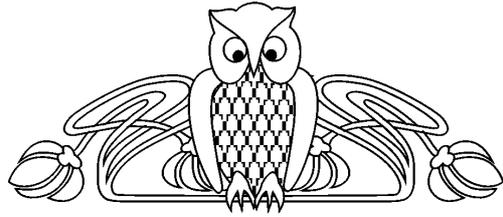




УДК 539.3

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАТИЧЕСКОГО ИЗГИБА И УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ



Р.А. Сафонов

Саратовский государственный университет,  
кафедра математической теории упругости и биомеханики  
E-mail: safonovra@gmail.com

В работе рассмотрена применение метода сплайн-коллокации для численного решения задач статического изгиба и установившихся колебаний тонких цилиндрических оболочек при локальных нагрузках. Приводятся максимальные значения перемещений и первые три резонансные частоты стальных оболочек.

**Ключевые слова:** статический изгиб тонкой оболочки, установившиеся колебания, метод сплайн-коллокации.

Static Bending and Steady-State Vibrations of Thin Cylindrical Shells Under Local Load

R.A. Safonov

Saratov State University,  
Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics  
E-mail: safonovra@gmail.com

The spline collocation method is being used for solving static bending and steady-state vibrations problems for thin cylindrical shell under local loads. Maximum displacement values and first three resonance frequencies are given.

**Key words:** static bending of thin shells, steady-state vibrations, spline collocation method.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается в рамках модели Кирхгофа – Лява тонкая круговая цилиндрическая оболочка из изотропного материала. Оболочка совершает установившиеся колебания под действием распределенных по одной из лицевых поверхностей локальных усилий, гармонических по времени. В срединной поверхности оболочки введена триортогональная система координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Безразмерные координаты  $\alpha$  и  $\beta$  отсчитываются по образующей и в окружном направлении соответственно, а  $\gamma$  — по нормали к срединной поверхности.

Схематическое изображение такой оболочки представлено на рис. 1. Компоненты вектора перемещений обозначим  $(u, v, w)$ . Геометрия оболочки задается параметрами

$$A = l = \text{const}, \quad B = R\phi = \text{const},$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R} = \text{const},$$

где  $l$  — длина оболочки,  $R$  — радиус кривизны срединной поверхности,  $\phi$  — угол раствора оболочки,  $\delta$  — стрела подъема оболочки (см. рис. 1). Отметим, что при таком способе параметризации плану оболочки соответствует единичный квадрат в координатах  $(\alpha, \beta)$ .

В дальнейшем будем считать, что зависимость всех характеристик НДС оболочки и внешней нагрузки от времени имеет вид

$$q(\alpha, \beta, t) = Q(\alpha, \beta) \cos(\omega t). \quad (1)$$

Система разрешающих уравнений для такой оболочки построена в [1]. Если воспользоваться формулой (1), разрешающие уравнения можно записать в относительно амплитуд перемещений

$$\begin{aligned} L_{11}U + L_{12}V + L_{13}W &= -X, \\ L_{21}U + L_{22}V + L_{23}W &= -Y, \\ L_{31}U + L_{32}V + L_{33}W &= -Z. \end{aligned} \quad (2)$$

В этой системе  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — компоненты амплитуд приложенных к оболочке внешних усилий,  $L_{i,j}$  — дифференциальные операторы, имеющие значения

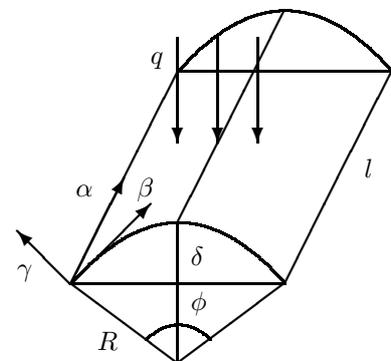


Рис. 1. Схема оболочки



$$\begin{aligned}
L_{11} &= \frac{D_{11}}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{C_{66}}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \rho h \omega^2, & L_{12} &= \frac{C_{11} \nu + \gamma_S}{AB} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, & L_{13} &= \frac{C_{11} \nu k_2}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\
L_{21} &= \frac{C_{22} \nu + C_{66} - D_{66} k_2^2}{AB} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, & L_{22} &= \frac{C_{66} + D_{66} k_2^2}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{C_{22}}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \rho h \omega^2, \\
L_{23} &= -\frac{D_{22} \nu k_2 - 2D_{66} k_2}{A^2 B} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \frac{C_{22} k_2 - D_{22} k_2^3}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{D_{22} k_2}{B^3} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3}, \\
L_{31} &= -\frac{C_{22} \nu k_2}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{2D_{66} k_2}{AB^2} \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2}, & L_{32} &= -\frac{C_{22} k_2}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{2D_{66} k_2}{A^2 B} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta}, \\
L_{33} &= -k_2^2 C_{22} - \frac{D_{11} \nu k_2^2}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{D_{22} k_2^2}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{D_{11}}{A^4} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \frac{D_{22}}{B^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - \\
&\quad - \frac{\nu(D_{11} + D_{22}) + 4D_{66}}{A^2 B^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \rho h \omega^2.
\end{aligned}$$

Коэффициенты  $D_{ij}$  и  $C_{ij}$  имеют значения

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_{66} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}, \quad C_{11} = C_{22} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}, \quad C_{66} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}.$$

Если ввести дополнительно гипотезы теории пологих оболочек [1], то операторы  $L_{ij}$  перепишутся в виде

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \frac{D_{11}}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{C_{66}}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \rho h \omega^2, & L_{12} &= \frac{C_{11} \nu + \gamma_S}{AB} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, & L_{13} &= \frac{C_{11} \nu k_2}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\
L_{21} &= \frac{C_{22} \nu + C_{66}}{AB} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, & L_{22} &= \frac{C_{66}}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{C_{22}}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \rho h \omega^2, & L_{23} &= \frac{C_{22} k_2}{B} \frac{\partial}{\partial \beta}, \\
L_{31} &= -\frac{C_{22} \nu k_2}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha}, & L_{32} &= -\frac{C_{22} k_2}{B} \frac{\partial}{\partial \beta}, \\
L_{33} &= -k_2^2 C_{22} - \frac{D_{11}}{A^4} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \frac{D_{22}}{B^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - \frac{\nu(D_{11} + D_{22}) + 4D_{66}}{A^2 B^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \rho h \omega^2.
\end{aligned}$$

При постановке краевой задачи для приведенной системы уравнений необходимо на каждом крае оболочки записать по четыре граничных условия. В случае жесткой заделки края  $\alpha = \text{const}$  имеем.

$$U = V = W = W_{,\alpha} = 0.$$

Шарнирно закрепленному краю соответствуют условия

$$W = 0, \quad V = 0, \quad U = 0, \quad W_{,\alpha\alpha} = 0.$$

Для края  $\beta = \text{const}$  граничные условия имеют аналогичный вид.

Локальные усилия, приложенные к внешней поверхности оболочки, будем задавать функцией вида

$$Q(\alpha, \beta) = C \cos^k \left[ \frac{\pi}{2} \frac{|f(\alpha, \beta)|}{\max |f(\alpha, \beta)|} \right].$$

Функция  $f(\alpha, \beta)$  задает кривую, вдоль которой приложена локальная нагрузка. Коэффициент  $C$  связан с равнодействующей  $Q$  приложенной нагрузки соотношением

$$C \int_S \cos^k \left[ \frac{\pi}{2} \frac{|f(\alpha, \beta)|}{\max |f(\alpha, \beta)|} \right] ds = Q,$$

где  $S$  — область оболочки.

В случае, когда показатель степени  $k$  имеет достаточно большое значение, при удалении от зоны приложения нагрузки значения функции  $f$  очень быстро убывают от своего максимума до значений, практически неотличимых от нуля.

Все изложенные выше выкладки сохраняют справедливость при решении задач статического изгиба оболочки. В этом случае вместо амплитуд в уравнениях (2) будут фигурировать сами характеристики НДС оболочки, а значение частоты внешней нагрузки  $\omega$  будет равно нулю.



## 2. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Поставленную в предыдущем параграфе задачу при фиксированной частоте внешней нагрузки  $\omega$  приведем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода сплайн-коллокации [2].

Для аппроксимации перемещений в тангенциальных направлениях используем базисные сплайны третьей степени, а для нормального перемещения  $w$  необходимо брать сплайны пятой степени [3]

$$U = \sum_{j=-1}^{N+1} B_{3,j}(\beta) U_j(\alpha), \quad V = \sum_{j=-1}^{N+1} B_{3,j}(\beta) V_j(\alpha), \quad W = \sum_{j=-2}^{N+2} B_{5,j}(\beta) W_j(\alpha). \quad (3)$$

Для простоты полагаем, что условия закрепления краев  $\beta = 0$  и  $\beta = 1$  допускают применение классического метода сплайн-коллокации [2]. Согласно этому методу, граничные условия на указанных краях удовлетворяются тождественно подбором линейных комбинаций В-сплайнов. Формулы (3) в этом случае переписутся в виде

$$U = \sum_{j=0}^N \psi_j(\beta) U_j(\alpha), \quad V = \sum_{j=0}^N \psi_j(\beta) V_j(\alpha), \quad W = \sum_{j=0}^N \varphi_j(\beta) W_j(\alpha). \quad (4)$$

Система разрешающих уравнений (2) записывается с учетом (4) в точках коллокации  $\beta = \beta_i^*$  [5]. В результате имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $W_j$ ,  $U_j$  и  $V_j$ . В этих уравнениях присутствуют производные составляющих нормальных перемещений до четвертого порядка включительно и производные составляющих тангенциальных смещений до второго порядка включительно. Краевыми условиями для этой системы уравнений являются граничные условия на краях  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$ , записанные с учетом (4) в точках коллокации.

Таким образом, имеем систему дифференциальных уравнений с граничными условиями на обоих краях интервала интегрирования. Поскольку любую систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно привести к нормальной форме Коши, для решения краевой задачи такого вида можно использовать ряд численных методов, среди которых стоит отметить метод дискретной ортогонализации С.К. Годунова [4], метод А.А. Абрамова [5] или метод Ю.И. Виноградова [6]. В данной работе использовался метод дискретной ортогонализации.

При решении задач вибрационного изгиба особое значение имеет определение резонансных частот оболочки. Описанный подход позволяет определить амплитуды характеристик НДС пластинки при фиксированной частоте колебаний. Для вычисления резонансных частот оболочки следует построить зависимость амплитуд характеристик НДС пластинки от частоты  $\omega$  и по ней определить точки, в которых имеется резонанс. Критерием резонанса является смена монотонности максимального значения характеристик НДС. Построение аналогичной зависимости с меньшим шагом в окрестностях найденных точек резонанса позволит уточнить значения резонансных частот.

## 3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

В качестве примеров применения изложенной методики был решен ряд задач для стальных оболочек ( $E = 2 * 10^{11}$  Па,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>) с жестко заделанным контуром.

Размер плана оболочки по направлению координаты  $\beta$  равен 1 м, толщина  $h = 0.01$  м, длина образующей варьировалась. Задачи решались при нескольких значениях стрелы подъема оболочки  $\delta$ . Радиус кривизны и угол раствора оболочки, соответствующие этим значениям стрелы подъема, приводятся в табл. 1.

Максимальные значения перемещений при статическом изгибе и первые три критические частоты оболочки приводятся в табл. 2 и 3 соответственно. Верхний индекс 1 в табл. 2 и 3 соответствует классической теории оболочек, а индекс 2 — теории пологих оболочек. Внешняя нагрузка при вычислениях задавалась формулой

$$Q(\alpha, \beta) = C \cos^k \left[ \frac{\pi}{2} |\alpha - \bar{\alpha}| \right], \quad k = 5000, \quad \bar{\alpha} = 0.5.$$

Таблица 1

$k$	$\delta$ , м	$R$ , м	$\phi$
1	0.01	12.5050	0.0800
2	0.1	1.3000	0.7896
3	0.2	0.7250	1.5220



Как и следовало ожидать, вычислительные эксперименты показали, что при увеличении длины образующей оболочки жесткость оболочки снижается. Увеличение стрелы подъема оболочки приводит к появлению расхождения между результатами, полученными по классической теории и по теории пологих оболочек, однако при рассмотренных значениях стрелы подъема это расхождение остается незначительным.

Таблица 2

Максимальные значения перемещений при статическом изгибе оболочки

$\delta$ , м	Величина	$c = l/2R \sin(\phi/2)$				
		0.2	0.5	1.0	2.0	5.0
0.01	$10^{-6} w_{max}^1$	0.044	1.490	8.935	20.309	47.055
	$10^{-6} w_{max}^2$	0.044	1.490	8.934	20.306	47.049
	$10^{-9} u_{max}^1$	0.018	0.997	9.952	28.574	73.902
	$10^{-9} u_{max}^2$	0.018	0.996	9.949	28.572	73.910
	$10^{-8} v_{max}^1$	0.007	0.585	4.621	10.901	25.822
	$10^{-8} v_{max}^2$	0.007	0.584	4.617	10.893	25.805
0.1	$10^{-7} w_{max}^1$	0.369	2.525	5.265	9.853	17.828
	$10^{-7} w_{max}^2$	0.369	2.524	5.263	9.848	17.817
	$10^{-9} u_{max}^1$	0.143	2.007	6.191	13.719	28.909
	$10^{-9} u_{max}^2$	0.143	2.006	6.189	13.716	28.908
	$10^{-9} v_{max}^1$	0.593	8.219	17.974	35.134	75.036
	$10^{-9} v_{max}^2$	0.590	8.198	17.931	35.056	74.885
0.2	$10^{-7} w_{max}^1$	0.274	1.065	2.072	3.614	5.680
	$10^{-7} w_{max}^2$	0.274	1.063	2.068	3.607	5.667
	$10^{-9} u_{max}^1$	0.188	1.642	4.616	9.952	21.306
	$10^{-9} u_{max}^2$	0.188	1.640	4.607	9.932	21.243
	$10^{-9} v_{max}^1$	0.735	4.732	9.510	17.954	35.204
	$10^{-9} v_{max}^2$	0.730	4.711	9.471	17.888	35.169

Таблица 3

Первые резонансные частоты оболочки при вибрационном изгибе

$\delta$	$\omega$	$c$				
		0.2	0.5	1.0	2.0	5.0
0.01	$\omega_1^1$	8829	1625	695	530	500
	$\omega_1^2$	8830	1625	695	530	500
	$\omega_2^1$	10090	3030	2130	840	935
	$\omega_2^2$	10090	3030	2130	840	935
	$\omega_3^1$	12608	5735	3825	1485	1170
	$\omega_3^2$	12610	5735	3825	1485	1170
0.1	$\omega_1^1$	9635	3255	2025	1665	1575
	$\omega_1^2$	9635	3260	2035	1670	1585
	$\omega_2^1$	10470	4140	3680	2405	1925
	$\omega_2^2$	10475	4140	3680	2410	1930
	$\omega_3^1$	12605	5685	4080	3450	2260
	$\omega_3^2$	12610	5695	4085	3460	2265
0.2	$\omega_1^1$	11160	4085	2270	1520	1310
	$\omega_1^2$	11170	4105	2290	1545	1335
	$\omega_2^1$	12630	5210	3930	2895	1545
	$\omega_2^2$	11380	5230	3955	2915	1565
	$\delta_3^1$	15285	7000	5345	3615	2035
	$\delta_3^2$	12650	7010	5365	3640	2060

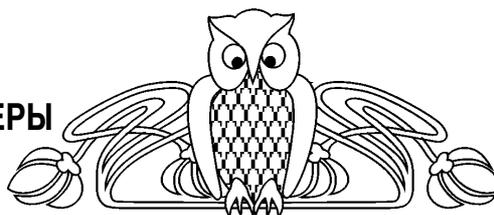


## Библиографический список

1. Амбарцумян, С.А. Теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян / под ред. И.К. Снитко. М.: Физматгиз, 1961. С. 384.
2. Григоренко, Я.М. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (обзор) / Я.М. Григоренко, Н.Н. Крюков // Прикл. механика. 1995. Т. 31, № 6. С. 3–27.
3. Завьялов, Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. М.: Наука, 1980. С. 352.
4. Годунов, С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // УМН. 1961. май – июнь. Т. XVI, № 3(99). С. 171–174.
5. Абрамов, А.А. О переносе граничных условий для систем линейных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) / А.А. Абрамов // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1961. Т. I, № 3. С. 542–545.
6. Виноградов, Ю.И. Численный метод переноса краевых условий для жестких дифференциальных уравнений строительной механики / Ю.И. Виноградов, А.Ю. Виноградов, Ю.А. Гусев // Мат. моделирование. 2002. Т. 14, № 9. С. 3–8.

УДК 532.517.2:534.2

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ НЕИЗОЭТЕРМИЧЕСКОГО ОБТЕКАНИЯ СФЕРЫ ПОТОКОМ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В СТЕСНЕННЫХ УСЛОВИЯХ



Б.А. Снигерев<sup>1</sup>, Ф.Х. Тазюков<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт механики и машиностроения

Казанского научного центра РАН,

лаборатория моделирования технологических процессов;

<sup>2</sup> Казанский государственный технологический университет,

кафедра теоретической механики и сопротивление материалов

E-mail: Snigerev@mail.knc.ru, Tazyukov@mail.ru

Исследуется структура течения и теплообмен при обтекании сферы осесимметричным потоком вязкоупругой жидкости. Движение жидкости описывается уравнениями сохранения массы, импульса и энергии, дополненные определяющим реологическим конститутивным соотношением состояния среды Фан-Тьен Таннера. Показано, что ползущее течение вязкоупругой жидкости в следе за сферой во многом отличается от ньютоновского. Отличия проявляются в нелинейном характере структуры течения и образовании так называемого «отрицательного следа». Численно показано существенное влияние температурного напора между сферой и средой, времени релаксации напряжений жидкости на характер нелинейного течения в следе. Исследованы гидродинамика и теплообмен при неизоэтермическом обтекании сферы вязкоупругой жидкостью с граничными условиями прилипания или частичного проскальзывания на твердой поверхности сферы.

**Ключевые слова:** вязкоупругая жидкость, осесимметричное течение, теплообмен.

## ВВЕДЕНИЕ

Движение тел сферической и закругленной формы в жидкостях, обладающих неньютоновскими свойствами применяется в вискозиметрии при измерении вязкости жидкостей, в том числе растворов и расплавов полимеров. Экспериментальные и численные исследования обтекания тел потоком вязкоупругой жидкости позволили обнаружить неньютоновское поведение жидкости в следе за сферой, проявляющееся в том, что скорость восстанавливается из нулевого значения на твердой стенке до скорости в основном потоке немонотонно [1, 2]. В настоящей работе методами численного моделирования исследуются структура течения и теплообмен при обтекании сферы потоком вязкоупругой

## The Feature of Non-Isothermal Viscoelastic Flows Around Sphere at Obstruction Condition

B.A. Snigerev, F.K. Tazyukov

<sup>1</sup>Institute of Mechanics and Engineering RAS,

Laboratory of Modelling of Technological processes;

<sup>2</sup>Kazan State Technological University,

Chair of Mechanical Engineering

E-mail: Snigerev@mail.knc.ru, Tazyukov@mail.ru

The numerical study is performed for study of the viscoelastic flow characteristics and heat transfer around sphere. The flow of liquid is described by equations of conservation of mass, momentum and thermal energy with rheological constitutive equation of Phan-Thien Tanner (PTT). This model represents generalized Maxwell type model with two additional parameters developed from kinetic theory of polymers. The nonlinear behaviour of fluid velocity behind body (<<negative wake>>) is observed. The paper numerically shows the essential influence of relaxation time and heating of sphere for viscoelastic structure of the flow in wake. The heat transfer exchange in non-isothermal flow around sphere with slip and noslip condition on walls has been investigated.

**Key words:** viscoelastic fluid, axisymmetric flow, heat transfer.