всплеск-функций, определяемый равенствами $\hat{\psi}^{(\nu)}(\xi) = m_\nu(M^{*-1}\xi)\hat{\varphi}(M^{*-1}\xi)$*, с такими масками* $m_\nu, \nu = 1, \ldots, m-1$*, что при почти всех* $\xi \in \mathbb{R}^d$ *матрица*

$$\mathbf{M} := \{m_\nu(\xi + M^{*-1}s_k)\}_{\nu,k=0}^{m-1},$$

где $\{s_0, \ldots, s_{m-1}\}$ *— произвольный набор цифр матрицы* M^**, унитарна, то функции* $\psi^{(\nu)}$*,* $\nu = 1, \ldots, m-1$ *образуют набор всплеск-функций.*

Если применить такой подход к описанному выше случаю КМА Хаара с масштабирующей функцией $\chi_{[0,1]^2}(x,y)$ и матричным коэффициентом расширения $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, мы получим, что функции (1) должны удовлетворять равенствам

$$\hat{\eta}_i(\xi) = m_i(M^{-1}\xi)\hat{\chi}_{[0,1]^2}(M^{-1}\xi), \qquad i = \overline{1,3}, \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Откуда, учитывая, что $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\hat{\chi}_{[0,1]^2}(\xi_1, \xi_2) = \dfrac{(e^{-2\pi i\xi_1} - 1)(e^{-2\pi i\xi_2} - 1)}{-4\pi^2\xi_1\xi_2}$, можно вычислить функции $m_i(\xi_1, \xi_2)$, $i = \overline{1,3}$. Например,

$$m_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{a_{11}}{4} + \frac{a_{12}(e^{-4\pi i\xi_2} - e^{-2\pi i\xi_2})}{4(e^{-2\pi i\xi_2} - 1)} + \frac{a_{13}(e^{-4\pi i\xi_1} - e^{-2\pi i\xi_1})(e^{-4\pi i\xi_2} - e^{-2\pi i\xi_2})}{4(e^{-2\pi i\xi_1} - 1)(e^{-2\pi i\xi_2} - 1)} + \\ + \frac{a_{14}(e^{-4\pi i\xi_1} - e^{-2\pi i\xi_1})}{4(e^{-2\pi i\xi_1} - 1)}$$

и т. д. Таким образом, для построения функций (1), изображенных на рис. 1, нужно найти такие коэффициенты a_{ij}, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$, чтобы матрица $\mathbf{M} = \{m_i(\xi + M^{-1}s_k)\}_{i,k=0}^{3}$, где в качестве цифр матрицы M $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ взяты, например, $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$, была унитарной. Решить такую задачу весьма непросто.

Библиографический список

1. *Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.* Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.
2. *Hur Y., Ron A.* New constructions of piecewise-constant wavelets // Electronic Transactions on Numerical Analysys. 2006. Vol. 25. P. 138–157.

УДК 519.83

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ИГРАХ С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Т.Ф. Савина

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: suri-cat@yandex.ru

Для игр n лиц с отношениями предпочтения введены различные типы оптимальных решений и указаны элементарные свойства этих решений. Получено достаточное условие непустоты C_α-ядра.

Ключевые слова: игра с отношениями предпочтения, ситуация общего равновесия, равновесие по Нэшу, допустимый (вполне допустимый) исход.

Optimality Solutions in Games with Preference Relations

T.F. Savina

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: suri-cat@yandex.ru

For n person games with preference relations some types of optimality solutions are introduced. Elementary properties of their solutions are considered. One sufficient condition for nonempty C_α-core is found.

Key words: game with preference relations, equilibrium points, Nash equilibrium, acceptable (quite acceptable) outcome.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе изучаются игры, в которых оценочная структура задается в виде бинарных отношений предпочтения на множестве исходов игры. Никаких ограничений на множества стратегий игроков и на тип отношения предпочтения a priori не накладывается.

Для игр n лиц введены следующие типы оптимальных решений: ситуации общего равновесия[1, 2], ситуации равновесия по Нэшу, допустимые и вполне допустимые ситуации или исходы.

В первом разделе рассмотрены антагонистические игры с отношениями предпочтения. Второй раздел посвящен играм n лиц. Основной результат работы — теорема 3, в которой установлены условия непустоты C_α-ядра в игре n лиц с отношениями предпочтения.

1. СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ В АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГРАХ С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Определение 1. Антагонистическая игра с отношениями предпочтения может быть задана в виде

$$G = \langle X,\, Y\, A,\, \rho,\, F\rangle, \tag{1}$$

где X — множество стратегий игрока 1, Y — множество стратегий игрока 2, A — множество исходов, $\rho \subseteq A^2$ — бинарное отношение, выражающее предпочтения игрока 1, $F\colon X \times Y \to A$ — функция реализации. Предполагается, что отношение предпочтения ρ является рефлексивным.

Через ρ^s обозначается симметричная часть отношения ρ, через ρ^* — строгая часть отношения ρ: $\rho^s = \rho \cap \rho^{-1}$, $\rho^* = \rho \setminus \rho^s$.

Мы используем инфиксную запись предпочтения, полагая по определению:

$$a_1 \overset{\rho}{\lesssim} a_2 \iff (a_1, a_2) \in \rho; \qquad a_1 \overset{\rho}{\sim} a_2 \iff (a_1, a_2) \in \rho^s; \qquad a_1 \overset{\rho}{<} a_2 \iff (a_1, a_2) \in \rho^*.$$

Для игры G вводятся следующие типы ситуаций равновесия.

Определение 2. Ситуация $(x_0,\, y_0) \in X \times Y$ называется

- *ситуацией общего равновесия*, если для любых $x \in X$, $y \in Y$ выполняются условия:

$$F(x,\, y_0) \overset{\rho}{\not>} F(x_0,\, y_0) \overset{\rho}{\not>} F(x_0,\, y); \tag{2}$$

- *ситуацией пролонгированного равновесия*, если

$$F(x,\, y_0) \overset{\rho}{\not>} F(x_0,\, y); \tag{3}$$

- *седловой точкой*, если выполняются условия:

$$F(x,\, y_0) \overset{\rho}{\lesssim} F(x_0,\, y_0) \overset{\rho}{\lesssim} F(x_0,\, y). \tag{4}$$

Множества указанных ситуаций равновесия в игре G обозначаются через $Eq\,(G)$, $PrEq\,(G)$, $Sp\,(G)$ соответственно.

Простые примеры показывают, что даже в конечной игре с «хорошей» структурой предпочтений (например, когда $\langle A, \rho\rangle$ есть линейная транзитивная структура) могут отсутствовать ситуации равновесия всех введенных выше типов. С другой стороны, игра вида (1) может иметь несколько седловых точек, исходы в которых различны.

Теорема 1 (элементарные свойства ситуаций равновесия).

1. *В антагонистической игре G с отношениями предпочтения вида* (1) *для рассматриваемых множеств ситуаций равновесия имеют место включения: а) $Sp(G) \subseteq Eq(G)$, б) $Pr\,Eq(G) \subseteq Eq(G)$. Обратные включения в общем случае не имеют места.*
2. *В антагонистической игре с транзитивной структурой предпочтения выполняется включение: $Sp(G) \subseteq Pr\,Eq(G)$.*
3. *В антагонистической игре с линейной транзитивной структурой предпочтений рассматриваемые множества ситуаций равновесия совпадают между собой: $Sp(G) = Pr\,Eq(G) = Eq(G)$.*

Доказательство. 1. а) $Sp(G) \subseteq Eq(G)$. Пусть $(x_0, y_0) \in Sp(G)$. Предположим, что $(x_0, y_0) \notin$ $\notin Eq(G)$. Тогда найдутся такие $x' \in X$, $y' \in Y$, что выполняется $F(x', y_0) \overset{\rho}{>} F(x_0, y_0)$ или $F(x_0, y') \overset{\rho}{<}$ $\overset{\rho}{<} F(x_0, y_0)$. Пусть, для определенности, имеет место первое условие. Тогда, подставляя в определение (4) $x = x'$, получаем $F(x', y_0) \overset{\rho}{\lesssim} F(x_0, y_0)$, что несовместимо с $F(x', y_0) \overset{\rho}{>} F(x_0, y_0)$.

б) $PrEq(G) \subseteq Eq(G)$. Пусть $(x_0, y_0) \in PrEq(G)$. Полагая в (3) $x = x_0$, а затем $y = y_0$, получаем $F(x_0, y_0) \overset{\rho}{\not>} F(x_0, y)$ и $F(x, y_0) \overset{\rho}{\not>} F(x_0, y_0)$, т.е. (x_0, y_0) — ситуация общего равновесия.

2. Рассмотрим игру G с транзитивной структурой предпочтений. Пусть $(x_0, y_0) \in Sp(G)$. Предположим, что $(x_0, y_0) \notin PrEq(G)$, тогда при некоторых $x' \in X, y' \in Y$ выполняется $F(x', y_0) \overset{\rho}{>} F(x_0, y')$. Полагая в (4) $x = x', y = y'$, получаем

$$F(x', y_0) \overset{\rho}{\lesssim} F(x_0, y_0) \overset{\rho}{\lesssim} F(x_0, y'),$$

откуда в силу транзитивности отношения ρ получаем $F(x', y_0) \overset{\rho}{\lesssim} F(x_0, y')$, что противоречит соотношению $F(x', y_0) \overset{\rho}{>} F(x_0, y')$.

Таким образом, для игры с транзитивной структурой предпочтений выполняются включения: $Sp(G) \subseteq PrEq(G) \subseteq Eq(G)$.

3. Достаточно показать, что $Eq(G) \subseteq Sp(G)$. Справедливость этого включения следует из линейности отношения ρ.

Теорема 1 доказана.

2. СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ И ДОПУСТИМЫЕ ИСХОДЫ В ИГРАХ n ЛИЦ С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Игра с отношениями предпочтения игроков $N = \{1, \ldots, n\}$ задается в виде

$$G = \langle (X_i)_{i \in N}, A, (\rho_i)_{i \in N}, F \rangle, \tag{5}$$

где X_i — множество стратегий игрока i, A — множество исходов, $\rho_i \subseteq A^2$ — рефлексивное бинарное отношение, выражающее предпочтения игрока $i\,(i \in N)$, F — функция реализации, определенная на множестве ситуаций $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ и принимающая значения в множестве исходов A.

Определение 3. Ситуация $x^0 = \left(x_i^0\right)_{i \in N} \in X$ в игре G называется

- *ситуацией общего равновесия*, если для любых $x_i \in X_i$ выполняется

$$F(x^0 \parallel x_i) \overset{\rho_i}{\not>} F(x^0); \tag{6}$$

- *ситуацией равновесия по Нэшу*, если выполняется

$$F(x^0 \parallel x_i) \overset{\rho_i}{\lesssim} F(x^0). \tag{7}$$

Заметим, что для антагонистической игры ситуации равновесия по Нэшу совпадают с седловыми точками.

В игре G вида (5) по-прежнему обозначаем через $Eq(G)$ множество ситуаций общего равновесия, через $NEq(G)$ – множество ситуаций равновесия по Нэшу.

В игре с линейной структурой предпочтений выполняется $NEq(G) = Eq(G)$.

Определение 4. В игре G вида (5) исход a называется

- *допустимым для игрока* i $(i \in N)$, если $\neg(\exists\ x_i \in X_i)(\forall\ x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i})\ \ F(x_i, x_{N \setminus i}) \overset{\rho_i}{>} a$,
- *вполне допустимым для игрока* i, если $(\exists\ x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i})(\forall\ x_i \in X_i)\ \ F(x_i, x_{N \setminus i}) \overset{\rho_i}{\not>} a$.

Определение 5. Исход a называется *допустимым (вполне допустимым) в игре* G, если он допустим (вполне допустим) для всех игроков.

Определение 6. Ситуация $x^0 = (x_i^0)_{i \in N} \in X$ называется *допустимой (вполне допустимой) в игре* G, если исход $F(x^0)$ допустим (вполне допустим) в игре G.

Через $AC(G)$ $(QAC(G))$ будем обозначать множество допустимых (вполне допустимых) ситуаций в игре G.

При переходе от ситуаций к исходам в обозначениях соответствующих множеств добавляем сверху черту.

Множество всех допустимых исходов игры G также называется C_α-ядром (обозначение $C_\alpha(G)$).

Теорема 2 (основные свойства оптимальных решений в игре n лиц). *В любой игре G вида (5) выполнены включения:*

$$NEq\,(G) \subseteq Eq\,(G) \subseteq QAC\,(G) \subseteq AC\,(G).$$

Обратные включения в общем случае не выполняются.

Доказательство. Включение $NEq(G) \subseteq Eq\,(G)$ доказывается аналогично доказательству включения $Sp\,(G) \subseteq Eq\,(G)$ в теореме 1.

Включение $QAC\,(G) \subseteq AC\,(G)$ следует из логического закона перестановки разноименных кванторов ($\exists\,\forall \Rightarrow \forall\,\exists$).

Установим включение $Eq\,(G) \subseteq QAC\,(G)$. Пусть $x^0 = \left(x_i^0\right)_{i\in N} \in Eq\,(G)$. Для игрока i имеется стратегия $x^0_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$ такая, что для любых $x_i \in X_i$ выполняется (6). Получаем в точности определение вполне допустимой ситуации. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Простые примеры показывают, что все установленные включения являются строгими.

Замечание 2. Из теоремы 2 следует, что имеет место цепочка включений для исходов игры G:

$$\overline{NEq}\,(G) \subseteq \overline{Eq}\,(G) \subseteq \overline{QAC}\,(G) \subseteq \overline{AC}\,(G).$$

Замечание 3. В некоторых классах игр с отношениями предпочтения отдельные включения могут быть заменены на равенства, например, в антагонистической игре с линейной и антисимметричной структурой предпочтений выполняется $\overline{NEq}\,(G) = \overline{QAC}\,(G)$. Действительно, включение $\overline{NEq}\,(G) \subseteq \overline{QAC}\,(G)$ справедливо по замечанию 2 к теореме 2. Проверим, что верно обратное включение. Пусть $a \in \overline{QAC}\,(G)$, тогда выполняются два условия

$$\begin{cases} (\exists\; x_0 \in X)\,(\forall\; y \in Y) \quad F(x_0,\, y) \overset{\rho}{\not<} a, \\ (\exists\; y_0 \in Y)\,(\forall\; x \in X) \quad F(x,\, y_0) \overset{\rho}{\not>} a. \end{cases}$$

В силу линейности структуры предпочтений имеем:

$$F(x,\, y_0) \overset{\rho}{\lesssim} a \overset{\rho}{\lesssim} F(x_0,\, y). \tag{8}$$

Полагаем в (8) $x = x_0$, $y = y_0$, получаем $F(x_0,\, y_0) \overset{\rho}{\lesssim} a \overset{\rho}{\lesssim} F(x_0,\, y_0)$. В силу антисимметричности структуры предпочтений $F(x_0,\, y_0) = a$. Тогда, подставляя в соотношение (8) $F(x_0,\, y_0)$ вместо a, получаем, что ситуация $(x_0,\, y_0)$ является ситуацией равновесия по Нэшу. Таким образом, $a \in \overline{NEq}\,(G)$.

В общем случае бесконечная игра даже с линейной и транзитивной структурой предпочтений может не иметь допустимых, а значит, вполне допустимых исходов, а значит, ситуаций общего равновесия и ситуаций равновесия по Нэшу. Однако для конечной игры можно указать простые достаточные условия, накладываемые на отношения предпочтения игроков, при которых допустимые исходы существуют.

В частности, справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Пусть G — игра с отношениями предпочтения вида (5), в которой множество стратегий каждого игрока конечно и все отношения предпочтения ρ_i ацикличны. Тогда $C_\alpha(G) \neq \varnothing$.*

Для доказательства теоремы нам понадобиться следующая лемма.

Лемма. *Если G — игра с отношениями предпочтения вида (5), в которой множество исходов A конечно и все отношения предпочтения ρ_i ацикличны, то существует исход, допустимый для всех игроков.*

Доказательство леммы. Будем обозначать через $U_i^*\,(G)$ множество недопустимых исходов для игрока i.

1 случай. $U_i^*\,(G) \neq \varnothing$ при всех $i \in N$. Тогда любое непустое подмножество $U_i^*\,(G)$ множества A имеет максимальный элемент a_i^* относительно ρ_i. Так как $a_i^* \in U_i^*\,(G)$, то при каждом $i \in N$ найдется такая стратегия $x_i^0 \in X_i$, что

$$\left(\forall\ y \in X_{N\setminus i}\right) \quad F(x_i^0, y) \overset{\rho_i}{>} a_i^*. \tag{9}$$

Таким образом, в ситуации $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ все соотношения (9) будут выполнены одновременно, т.е. для каждого $i \in N$ выполняется $F(x^0) \overset{\rho_i}{>} a_i^*$. Так как при любом $i \in N$ элемент a_i^* является максимальным в подмножестве $U_i^*(G)$, то из последнего соотношения следует, что $F(x^0) \notin U_i^*(G)$, т.е. исход $F(x^0)$ является допустимым для всех игроков $i \in N$. Таким образом, $C_\alpha(G) \neq \varnothing$.

2 случай. Предположим, что для некоторого $i \in N$ имеет место $U_i^*(G) = \varnothing$. Положим $K = \{i \in N\colon U_i^*(G) = \varnothing\}$. В каждом непустом подмножестве $U_j^*(G)$ $(j \in N \setminus K)$ множества A существует максимальный элемент a_j^*. Так как $a_j^* \in U_j^*(G)$, то по определению множества $U_j^*(G)$ существует такая стратегия $x_j^0 \in X_j$, что для любой стратегии $y \in X_{N\setminus j}$ имеет место $F(x_j^0, y) \overset{\rho_j}{>} a_j^*$, $j \in N \setminus K$.

Для каждого $j \in K$ зафиксируем произвольно стратегию $x_j^0 \in X_j$. Тогда в ситуации $x^0 = (x_i^0)_{i\in N}$ будет выполнено

$$F(x^0) \overset{\rho_j}{>} a_j^*, \qquad j \in N \setminus K. \tag{10}$$

Так как a_j^* — максимальный элемент непустого подмножества $U_j^*\ (G)$, то согласно (10) получаем $F(x^0) \notin U_i^*\ (G)$ для $j \in N \setminus K$, т.е. $F(x^0)$ допустим для всех игроков $j \in N \setminus K$. Так как для любого $j \in K$ имеет место $U_j^*\ (G) = \varnothing$, то любой исход игры G будет допустимым для игрока $j \in K$. Таким образом, исход $F(x^0)$ будет допустимым для всех игроков $i \in N$ в игре G, т.е. $C_\alpha(G) \neq \varnothing$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим игру G_0, которая является ограничением игры G на множестве $pr_2\, F$ ее реализуемых исходов. В силу предположений теоремы $pr_2\, F$ является конечным множеством и ограничения отношений ρ_i на этом множестве являются ациклиичными. В силу леммы существует исход a^*, допустимый для всех игроков в G_0. Очевидно, что a^* также будет допустимым в игре G. Теорема 3 доказана.

Библиографический список

1. *Розен В.В.* Равновесие в играх с упорядоченными исходами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 61–66.

2. *Савина Т.Ф.* Ковариантные и контравариантные гомоморфизмы игр с отношениями предпочтения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3 С. 66–70

УДК 517.956

ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ ДЛЯ ОДНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Е.А. Уткина

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, Казань,
кафедра информационных технологий в образовании
E-mail: eutkina1@yandex.ru

В характеристическом прямоугольнике на плоскости рассматривается задача об отыскании решения уравнения со старшей частной производной шестого порядка с данными на всей границе. Выводятся достаточные условия единственности решения этой задачи. Эти условия записываются в терминах коэффициентов уравнения, а проводимые рассуждения основаны на методе априорных оценок.

Ключевые слова: задача с условиями на всей границе, метод априорных оценок.

Problem with Conditions on all Boundary for One 6-th Order Pseudoparabolic Equation

E.A. Utkina

Tatar State Humanitarian-Pedagogical University, Kazan,
Chair of Information Technology in Education
E-mail: eutkina1@yandex.ru

Here consider characteristic problem with conditions, setting on all boundary, in two order space for 6th order equation with 3-times taken old particular derivative. The existence and uniqueness of the solution are proved.

Key words: problem with conditions on all boundary, preliminary evaluate method.