$$\triangle\nu_2\{-10, 11i\} < 0.23 \cdot 10^{-28}, \qquad \triangle\nu_3\{-10, 11i\} < 0.27 \cdot 10^{-25}.$$

Обозначение $\triangle\nu_j\{-10, 11i\}$ представляет собой модуль разности чисел, приближающих одно и то же значение ν_j, но полученных при помощи разных λ: $\lambda = -10$ и $\lambda = 11i$.

Библиографический список

1. *Дородницын А.А.* Избранные научные труды: В 2 т. М., 1997. Т. 1. 396 с.

2. *Малеко Е.М., Королева В.В.* О построении следов «подходящих резольвент» степеней возмущенного оператора // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронеж. весенней мат. школы «Понтрягинские чтения – XV». Воронеж, 2004. С. 141.

3. *Садовничий В.А., Дубровский В.В., Малеко Е.М.* Об одном способе приближенного нахождения собственных чисел оператора Штурма – Лиувилля // Докл. АН. 1999. Т. 369, № 1. С. 16–18.

4. *Садовничий В.А., Дубровский В.В., Малеко Е.М., Попов А.Ю.* Корректность метода А.А. Дородницына приближенного вычисления собственных значений одного класса краевых задач // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 4. С. 471–476.

5. *Садовничий В. А.* Теория операторов. 2-е изд. М., 1986. 386 с.

6. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М., 1983. 411 с.

УДК 517.54

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА М.А. ЛАВРЕНТЬЕВА ОБ ОТОБРАЖЕНИИ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА МНОГОУГОЛЬНИК В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ВЕРШИН

Р.Б. Салимов, П.Л. Шабалин

Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
кафедра высшей математики
E-mail: Pavel.Shabalin@mail.ru

В работе рассмотрено обобщение обратной задачи М.А. Лаврентьева о конформном отображения полуплоскости на некоторый многоугольник на случай многоугольника с бесконечным числом вершин. Считаются заданными внутренние углы многоугольника при неизвестных вершинах и прообразы этих вершин на вещественной оси. При некоторых ограничениях на величины углов при вершинах и на прообразы вершин, получена формула для искомого отображения.

Ключевые слова: интеграл Шварца – Кристофеля, обратная задача, показатель сходимости.

The M.A. Lavrentiev Inverse Problem on Mapping of Half-Plane Onto Polygon with Infinite Set of Vertices

R.B. Salimov, P.L. Shabalin

Kazan State University of Architecture and Engineering,
Chair of Higher Mathematics
E-mail: Pavel.Shabalin@mail.ru

The authors consider a generalization of the M.A.Lavrentiev inverse problem on a conformal mapping of half-plane onto interiority of a polygon for the case where the set of vertices of this polygon is infinite. We assume that the inner angles at unknown vertices and the image of the vertices under the conformal mapping on the real line are given. Under certain restrictions on values of the angles and on the sequence of points of the real line that are preimages of the vertices the formula for such a mapping is obtained.

Key words: Schwarz – Christoffel inteqral, inverse problem, exponent of convergence.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\{t_k\}$, $\{t_{-k}\}$, $k = \overline{1,\infty}$, — заданные последовательности точек вещественной оси, сходящиеся к $+\infty$, $-\infty$ соответственно, $-\infty < \ldots < t_{-k} < \ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < +\infty$, $t_0 = 0$. Заданы последовательности действительных чисел $\alpha_k \in (0,1)$, $\alpha_{-k} \in (0,1)$, $k = \overline{1,\infty}$, удовлетворяющие условиям $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{-k} = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 1$.

Требуется определить функцию, конформно отображающую полуплоскость $G = \{\zeta = \xi + i\eta, \eta > 0\}$ на многоугольник D_z в плоскости $z = x+iy$, внутренний угол которого при вершине A_k (A_{-k}), отвечающей точке t_k (t_{-k}) действительной оси плоскости ζ, равен $\alpha_k\pi$ $(\alpha_{-k}\pi)$. Смежные углы $\kappa_k\pi = \pi - \alpha_k\pi$, $\kappa_{-k}\pi = \pi - \alpha_{-k}\pi$ стремятся к нулю при $k \to \infty$. Угол наклона к вещественной оси звена A_kA_{k+1} равен $\pi\Big(\beta_0 + \sum\limits_{j=1}^{k} \kappa_j\Big)$, где $\beta_0\pi$ — угол наклона к вещественной оси звена $A_{-1}A_1$. Угол наклона к вещественной оси звена $A_{-k-1}A_{-k}$ равен $\pi\Big(\beta_0 - \sum\limits_{j=1}^{k} \kappa_{-j}\Big)$.

Для определенности будем считать, что $|\beta_0| < 1/2$. Примем, что существуют конечные пределы

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\kappa_j = \kappa_+, \qquad \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\kappa_{-j} = \kappa_-. \tag{1}$$

Линию $L_z = \partial D_z$ будем считать жордановой кривой, состоящей из двух ломаных линий с бесконечным числом звеньев A_kA_{k+1} и $A_{-k-1}A_{-k}$, $k = \overline{1,\infty}$. Вершины многоугольника заранее не задаются.

Подобная обратная задача в случае многоугольника с конечным числом вершин рассмотрена М.А.Лаврентьевым [1, с. 179, 226] с привлечением интеграла Шварца – Кристофеля.

2. ПОСТРОЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть $z = z(\zeta)$ — функция, отображающая конформно полуплоскость G на область D_z, когда точкам $A_{-\infty},\dots,A_{-k},\dots,A_{-1},O,A_1,\dots,A_k,\dots,A_\infty$ (O – точка звена $A_{-1}A_1$, отличная от концов) отвечают соответственно $-\infty,\dots,t_{-k},\dots,t_{-1},t_0,t_1\dots,t_k,\dots,+\infty$ оси $O\xi$.

Для точек звеньев A_kA_{k+1}, $A_{-k-1}A_{-k}$ имеем

$$z'(t) = |z'(t)|e^{i\nu(t)}, \quad t\in(t_k,t_{k+1}),\ t\in(t_{-k-1},t_{-k}), \tag{2}$$

причем для $\nu(t) = \arg z'(t)$ справедлива формула

$$\nu(t) = \begin{cases} \pi\left(\beta_0 + \sum\limits_{j=1}^{k}\kappa_j\right), & t\in(t_k,t_{k+1}), \quad k=\overline{1,\infty}, \\ \pi\beta_0, \quad t\in(t_{-1},t_1), \\ \pi\left(\beta_0 - \sum\limits_{j=1}^{k}\kappa_{-j}\right), & t\in(t_{-k-1},t_{-k}), \quad k=\overline{1,\infty}, \end{cases}$$

поэтому $\nu(-\infty) = \pi(\beta_0-\kappa_-)$, $\nu(+\infty) = \pi(\beta_0+\kappa_+)$. Приращение функции $\nu(t)$ при обходе вещественной оси в положительном направлении равно

$$\nu(+\infty) - \nu(-\infty) = \pi(\kappa_+ + \kappa_-) = \kappa\pi > 0. \tag{3}$$

Будем считать, что $\kappa > 1$.

Если $1 < \kappa < 2$, то внутренний угол при вершине A_∞ будет меньше π. При $\kappa = 2$ этот угол будет равен π, если $2 < \kappa < 3$, то внутренний угол при вершине будет лежать в интервале $(\pi, 2\pi)$, при $\kappa > 3$ область D_z будет неоднолистной, так как указанный угол будет больше 2π.

Равенство (2) представим в виде

$$\mathrm{Re}\Big[e^{-i(\pi/2+\nu(t))}z'(t)\Big] = 0. \tag{4}$$

Перепишем краевое условие (4), устраняя разрывы функции $\nu(t)$.Для этого потребуем, чтобы сходились ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{t_j} < +\infty, \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{-t_{-j}} < +\infty,$$

и введем функции ([2], с.108–113)

$$P_-(\zeta) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta}{t_{-j}}\right)^{\kappa_{-j}}, \qquad P_+(\zeta) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta}{t_j}\right)^{\kappa_j},$$

понимая под $\arg(1-\zeta/t_j)$ однозначную ветвь, обращающуюся в нуль при $\zeta = 0$ и непрерывную в плоскости ζ, разрезанной по части вещественной оси, соединяющей точки $t = t_j$, $t = +\infty$ при $j > 0$ и соединяющей точки $t = -\infty$, $t = t_j$, при $j < 0$. Потребуем, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{t_{-k-1}}{t_{-k}} = c_-, \qquad 1 < c_-, \tag{5}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{t_{k+1}}{t_k}=c_+,\qquad 1<c_+, \tag{6}$$

тогда $t_{k+1}-t_k=(c_+-1)t_k+o(1)t_k$, значит, для достаточно больших k имеем $t_{k+1}-t_k>1$.

Легко видеть, что

$$\arg P_-(t)=\begin{cases}0, & t>t_{-1},\\ \sum\limits_{j=1}^{k}\kappa_{-j}\pi, & t\in(t_{-k-1},t_{-k}),\end{cases}\qquad \arg P_+(t)=\begin{cases}0, & t<t_1,\\ -\sum\limits_{j=1}^{k}\kappa_{j}\pi, & t\in(t_k,t_{k+1}),\end{cases}$$

следовательно,

$$\arg P_-(t_{-k}+0)-\arg P_-(t_{-k}-0)=-\kappa_{-k}\pi,\qquad k=\overline{1,\infty},$$
$$\arg P_+(t_k+0)-\arg P_+(t_k-0)=-\kappa_k\pi,\qquad k=\overline{1,\infty}.$$

С учетом (3) краевое условие (4) запишем следующим образом:

$$\mathrm{Re}\Big[e^{-i(\pi/2+\pi\beta_0)}P_+(t)P_-(t)z'(t)\Big]=0.$$

Будем искать решение последней задачи в классе функций $z'(\zeta)$, для которых ограничено произведение $P_+(\zeta)P_-(\zeta)z'(\zeta)$ в области G, включая ее границу (этим определяется поведение $z'(t)$ вблизи t_k, t_{-k}, $k=\overline{1,\infty}$, и $t=\infty$), тогда [3, с. 270] $e^{-i\pi/2-i\pi\beta_0}P_+(\zeta)P_-(\zeta)z'(\zeta)=iC$, где C — действительная произвольная постоянная, которую в дальнейшем будем считать отрицательной. Далее находим

$$z'(\zeta)=-\frac{Ce^{i\pi\beta_0}}{P_+(\zeta)P_-(\zeta)}. \tag{7}$$

Теперь при условии (1) изучим поведение функций $P_+(\zeta)$, $P_-(\zeta)$. Для функций

$$n_+^*(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<t_1,\\ \sum\limits_{j=1}^{k-1}\kappa_j, & t_{k-1}\le x<t_k,\end{cases}\qquad n_-^*(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<-t_{-1},\\ \sum\limits_{j=1}^{k-1}\kappa_{-j}, & -t_{-k+1}\le x<-t_{-k},\end{cases}$$

в интервале $(0,+\infty)$ будем считать выполненными условия

$$\kappa_- - n_-^*(x)=\frac{\alpha_-(x)}{x^\beta},\qquad 0<\alpha_-(x)<M_\alpha, \tag{8}$$

$$\kappa_+ - n_+^*(x)=\frac{\alpha_+(x)}{x^\beta},\qquad 0<\alpha_+(x)<M_\alpha, \tag{9}$$

для некоторого числа β, $0<\beta\le 1$, и постоянной M_α. Отметим, что при переходе через точку t_k величина $\alpha_+(x)$ уменьшается, так как $\alpha_+(t_k+0)=\alpha_+(t_k-0)-\kappa_k t_k^\beta$, где $\alpha_+(t_k-0)=r_{k-1}^+t_k^\beta$,

$$r_{k-1}^+=\kappa_+-\sum_{j=1}^{k-1}\kappa_j.$$

Далее нам понадобится следующая

Лемма 1. *Если выполнены условия* (1), (6), (9), *то справедливо представление* $P_+(\zeta)= =\zeta^{\kappa_+}A_+(\zeta)$, *в котором аналитическая в верхней полуплоскости функция* $A_+(\zeta)$ *при* $\zeta=re^{i\theta}$, $\delta<\theta\le\pi$, $\delta>0$, $r>t_1$, *удовлетворяет неравенству*

$$|A_+(\zeta)|<\left(\frac{2}{t_1}\right)^{\kappa_+}\exp\left\{\frac{M_\alpha}{\beta t_1^\beta\sin(\delta/2)}\right\},$$

граничные значения $A_+(\zeta)$ *обращаются в нуль порядка* κ_k, *только в точках* t_k *и на интервале* (t_k,t_{k+1}) *для достаточно большого числа* k *удовлетворяют соотношению*

$$\frac{1}{e^{N_+}}+o(1)<\frac{|A_+(t)|t_1^{\kappa_k}t_k^{\kappa_k}}{(t-t_k)^{\kappa_k}(1-1/c_+)^{\kappa_{k+1}}}<e^{N_+}+o(1),\qquad N_+=\frac{t_1^{-\beta}M_\alpha}{\beta(1-1/c_+)}.$$

Для доказательства интегральное представление функции $\ln P_+(\zeta)$ [2, с. 113] согласно (8) запишем так

$$\ln P_+(\zeta) = \kappa_+ \int\limits_{t_1}^{+\infty} \frac{-\zeta}{x(x-\zeta)}\,dx + \zeta \int\limits_{t_1}^{+\infty} \frac{\alpha_+(x)}{x^{1+\beta}(x-\zeta)}\,dx.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{t_1}^{+\infty} \frac{-\zeta}{x(x-\zeta)}\,dx = \ln(t_1-\zeta) - \ln t_1$$

(здесь под $\ln z$ понимаем ветвь, однозначную в плоскости разрезанной по линии соединяющей точки 0, ∞; под $\ln(x-\zeta)$ — ветвь, однозначную в плоскости, разрезанной по линии, соединяющей точки ζ, ∞), получим

$$\ln P_+(\zeta) = \kappa_+ \ln\Bigl(1-\frac{\zeta}{t_1}\Bigr) + \zeta \int\limits_{t_1}^{+\infty} \frac{\alpha_+(x)}{x^{1+\beta}(x-\zeta)}\,dx. \tag{10}$$

Заметив, что $\ln(1-\zeta/t_1) = \ln\zeta + \ln(t_1/\zeta - 1) - \ln t_1$, на основании (10) для указанных z при больших $r = |z|$ будем иметь

$$\ln P_+(\zeta) = \ln \zeta^{\kappa_+} + \ln A_+(\zeta),$$

где

$$\ln A_+(\zeta) = \kappa_+ \left[\ln\left(\frac{t_1}{\zeta} - 1\right) - \ln t_1\right] + \zeta \int\limits_{t_1}^{+\infty} \frac{\alpha_+(x)}{x^{1+\beta}(x-\zeta)}\,dx.$$

Для $\zeta = re^{i\theta}$, $r > t_1$, $\delta < \theta < 2\pi - \delta$, δ — достаточно малое положительное число, $\theta = \mathrm{const}$, с учетом неравенств $|\alpha_+(x)| < M_\alpha$ и $|x-\zeta| > (x+r)\sin(\delta/2)$, $0 < x < +\infty$, имеем

$$\left|\zeta \int\limits_{t_1}^{+\infty} \frac{\alpha_+(x)}{x^{1+\beta}(x-\zeta)}\,dx\right| < \frac{M_\alpha r}{\sin(\delta/2)} \int\limits_{t_1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\beta}(x+r)} < \frac{M_\alpha}{\beta t_1^\beta \sin(\delta/2)}.$$

В формуле (10) перейдем к пределу при $\zeta \to t$, $t > 0$, $\mathrm{Im}\zeta > 0$, тогда получим

$$\ln P_+(t) = \kappa_+ \ln\left(\frac{t_1 - t}{t_1}\right) + t\pi i \frac{\alpha_+(t)}{t^{1+\beta}} + t \int\limits_{t_1}^{+\infty} \frac{\alpha_+(x)}{x^{1+\beta}(x-t)}\,dx.$$

Здесь $\ln\Bigl((t_1-t)/t_1\Bigr) = \ln(t_1-t) - \ln t_1$, $\ln(t_1-t) = \ln(t-t_1) + i\pi$ при $t > t_1$, $\ln t_1$ — действительная величина, следовательно, при $t > t_1$

$$\ln|P_+(t)| = \kappa_+ \left(\ln\frac{t-t_1}{t_1}\right) + I_+(t),\ \ I_+(t) = t \int\limits_{t_1}^{+\infty} \frac{\alpha_+(x)}{x^{1+\beta}(x-t)}\,dx. \tag{11}$$

Интеграл последней формулы запишем в следующем виде:

$$I_+(t) = \left(\int\limits_{t_1}^{t_{k-1}} + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+2}} + \int\limits_{t_{k+2}}^{+\infty}\right) \frac{t\alpha_+(x)\,dx}{x^{1+\beta}(x-t)} = I_{+,1}(t) + I_{+,2}(t) + I_{+,3}(t). \tag{12}$$

При $t_k \le t \le t_{k+1}$

$$0 < I_{+,3}(t) < M_\alpha \int\limits_{t_{k+2}}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\beta}(x/t-1)} = \frac{M_\alpha}{t^\beta} \int\limits_{t_{k+2}/t}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1+\beta}(\tau-1)} < \frac{M_\alpha}{t_{k+2}^\beta (t_{k+2}/t - 1)(1+\beta)}.$$

При $t_1 > 1$, $t_k - t_{k-1} > 1$ и $t_k \leq t \leq t_{k+1}$

$$0 < |I_{+,1}(t)| < M_\alpha \int\limits_{t_1}^{t_{k-1}} \frac{dx}{x^{1+\beta}(1-x/t)} < \frac{M_\alpha}{(1-t_{k-1}/t_k)} \left[\frac{1}{t_1^\beta} - \frac{1}{t_{k-1}^\beta}\right] \frac{1}{\beta}$$

для достаточно больших t_k. Наконец для $t \in (t_k, t_{k+1})$ рассмотрим интеграл $I_{+,2}(t)$, который, учитывая равенство $\alpha_+(x)/x^\beta = r_k^+(x)$, $x \in (t_k, t_{k+1})$, представим в виде

$$I_{+,2}(t) = t \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{r_{k-1}^+ \, dx}{x(x-t)} + t \int\limits_{t_{k+1}}^{t_{k+2}} \frac{r_{k+1}^+ \, dx}{x(x-t)} + \lim_{\epsilon \to 0} \left[\int\limits_{t_k}^{t-\epsilon} \frac{r_k^+ \, dx}{x(x-t)} + \int\limits_{t+\epsilon}^{t_{k+1}} \frac{r_k^+ \, dx}{x(x-t)}\right].$$

После интегрирования получим

$$I_{+,2}(t) - \kappa_k \ln\frac{t-t_k}{t_k} - \kappa_{k+1} \ln\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}} = -r_{k-1}^+ \ln\frac{t-t_{k-1}}{t_{k-1}} + r_{k+1}^+ \ln\frac{t_{k+2}-t}{t_{k+2}}. \tag{13}$$

Здесь в силу условия (6) для всех достаточно больших чисел k имеем

$$\lim_{k\to\infty} r_{k-1}^+ \ln\frac{t-t_{k-1}}{t_{k-1}} \leq \lim_{k\to\infty} r_{k-1}^+ \ln\Big(c_+^2 - 1 + o(1)\Big) = 0$$

и аналогично $\lim\limits_{k\to\infty} r_{k+1}^+ \ln[(t_{k+2}-t)/t_{k+2}] = 0$. Итак, правая часть формулы (13) есть бесконечно малая функция при $t_k \to \infty$. Теперь на основе (12) заключаем, что для достаточно больших t_k и $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ имеем

$$\left|I_+(t) - \kappa_k \ln\frac{t-t_k}{t_k} - \kappa_{k+1} \ln\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}}\right| \leq N_+ + o(1), \qquad N_+ = \frac{t_1^{-\beta} M_\alpha}{\beta(1-1/c^+)}. \tag{14}$$

Последняя оценка завершает доказательство леммы 1.

Пусть τ_+ — показатель сходимости последовательности $\{t_j\}$, причем существует предел

$$\tau_+ = \lim_{j\to\infty} \frac{\ln j}{\ln t_j} > 0, \tag{15}$$

который, как показано в работе [2, с. 118], должен удовлетворять неравенству $\tau_+ < 1$. Поэтому для достаточно больших $j > N$, малого положительного числа ϵ и $\tau_+ > 0$ будем иметь

$$0 < \tau_+ - \epsilon < \frac{\ln j}{\ln t_j} < \tau_+ + \epsilon,$$

следовательно, для достаточно больших j,

$$t_{j+1} - t_j < j^{1/(\tau_+ - \epsilon)} \left[\left(1 + \frac{1}{j}\right)^{1/(\tau_+ - \epsilon)} - \frac{j^{1/(\tau_+ + \epsilon)}}{j^{1/(\tau_+ - \epsilon)}}\right],$$

т.е.

$$t_{j+1} - t_j < 2j^{1/(\tau_+ - \epsilon)}. \tag{16}$$

Лемма 2. *Если выполняется условие* (1), *последовательность точек разрыва* $\{t_k\}$ *удовлетворяет ограничению* (6), *имеет показатель сходимости со свойством* (15), *удовлетворяющий неравенству*

$$\tau_+ < \kappa - 1, \tag{17}$$

и имеет место условие (9), *то сходится несобственный интеграл*

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{|P_+(t)P_-(t)|}.$$

Для доказательства достаточно убедиться в существовании конечного предела:

$$\lim_{t_{k+1}\to+\infty}\int\limits_{t_0}^{t_{k+1}}\frac{dt}{|P_+(t)P_-(t)|}<M,\quad M=\text{const}. \tag{18}$$

Выбрав целое положительное число $N>1$, интеграл в (18) запишем так

$$\int\limits_{t_0}^{t_{k+1}}\frac{dt}{|P_+(t)P_-(t)|}=\int\limits_{t_0}^{t_N}\frac{dt}{|P_+(t)P_-(t)|}+\sum_{j=N}^{k}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{dt}{|P_+(t)|P_-(t)}.$$

Из неравенства (14) для $t\in(t_k,t_{k+1})$ получим

$$\frac{\exp\{N_++\epsilon_1\}}{\Big((t-t_k)/t_k\Big)^{\kappa_k}\Big((t_{k+1}-t)/t_{k+1}\Big)^{\kappa_{k+1}}}>\exp\{-I_+(t)\}.$$

С учетом последнего неравенства из формулы (11) выводим

$$\frac{1}{|P_+(t)|}<\frac{\exp\{N_++\epsilon_1\}}{t^{\kappa_+}(1/t_1-1/t)^{\kappa_+}\Big((t-t_k)/t_k\Big)^{\kappa_k}\Big((t_{k+1}-t)/t_{k+1}\Big)^{\kappa_{k+1}}}.$$

По лемме 1 для функции $P_-(t)$ при $t\in(t_k,t_{k+1})$ имеем

$$\frac{1}{P_-(t)}<\frac{|t_{-1}|^{\kappa_-}\exp\{M_\alpha/(\beta|t_{-1}|^\beta)\}}{t^{\kappa_-}},$$

следовательно,

$$\frac{1}{|P_+(t)|P_-(t)}<\frac{\exp\{N_++M_\alpha/(\beta|t_{-1}|^\beta)+\epsilon_1\}|t_{-1}|^{\kappa_-}}{(1/t_1-1/t)^{\kappa_+}t_k^{\kappa_-+\kappa_+}\Big((t-t_k)/t_k\Big)^{\kappa_k}\Big((t_{k+1}-t)/t_{k+1}\Big)^{\kappa_{k+1}}}.$$

Отсюда получим соотношение

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{dt}{|P_+(t)|P_-(t)}<\frac{M_N}{t_j^{\kappa_-+\kappa_+}}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{dt}{\Big((t-t_j)/t_j\Big)^{\kappa_j}\Big((t_{j+1}-t)/t_{j+1}\Big)^{\kappa_{j+1}}},$$

где постоянная

$$M_N=e^{N_++M_\alpha/(\beta t_1^\beta)+\epsilon_1}\frac{|t_1|^{\kappa_-}}{(1/t_1-1/t_N)^{\kappa_+}}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{dt}{|P_+(t)|P_-(t)}<\frac{M_N}{t_j^{\kappa_-+\kappa_+}}\left(\left(\frac{2t_{j+1}}{t_{j+1}-t_j}\right)^{\kappa_{j+1}}\int\limits_{t_j}^{(t_j+t_{j+1})/2}\frac{dt}{\Big((t-t_j)/t_j\Big)^{\kappa_j}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2t_j}{t_{j+1}-t_j}\right)^{\kappa_j}\int\limits_{(t_j+t_{j+1})/2}^{t_{j+1}}\frac{dt}{\Big((t_{j+1}-t)/t_{j+1}\Big)^{\kappa_j}}\right).$$

Итак, для достаточно больших j, когда $\kappa_{j+1},\kappa_j<1/2$ и $t_{j+1}-t_j>1$, имеем

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{dt}{|P_+(t)|P_-(t)}<\frac{8M_N}{t_j^{\kappa_-+\kappa_+}}t_j^{\kappa_j}t_{j+1}^{\kappa_{j+1}}(t_{j+1}-t_j)^{1-\kappa_j-\kappa_{j+1}}.$$

Учитывая неравенство $j+1=j(1+1/j)<2j$, $(j+1)^{\kappa_{j+1}/(\tau_+-\epsilon)}<2j^{\kappa_{j+1}/(\tau_+-\epsilon)}$, а также неравенство (16), получим

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{dt}{|P_+(t)|P_-(t)}<\frac{32M_N}{j^{(\kappa/(\tau_++\epsilon)-1/(\tau_+-\epsilon))}}.$$

Отсюда при выполнении условия (17) вытекает абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{j=N}^{+\infty}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{dt}{P_+(t)P_-(t)}$, т.е. существование конечного предела (18).

После интегрирования в формуле (7) получим

$$z(\zeta)=-C\int\limits_0^{\zeta}\frac{e^{i\pi\beta_0}\,d\zeta}{\prod\limits_{j=1}^{\infty}\Big(1-\zeta/t_{-j}\Big)^{\kappa_{-j}}\prod\limits_{j=1}^{\infty}\Big(1-\zeta/t_j\Big)^{\kappa_j}}+K,\quad \zeta\in G, \tag{19}$$

где K — произвольная комплексная постоянная, $\beta_0\in(-1/2,1/2)$. Формула (19) распространяет интеграл Шварца – Кристофеля на случай счетного числа вершин [1, с. 175]. Чтобы обеспечить существование конечного предела $\lim z(\xi)=z(\infty)$ при $\xi\to\infty$, необходимо считать, что $\kappa>1$ в формуле (3). При $\kappa\le 1$ вершина многоугольника, соответствующая $t=\infty$, лежит в бесконечно удаленной точке плоскости z. Согласно (7) при $k\ge 1$, $C<0$, имеем

$$\arg z'(\xi)=\pi\beta_0+\sum_{j=1}^{k}\kappa_j\pi,\qquad \xi\in(t_k,t_{k+1}),$$

$$\arg z'(\xi)=\pi\beta_0-\sum_{j=1}^{k}\kappa_{-j}\pi,\qquad \xi\in(t_{-k-1},t_{-k}),$$

а при $\xi\in(t_{-1},t_1)$ имеем $\arg z'(\xi)=\pi\beta_0$, поэтому

$$\lim_{\xi\to+\infty}\arg z'(\xi)=\pi\beta_0+\kappa_+\pi,\qquad \lim_{\xi\to-\infty}\arg z'(\xi)=\pi\beta_0-\kappa_-\pi,$$

т.е. взяв $C<0$, мы получаем нужную ветвь $\arg z'(\zeta)$.

Из (17) и (18) следует существование предела $\lim\limits_{k\to\infty}z(t_k)=z(+\infty)$. Аналогично, можно показать, что при выполнении условия

$$0<\tau_-<\kappa-1, \tag{20}$$

где τ_- есть показатель сходимости последовательности $\{-t_{-k}\}$, существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty}z(t_{-k})=z(-\infty)$. Убедимся, что эти односторонние пределы совпадают.

По теореме Коши, имеем

$$\int\limits_{C(t^*_{-k},t^*_k)}z'(\zeta)\,d\zeta+\int\limits_{t^*_{-k}}^{t^*_k}z'(t)\,dt=0,$$

где выбранные числа t^*_{-k}, t^*_k удовлетворяют неравенствам

$$\frac{t_{-k}+t_{-(k+1)}}{2}<t^*_{-k}\le t_{-k},\qquad t_k\le t^*_k<\frac{t_k+t_{k+1}}{2},$$

$C(t^*_{-k},t^*_k)$ — кривая, состоящая из отрезка прямой с концами в точках $t^*_{-k}+i|t^*_{-k}|\operatorname{tg}\delta$ и t^*_{-k}, дуги $C(t^*_{-k})$ окружности с центром в начале координат радиуса $|t^*_{-k}|/\cos\delta$ от точки $t^*_{-k}+i|t^*_{-k}|\mathrm{tg}\delta$ до мнимой оси, отрезка прямой с концами в точках t^*_k и $t^*_k+it^*_k\mathrm{tg}\delta$, дуги $C(t^*_k)$ окружности с центром в начале координат радиуса $t^*_k/\cos\delta$ от точки $t^*_k+it^*_k\mathrm{tg}\delta$ до мнимой оси и отрезка мнимой оси с концами в точках $i|t^*_{-k}|/\cos\delta$ и $it^*_k/\cos\delta$. Отсюда после предельного перехода по $k\to\infty$ получим

$$\int\limits_{-\infty}^{t_1}z'(t)\,dt+\int\limits_{t_1}^{+\infty}z'(t)\,dt=0,$$

т.е. $-z(-\infty)+z(+\infty)=0$, если

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{C(t^*_{-k},t^*_k)} z'(\zeta)\,d\zeta=0. \tag{21}$$

Для обоснования последнего соотношения рассмотрим

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{C(t^*_k)} z'(\zeta)\,d\zeta+\lim_{k\to\infty}\int\limits_{t^*_k}^{t^*_k+it^*_k\mathrm{tg}\delta} z'(\zeta)\,d\zeta. \tag{22}$$

Согласно лемме 1 справедливы формулы

$$P_+(\zeta)=\zeta^{\kappa_+}A_+(\zeta),\qquad P_-(\zeta)=\zeta^{\kappa_+}A_-(\zeta),$$

причем для $\zeta=re^{i\theta}$ функции $\ln A_+(\zeta)$, $\ln A_-(\zeta)$ ограниченны при $r\to\infty$, $\delta<\theta\le\pi$, $\pi-\delta<\theta\le 0$, соответственно, $0<\delta$. Учитывая это и равенство (7), запишем

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int\limits_{C(t^*_k)} z'(\zeta)\,d\zeta\right|\le\lim_{k\to\infty}M\int\limits_{\delta}^{\pi/2}\frac{1}{(t^*_k)^{\kappa}}t^*_k\,d\theta=\lim_{k\to\infty}M\frac{\pi-\delta}{(t^*_k)^{\kappa-1}}=0,\qquad M=\mathrm{const}.$$

При рассмотрении второго предела (22) при $0<\theta\le\delta$ нам понадобится следующая из (10) формула:

$$\ln\frac{1}{|P_+(\zeta)|}=-\kappa_+\ln\left|1-\frac{\zeta}{t_1}\right|+\mathrm{Re}\left(-\zeta\int\limits_{t_1}^{+\infty}\frac{\alpha_+(\xi)\,d\xi}{\xi^{1+\beta}(\xi-\zeta)}\right).$$

Поскольку

$$\mathrm{Re}\left(-\zeta\int\limits_{t_1}^{+\infty}\frac{\alpha_+(\xi)\,d\xi}{\xi^{1+\beta}(\xi-\zeta)}\right)=\int\limits_{t_1}^{+\infty}\frac{\alpha_+(\xi)\,d\xi}{\xi^{1+\beta}}-\mathrm{Re}\int\limits_{t_1}^{+\infty}\frac{\alpha_+(\xi)\,d\xi}{\xi^{\beta}(\xi-\zeta)},$$

то для оценки предела (22) в случае $0<\theta\le\delta$, когда $\zeta=t^*_k+i\eta$, $0<\eta<t^*_k\mathrm{tg}\delta$, нужно исследовать последний интеграл, который представим в виде

$$\mathrm{Re}\int\limits_{t_1}^{+\infty}\frac{\alpha_+(\xi)\,d\xi}{\xi^{\beta}(\xi-\zeta)}=\mathrm{Re}\left(\int\limits_{t_1}^{t_{k-1}}\frac{\alpha_+(\xi)\,d\xi}{\xi^{\beta}(\xi-\zeta)}+\int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+1}}\frac{\alpha_+(\xi)\,d\xi}{\xi^{\beta}(\xi-\zeta)}+\int\limits_{t_{k+1}}^{+\infty}\frac{\alpha_+(\xi)\,d\xi}{\xi^{\beta}(\xi-\zeta)}\right).$$

Для $t_1>1$ и для достаточно больших t_k имеем

$$-\mathrm{Re}\int\limits_{t_1}^{t_{k-1}}\frac{\alpha_+(\xi)\,d\xi}{\xi^{\beta}(\xi-\zeta)}<\frac{M_\alpha}{t_k^{*\beta}}\left[\frac{1}{1-\beta}+\ln\frac{t^*_k-t_1}{t^*_k-t_{k-1}}\right]=o(1). \tag{23}$$

Теперь получим следующее неравенство:

$$-\mathrm{Re}\int\limits_{t_{k+1}}^{\infty}\frac{\alpha_+(\xi)\,d\xi}{\xi^{\beta}(\xi-t^*_k-i\eta)}=-\int\limits_{t_{k+1}}^{\infty}\frac{(\xi-t^*_k)\alpha_+(\xi)\,d\xi}{\xi^{\beta}[(\xi-t^*_k)^2+\eta^2]}<0.$$

При $\xi\in(t_{k-1},t_{k+1})$, учитывая формулу (8), запишем

$$-\mathrm{Re}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+1}}\frac{\alpha_+(\xi)\,d\xi}{\xi^{\beta}(\xi-\zeta)}=-r^+_{k-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{(\xi-t^*_k)\,d\xi}{\xi^{\beta}[(\xi-t^*_k)^2+\eta^2]}-r^+_k\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{(\xi-t^*_k)\,d\xi}{\xi^{\beta}[(\xi-t^*_k)^2+\eta^2]}=$$

$$=\frac{r^+_{k-1}}{2}\ln\frac{(t^*_k-t_{k-1})^2+\eta^2}{(t_{k+1}-t^*_k)^2+\eta^2}+\frac{\kappa_k}{2}\ln\frac{(t_{k+1}-t^*_k)^2+\eta^2}{(t^*_k-t_{k+1})^2+\eta^2}.$$

Считая, что $t_k - t_{k-1} > 1$, получим

$$-\mathrm{Re}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \frac{\alpha_+(\xi)\,d\xi}{\xi^\beta(\xi-\zeta)} < \frac{\kappa_k}{2}\ln\left(1+\frac{t_{k+1}^2}{\eta^2}\right) + o(1). \tag{24}$$

Учитывая соотношения (23),(24), выведем асимптотическую оценку:

$$\frac{1}{|P_+(\zeta)|} = \frac{1}{|\zeta|^{\kappa_+}}\left(\frac{t_{k+1}}{\eta}\right)^{\kappa_k} O(1), \qquad \zeta = t_k^* + i\eta, \qquad 0<\eta<t_k^*\,\mathrm{tg}\,\delta, \qquad k\to\infty,$$

которая вместе с аналогичной для $P_-(\zeta)$ показывает, что предел (22) равен нулю. Последнее вместе с легко проверяемым равенством

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{i|t_{-k}^*|/\cos\delta}^{it_k^*/\cos\delta} z'(i\eta)\,d\eta = 0$$

(справедливым при $\kappa > 1$)обосновывает нужное нам соотношение (21).

Потребуем, чтобы функция (19) удовлетворяла соотношению

$$\beta_0\pi < \arg\Big(z(\infty) - z(t_{-1})\Big) < \beta_0\pi + \alpha_{-1}\pi. \tag{25}$$

Из геометрических соображений ясно, что область D_z будет однолистной при выполнении следующих условий:

$$\lim_{\xi\to-\infty}\arg z'(\xi) > \arg\Big(z(\infty)-z(t_{-1})\Big) - 2\pi, \qquad \lim_{\xi\to+\infty}\arg z'(\xi) < \arg\Big(z(\infty)-z(t_{-1})\Big) + \pi,$$

т.е. при выполнении неравенств

$$\pi(-\kappa_- + \beta_0) > \arg\Big(z(\infty)-z(t_{-1})\Big) - 2\pi, \qquad \pi(\kappa_+ + \beta_0) < \arg\Big(z(\infty)-z(t_{-1})\Big) + \pi. \tag{26}$$

Теорема. *Функция $z(\zeta)$, реализующая конформное отображение верхней полуплоскости G на внутренность ограниченного многоугольника D_z с углами $\alpha_k\pi$, $\alpha_{-k}\pi$, $k=\overline{1,\infty}$, удовлетворяющими ограничениям* (1), (8), (9) *при вершинах A_k, A_{-k}, причем заданы соответствующие вершинам этого многоугольника точки t_k, t_{-k} двух монотонных последовательностей, сходящихся на вещественной оси соответственно к $+\infty$ и $-\infty$, удовлетворяющие условиям* (5), (6), (15), (17), (20), *представляется формулой* (19), *в которой $C<0$, K — произвольная комплексная постоянная, $\beta_0\in(-1/2,1/2)$, при выполнении условий* (25), (26).

Результаты этой статьи частично анонсированы в [4].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда РФФИ (*проект* № 08-01-00381) *и Федерального агенства по науке и инновациям* (*госконтракт* № 02.740.11.0193).

Библиографический список

1. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
2. *Салимов Р.Б., Шабалин П.Л.* Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения. Казань: Изд-во Казан. мат. об-ва, 2005. 298 с.
3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
4. *Салимов Р.Б., Шабалин П.Л.* Отображение полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин// Изв. вузов. Математика. 2009. №10. С. 76–80.