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) + \mu v(x,t) = f(x,t). \tag{9}$$

Здесь $\mu > 0$ некоторое число.

Доказаны следующие утверждения:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $\mathrm{Re}\,\mu > \mu_0 > 0$, *где* μ_0 — *достаточно большое число. Тогда для любого решения* $v(x,t)$ *задачи* (7)–(8), *принадлежащего пространству* $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$, *справедлива априорная оценка*

$$\|v\|_{s+q,\alpha,q} \leq c_1(\|f\|_{s,\alpha,q} + \|g\|_{s+\frac{q}{2}}),$$

а для любого решения $v(x,t)$ *уравнения* (9), *принадлежащего пространству* $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$, *справедлива априорная оценка* $\|v\|_{s+q,\alpha,q} \leq c_2 \|f\|_{s,\alpha,q}$ *с постоянными* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, *не зависящими от* v, f, g.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда, если* $f(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, $g(x) \in H_{s+\frac{q}{2}}(R^{n-1})$, *то существует единственное решение задачи* (7)–(8), *принадлежащее пространству* $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$. *Если* $f(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, *то существует единственное решение уравнения* (9), *принадлежащее пространству* $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$.

Доказательство теорем 1–4 основано на свойствах весовых псевдодифференциальных операторов с символом из класса $S_{\alpha,\delta}^{q}$. Сформулируем эти свойства в виде теорем. Доказательство этих теорем проводится методами, изложенными в работе [10].

Теорема 5. *Пусть* $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ *и* $Q(t, D_x, D_{\alpha,t})$ — *весовые псевдодифференциальные операторы с символами* $p(t,\xi,\eta)$ *и* $q(t,\xi,\eta)$, *принадлежащими соответственно классам* $S_{\alpha,\delta}^{m_1}$ *и* $S_{\alpha,\delta}^{m_2}$ (m_1 *и* m_2 — *действительные числа),* $\delta \in [0,1)$. *Тогда для любого* $N \geq 0$ *существует такое* $N_1 \geq 0$ *и такой символ* $T_{N_1}(t,\xi,\eta) \in S_{\alpha,\delta}^{-N}$, *что справедливо равенство*

$$P(t, D_x, D_{\alpha,t})Q(t, D_x, D_{\alpha,t}) - \sum_{j=1}^{N_1} R_j(t, D_x, D_{\alpha,t}) = T_{N_1}(t, D_x, D_{\alpha,t}),$$

где $T_{N_1}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ — *весовой псевдодифференциальный оператор с символом* $T_{N_1}(t,\xi,\eta)$; $R_j(t, D_x, D_{\alpha,t})$ — *весовой псевдодифференциальный оператор с символом* $r_j(t,\xi,\eta) = \frac{1}{j!}\partial_\eta^j p(t,\xi,\eta) \times (\alpha(t)\partial_t)^j q(t,\xi,\eta)$.

Теорема 6. *Пусть* $p(t,\xi,\eta) \in S_{\alpha,\delta}^{m}$, m — *действительное число,* $\delta \in [0,1)$. *Тогда весовой псевдодифференциальный оператор* $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ *для любого действительного* s *есть ограниченный оператор из* $H_{s+m,\alpha}(R_+^n)$ *в* $H_{s,\alpha}(R_+^n)$.

Теорема 7. *Пусть символ* $\lambda(t,\xi,\eta)$ *весового псевдодифференциального оператора* $K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ *принадлежит классу* $S_{\alpha,\delta}^{\sigma}$, $\sigma \in R^1, \delta \in [0,1)$. *Пусть* $v(x,t) \in H_{s+\sigma,\alpha}(R_+^n)$, $\partial_t^p v(x,t) \in H_{s+\sigma,\alpha}(R_+^n)$, $p = 1, 2, \ldots$ *Пусть выполнено условие* 1. *Тогда для оператора*

$$M_{p,\sigma} = \partial_t^p K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t}) - K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})\partial_t^p \tag{10}$$

справедлива оценка $\|M_{p,\sigma}v\|_{s,\alpha} \leq c\left(\sum\limits_{j=0}^{p}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s+\sigma-1,\alpha} + \sum\limits_{j=0}^{p-1}\left\|\partial_t^j v\right\|_{s+\sigma+\delta(p-j),\alpha}\right)$ *с константой* $c > 0$, *не зависящей от* v.

Теорема 8. *Пусть* $q > 1$, $s \geq 0$ — *действительные числа,* $v(x,t) \in H_{s+(p+1)q,\alpha,q}(R_+^n)$. *Пусть символ* $\lambda(t,\xi,\eta)$ *весового псевдодифференциального оператора* $K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ *принадлежит классу* $S_{\alpha,\delta}^{q}$, $\delta \in [0,1)$. *Пусть выполнено условие* 1 *при* $\sigma = s+q$. *Тогда для оператора* $M_{p,q}$, *определенного* *в* (10) *при* $\sigma = q$, *справедлива оценка* $\|M_{p,q}v\|_{s,\alpha,q} \le c\,\|v\|_{s+pq+q-1+\delta,\alpha,q}$ *с постоянной* $c > 0$, *не зависящей от* v.

Теорема 9. *Пусть* $q > 1$, σ — *действительные числа,* $v(x,t) \in H_{s+\sigma,\alpha,q}(R^n_+)$. *Пусть символ* $\lambda(t,\xi,\eta)$ *весового псевдодифференциального оператора принадлежит классу* $S^{\sigma}_{\alpha,\delta}$, $\sigma \in R^1, \delta \in [0,1)$. *Тогда при выполнении условия 1 справедливо равенство*

$$\lim_{t\to+0} K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = \lim_{t\to+0} K^{(\sigma)}(0,D_x,0)v(x,t) = \lim_{t\to+0} F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(0,\xi,0)F_{\xi\to x}[v(x,t)]].$$

Теорема 10. *Пусть выполнено условие* 1 *и символ* $\lambda(t,\xi,\eta)$ *весового псевдодифференциального оператора* $K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})$ *принадлежит классу* $S^{\sigma}_{\alpha,\delta}$, $\sigma \in R^1, \delta \in [0,1)$. *Пусть при всех* $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$ *функция* $\lambda(t,\xi,\eta)$ *является ограниченной функцией по переменной* t *на множестве* R^1_+. *Пусть функция* $v(x,t)$ *такова, что функция* $D^N_{\alpha,t}v(x,t)$ *при всех* $x \in R^{n-1}$ *принадлежит, как функция переменной* t *пространству* $L_2(R^1_+)$ *при некотором* $N \ge \max\{\sigma+1,1\}$. *Пусть* $\lim\limits_{t\to+\infty} D^j_{\alpha,t}v(x,t) = 0$ *при всех* $x \in R^{n-1}$, $j = 0,1,2,\ldots,N-1$. *Тогда при всех* $x \in R^{n-1}$ *справедливо равенство* $\lim\limits_{t\to+\infty} K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = 0$.

Определение 4. Будем говорить, что функция $a(t,y,\xi,\eta)$ принадлежит классу $S^{m,\alpha,\delta}$, $m \in R^1$, $\delta \in [0,1)$, если $a(t,y,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой по переменным $t \in R^1_+$, $y \in R^1_+$, $\eta \in R^1$ и на компактных подмножествах множества $R^1_+ \times R^1_+$ имеет место при всех $j,k,p = 0,1,2,\ldots$ оценка

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j(\alpha(y)\partial_y)^k\partial^p_\eta a(t,y,\xi,\eta)| \le c_{jkp}(1+|\xi|+|\eta|)^{m-p+\delta(k+j)}$$

с константами $c_{jkp} > 0$, не зависящими от t, y, η и $\xi \in R^{n-1}$.

Рассмотрим оператор вида

$$Au(x,t) = F^{-1}_{\alpha_{\eta\to t}} F_{\alpha_{y\to\eta}} F^{-1}_{\xi\to x}[a(t,y,\xi,\eta)F_{x\to\xi}[u(x,y)]], \tag{11}$$

где $F_{\alpha_{y\to\eta}}(F^{-1}_{\alpha_{y\to\eta}})$ — прямое (обратное) весовое преобразование, переводящее y в η (η в t).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть* A — *оператор вида* (11), *причем* $a(t,y,\xi,\eta) \in S^{m,\alpha,\delta}$, $m \in R^1, \delta \in [0,1)$. *Тогда найдется такой символ* $p(t,\xi,\eta) \in S^m_{\alpha,\delta}$, *что* $A = P(t,D_x,D_{\alpha,t})$, *где* $P(t,D_x,D_{\alpha,t})$ — *весовой псевдодифференциальный оператор с символом* $p(t,\xi,\eta)$. *Причем* $p(t,\xi,\eta) = \sqrt{\alpha(t)}\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \times$ $\times A(\frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}}\exp(-i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}))$. *При этом справедливо соотношение*

$$p(t,\xi,\eta) - \sum_{j=1}^{N-1}\frac{(i)^j}{j!}(\alpha(y)\partial_y)^j\partial^j_\eta a(t,y,\xi,\eta\,)|_{y=t} \in S^{m-N}_{\alpha,\delta}(\Omega)$$

при любых $N = 1,2,\ldots$.

Теорема 12. *Пусть* $P(t,D_x,D_{\alpha,t})$ — *весовой псевдодифференциальный оператор с символом* $p(t,\xi,\eta) \in S^m_{\alpha,\delta}$, $m \in R^1$, $\delta \in [0,1)$. *Пусть* $\mathrm{Re}\,p(t,\xi,\eta) \ge c(1+|\xi|+|\eta|)^m$ *для всех* $\xi \in R^{n-1}, \eta \in R^1, t \in K \subset R^1_+$, *где* K — *произвольное компактное множество. Тогда для любого* $s \in R^1$ *и* $u(t) \in C^\infty_0(K)$ *справедливо неравенство*

$$\mathrm{Re}\,(P(t,D_x,D_{\alpha,t})u(x,t),u(x,t)) \ge c_0\,\|u\|^2_{\frac{m}{2},\alpha} - c_1\,\|u\|^2_{s,\alpha}$$

с некоторыми константами $c_0 > 0$ *и* $c_1 > 0$.

Это неравенство является аналогом неравенства Гординга для весовых псевдодифференциальных операторов.

Изложим кратко схему доказательства теоремы 1.

Наряду с операторами $A^{(q)}_\pm(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)$, рассмотрим операторы

$$A^{(q)}_\pm(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u(\xi,t) = K^{(q)}_\pm(t,\xi,D_{\alpha,t})u(\xi,t) - \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}, \tag{12}$$

где $K^{(q)}_\pm(t,\xi,D_{\alpha,t})\,u = F^{-1}_\alpha[\lambda_\pm(t,\xi,\eta)\,F_\alpha[u]]$.

Наряду с пространством $H_{s,\alpha}\left(R_+^n\right)$, рассмотрим пространство $\widetilde{H}_{s,\alpha}\left(R_+^1\right)$ (s — действительное число), норма в котором является равенством $\|u\|_{s,\alpha,|\xi|} = \{\int\limits_{R^1} \left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^s |F_\alpha[u]|^2\, d\eta\}^{\frac{1}{2}}$. Обозначим $\|u\| = \|u\|_{L_2(R_+^1)}$.

Теорема 1 вытекает из совокупности следующих лемм.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* 1. *Пусть функции* $\lambda_\pm(t,\xi,\eta)$ *удовлетворяют условиям* 2 *и* 3. *Пусть* $q>1$ *— действительное число. Тогда для любой функции* $u(t)\in C_0^\infty(R_+^1)$ *и любого* $s_0\in R^1$ *справедливо неравенство*

$$(1+|\xi|^2)^q\,\|u\|^2 \le c\left(\|A_\pm^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)\|^2 \mp (1+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\,|u(0)|^2 + \|u\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}\right), \qquad (13)$$

где постоянная $c>0$ *не зависит от* $\xi\in R^{n-1}$ *и функции* $u(t)$. *Здесь* $C_0^\infty(R_+^1)$ *— пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций с носителем в* R_+^1.

Доказательство. Умножим почленно равенство (12) скалярно в $L_2(R_+^1)$ на функцию $\pm(1+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}u(t)$, получим равенство

$$\pm\left((1+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\mathrm{Re}\,(K_\pm^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t})u,u) - \mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t},u\right)\right) = \pm(1+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\mathrm{Re}\,(A_\pm^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,u). \qquad (14)$$

Здесь (u,v) — скалярное произведение в $L_2(R_+^1)$.

Используя теорему 12, получим оценку

$$\pm\mathrm{Re}\,(K_\pm^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t})u,u) \ge c_0\,\|u\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|} - c_1\,\|u\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}\,, \qquad (15)$$

где $s_0\in R^1$ — любое число, $c_0>0, c_1>0$ — константы, не зависящие от t, ξ и функции $u(t)$.

Используя неравенство Коши – Буняковского, получим неравенство

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\left|(A_\pm^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,u)\right| \le \varepsilon(1+|\xi|^2)^q\,\|u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left\|A_\pm^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \qquad (16)$$

для любого $\varepsilon>0$.

Воспользовавшись равенством $\mathrm{Re}\,(\frac{\partial u}{\partial t},u) = -\frac{1}{2}\,|u(0)|^2$, неравенствами (15), (16) в равенстве (14) и выбирая $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим утверждение леммы 1.

Лемма 2. *При выполнении условий леммы* 1 *для любой функции* $u(t)\in C_0^\infty(R_+^1)$ *и любого* $\varepsilon>0$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|^2_{q,\alpha,|\xi|} \le \varepsilon\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + c(\varepsilon)\left(\left\|A_\pm^{(q)}u\right\|^2 \mp (1+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\,|u(0)|^2\right) + c_1\,\|u\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}\,. \qquad (17)$$

Здесь постоянная $c(\varepsilon)>0$ *не зависит от* ξ,u, *а постоянная* $c_1>0$ *не зависит от* ε,ξ,u; $s_0\in R^1$ *— любое число.*

Доказательство. Умножим скалярно в $L_2(R_+^1)$ тождество (12) на функцию $\pm F_\alpha^{-1}[(1+|\xi|+ +|\eta|)^q F_\alpha[u]] = \Lambda_\pm^q(\xi,D_{\alpha,t})u$.

Получим равенство

$$\mathrm{Re}\,(K_\pm^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_\pm^q(\xi,D_{\alpha,t})u) - \mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t},\Lambda_\pm^q(\xi,D_{\alpha,t})u\right) = \mathrm{Re}\,(A_\pm^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,\Lambda_\pm^q(\xi,D_{\alpha,t})u). \qquad (18)$$

С помощью теорем 9 и 10 получим равенство

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t},\Lambda_\pm^q(\xi,D_{\alpha,t})u\right) = \mp\frac{1}{2}(1+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\,|u(0)| - \mathrm{Re}\,(M^\pm_{1,\frac{q}{2}}u,\Lambda_\pm^{\frac{q}{2}}u), \qquad (19)$$

где $M^\pm_{1,\frac{q}{2}}$ — коммутатор операторов $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\Lambda_\pm^{\frac{q}{2}}(\xi,D_{\alpha,t})$.

Используя теорему 5, получим равенство

$$\operatorname{Re}(K_{\pm}^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{q}(\xi,D_{\alpha,t})u)=$$
$$=\operatorname{Re}\left(K_{\pm}^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t})\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(\xi,D_{\alpha,t})u\right)+\operatorname{Re}\left(K_1(t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(\xi,D_{\alpha,t})u\right),$$

где $K_1(t,\xi,D_{\alpha,t})$ — коммутатор операторов $K_{\pm}^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t})$ и $\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(\xi,D_{\alpha,t})$. В силу теоремы 5 оператор $K_1(t,\xi,D_{\alpha,t})$ — есть весовой псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S_{\alpha,\delta}^{\frac{3}{2}q-1}$.

Используя в последнем равенстве теорему 12, получим оценку

$$\operatorname{Re}\left(K_{\pm}^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{q}(\xi,D_{\alpha,t})u\right)\geq c\,\|u\|_{q,\alpha,|\xi|}^2-c_1\,\|u\|_{s_0,\alpha,|\xi|}^2-\left|(K_1(t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(\xi,D_{\alpha,t})u)\right|$$

с некоторыми константами $c>0$ и $c_1>0$ для любого $s_0\in R^1$.

Применяя эту оценку и равенство (19) в равенстве (18), получим оценку

$$\|u\|_{q,\alpha,|\xi|}^2\leq c\Big(\left|(A_{\pm}^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,\Lambda_{\pm}^{q}(\xi,D_{\alpha,t})u)\right|\mp(1+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\,|u(0)|^2+$$
$$+\left|(M_{1,\frac{q}{2}}^{\pm}u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}u)\right|+\left|(K_1(t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(\xi,D_{\alpha,t})u)\right|\Big). \tag{20}$$

Используя теоремы 6, 7 и неравенство Коши – Буняковского, получим неравенство

$$\left|(M_{1,\frac{q}{2}}^{\pm}u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}u)\right|\leq\varepsilon(\|\partial_t u\|^2+\|u\|_{q,\alpha,|\xi|}^2)+c(\varepsilon)\,\|u\|^2 \tag{21}$$

для любого $\varepsilon>0$.

Используя теоремы 5, 6 и неравенство Коши – Буняковского, получим оценку

$$\left|(K_1(t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(\xi,D_{\alpha,t})u\right|\leq\varepsilon\,\|u\|_{q,\alpha,|\xi|}^2+c(\varepsilon)\,\|u\|^2. \tag{22}$$

Применяя оценки (21), (22) в правой части неравенства (20) и выбирая $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим неравенство (17).

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда для любой функции* $u(t)\in C_0^{\infty}(R_+^1)$ *справедлива оценка*

$$\|\partial_t u\|^2\leq c(\left\|A_{\pm}^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2\mp(1+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\,|u(0)|^2+\|u\|_{s_0,\alpha,|\xi|}), \tag{23}$$

где константа $c>0$ *не зависит от* $\xi,u,$. *Здесь* $s_0\in R^1$ *— любое число.*

Доказательство. Из (12) с помощью теоремы 6 получим оценку

$$\|\partial_t u\|^2\leq c(\left\|A_{\pm}^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|+\|u\|_{q,\alpha,|\xi|}^2).$$

Применяя в правой части этого неравенства лемму 2 и выбирая $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим оценку (23).

Из оценок (13), (17) и (23) вытекает справедливость теоремы 1 при $s=0$ для функций $v(x,t)\in C_0^{\infty}(R_+^n)$.

Так как множество $C_0^{\infty}(R_+^n)$ плотно в пространстве $H_{q,\alpha,q}\left(R_+^n\right)$, то получаем справедливость теоремы 1 для функций $v(x,t)\in H_{q,\alpha,q}\left(R_+^n\right)$. Справедливость теоремы 1 при $s>0$ доказывается стандартными методами (см. [10]).

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Изложим кратко схему доказательства теоремы 3. Наряду с операторами $A_{\pm}^{(q)}(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)$, рассмотрим операторы $A_{\pm,p,\mu}^{(q)}(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)$ вида

$$A_{\pm,p,\mu}^{(q)}(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v(x,t)=\frac{1}{p}\Lambda_{\pm}^{2r_0}(D_x,D_{\alpha,t})v+\mu K_{\pm}^{(q)}(t,D_x,D_{\alpha,t})v+(1-\mu)v-\frac{\partial v}{\partial t},$$

где $\Lambda_{\pm}^{2r_0}(D_x,D_{\alpha,t})v=\pm F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha[(1+|\xi|+|\eta|)^{2r_0}F_{x\to\xi}F_\alpha[v]],p=1,2,3,\ldots;\mu\in[0;1]$, $2r_0$ — натуральное число, $2r_0\geq q$.

Рассматривается задача, аналогичная задаче (2)–(3) с заменой в ней оператора $A_{-}^{(q)}$ на оператор $A_{-,p,\mu}^{(q)}$. Рассматривается также уравнение вида (4) с заменой в нем оператора $A_{+}^{(q)}$ на оператор $A_{+,p,\mu}^{(q)}$. Существование регуляризатора таких задач при $\mu = 0$ известно (см. [10]). Затем при всех $p = 1, 2, 3, \ldots$ и $\mu \in [0;1]$ доказываются коэрцитивные априорные оценки, аналогичные оценкам (5) и (6). С помощью продолжения по параметру μ устанавливается существование регуляризатора для задач, аналогичных задачам (2)–(3) и (4) при $\mu = 1$. Затем с использованием коэрцитивных априорных оценок и предельного перехода при $p \to +\infty$ показывается существование регуляризатора задач (2)–(3) и (4).

Теорема 4 доказывается аналогично теореме 3.

Библиографический список

1. *Келдыш, М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М.В. Келдыш // Докл. АН. – 1951. – Т. 77, № 2. – С. 181–183.
2. *Олейник, О.А.* Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О.А. Олейник // Докл. АН. – 1952. – Т. 87, № 6. – С. 885–887.
3. *Смирнов, М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1966. – 292 с.
4. *Рукавишников, В.А.* О коэрцитивности R_ν-обобщенного решения первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных / В.А. Рукавишников, А.Г. Ереклинцев // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 12. – С. 1680–1689.
5. *Антонцев, С.Н.* О локализации решений эллиптических уравнений с неоднородным анизотропным вырождением / С.Н. Антонцев, С.И. Шмарёв // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46, № 5. – С. 963–984.
6. *Вишик, М.И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М.И. Вишик, В.В. Грушин // Мат. сб. – 1969. – Т. 80 (112), вып. 4. – С. 455–491.
7. *Глушко, В.П.* Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В.П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными: Тр. семинара акад. С.Л. Соболева. – Новосибирск, 1978. – № 2. – С. 49–68.
8. *Баев, А.Д.* Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А.Д. Баев // Докл. АН. – 1982. – Т. 265, № 5. – С. 1044–1046.
9. *Баев, А.Д.* Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев // Докл. АН. – 2008. – Т. 422, № 6. – С. 727–728.
10. *Баев А.Д.* Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А.Д. Баев. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2008. – 240 с.

УДК 517.917

ОСИ СИММЕТРИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо*, Д.С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, Майкоп,
кафедра теоретической физики,
*кафедра информатики
E-mail: tlyachev@adygnet.ru

Вводится понятие оси симметрии N-типа. Доказывается, что векторное поле, определяемое системой дифференциальных уравнений с полиномами n-й степени в правых частях, не может иметь четного числа осей симметрии N-типа при $n = 2m, m \in \mathbb{N}$. Для случая $n = 2, 3$ проведено полное исследование данной системы на N-симметрию. В зависимости от числа осей симметрии N-типа найдены специальные формы записи квадратичных и кубичных систем, которые позволяют упростить качественное исследование таких систем.

Ключевые слова: полиномиальная система дифференциальных уравнений, ось симметрии, изоклины, центр, фокус.

Symmetry Axes of Planar Polynomial Differential Systems

V.B. Tlyachev, A.D. Ushkho*, D.S. Ushkho

Adyghe State University, Maykop,
Chair of Theoretical Physics,
*Chair of Informatics
E-mail: tlyachev@adygnet.ru

The notion of N-type axis of symmetry is introduced. It is proved that the vector field defined by system of the differential equations with n-order polynomials in a right hand, cannot have even number of axes of symmetry N-type at $n = 2m, m \in \mathbb{N}$. For $n = 2, 3$ full research of the given system on N-symmetry is carried out. Depending on the number of axes of N-type symmetry special forms of presenting of square and cubic systems, which allow to simplify qualitative research of such systems, are discovered.

Key words: polynomial differential systems, axis of symmetry, isoclines, center, focus.