Библиографический список

1. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.:Наука, 1978.
2. *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 1. С. 49–52.
3. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
4. *Хромов А.А.* О приближенном решении уравнения первого рода с оператором интегрирования // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронеж. весен. мат. школы «Понтрягинские чтения – XIX». Воронеж: Издат.-полиграфич. центр ВГУ, 2008. С. 224–225.
5. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959.

УДК 517.54

ОДИН СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА С ОСОБЕННОСТЯМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

П.Л. Шабалин

Казанский архитектурно-строительный университет,
кафедра высшей математики
E-mail: Pavel.Shabalin@mail.ru

Рассмотрена задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва первого рода коэффициентов в ситуации, когда ряд, составленный из скачков аргумента функции коэффициентов, расходится, а индекс задачи конечен. Получена формула общего решения этой задачи, исследована картина разрешимости.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, индекс задачи, задача Шварца.

Certain Case of the Riemann – Hilbert Boundary Value Problem with Peculiarities of Coefficients

P.L. Shabalin

We consider the Riemann – Hilbert boundary value problem for a case where the coefficients have countable set of discontinuity points of the first kind such that the series of jumps of argument of the coefficient function is divergent, but the index of the Hilbert problem is finite. We derive the formulae for general solution of the problem and investigate the picture of solvability.

Key words: Riemann – Gilbert value problem, finite index, Schwarz value problem.

Задача Гильберта для полуплоскости — это задача об определении аналитической в верхней полуплоскости $D = \{z : z = x + iy,\ y > 0\}$ функции $\Phi(z)$ по заданному краевому условию:

$$a(t)\,\mathrm{Re}\,\Phi(t) - b(t)\,\mathrm{Im}\,\Phi(t) = c(t). \tag{1}$$

Ситуация, когда коэффициенты краевого условия $a(t)$, $b(t)$ непрерывны на вещественной оси всюду, кроме конечного множества точек разрыва первого рода, изучалась в работах [1, с. 467; 2, с. 302; 3; 4]. Задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов впервые исследовалась Р.Б. Салимовым и П.Л. Шабалиным в работе [5, с. 108]. В статье [6] эта задача изучена в случаях, когда ряд, составленный из скачков в точках разрыва коэффициентов функции $\nu(t) = \arg G(t)$, $G(t) = a(t) - ib(t)$, сходится, и индекс задачи конечен, либо указанный ряд расходится, и индекс обращается в плюс бесконечность. В данной статье эта задача рассмотрена в еще не изученном случае, когда коэффициенты имеют счетное множество точек разрыва первого рода, причем указанный ряд расходится, но индекс задачи конечен.

Случай бесконечного множества точек разрыва коэффициента краевой задачи Римана ранее изучался М.И. Журавлевой в работах [7, 8], в которых допускается обращение коэффициента краевого условия в нуль или в бесконечность целого порядка в бесконечном множестве точек. Такие особенности коэффициента не характерны для задачи Гильберта. Потому использование результатов М.И. Журавлевой для решения задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва первого рода коэффициентов методом Н.И. Мусхелишвили не выглядит перспективным, так как требует особого нетривиального рассмотрения.

Рассмотрим задачу об определении аналитической в верхней полуплоскости D функции $\Phi(z)$ по краевому условию (1), которое выполняется на вещественной оси L всюду, кроме сгущающейся на бесконечности монотонной последовательности точек t_k, $k=\overline{1,\infty}$, $t_k>0$, $t_1=1$, в которых коэффициенты краевого условия $a(t)$, $b(t)$ и свободный член $c(t)$ имеют разрывы первого рода. Условимся считать, что вещественнозначные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)/|G(t)|$ непрерывны, по Гельдеру, на каждом интервале (t_k,t_{k+1}), $k=\overline{1,\infty}$, включая концы, причем последовательность констант Гельдера является ограниченной. В окрестности бесконечно удаленной точки условие Гельдера понимается в смысле выполнения неравенства

$$|a(t'')-a(t')|\le K\left|\frac{1}{t''}-\frac{1}{t'}\right|^{\gamma}. \tag{2}$$

Считаем также выполненными условия

$$c(t)/|G(t)|=O(|t|^{-\gamma}),\quad t\to\infty, \tag{3}$$

для некоторого γ, $0<\gamma<1$, и $|G(t)|\ne 0$.

Решение задачи (1) будем искать в классе аналитических в верхней полуплоскости функций, имеющих интегрируемые особенности в точках t_k и стремящихся к бесконечности порядка меньше единицы при $z\to\infty$, оставаясь внутри угла раствора меньше π с вершиной в начале координат и биссектрисой, совпадающей с мнимой положительной полуосью.

Ветвь функции $\nu(t)=\arg G(t)$ выберем последовательно на каждом интервале непрерывности коэффициентов так, чтобы скачок δ_k этой функции в точке t_k удовлетворял неравенству $0\le\delta_k<2\pi$; краевое условие (1) перепишем в виде

$$\mathrm{Re}\Big[e^{-i\nu(t)}\Phi(t)\Big]=\frac{c(t)}{|G(t)|}. \tag{4}$$

Предположим, что существует конечный предел

$$\lim_{t\to-\infty}\nu(t)=\nu(-\infty). \tag{5}$$

Введем функцию $\varphi(t)=\nu(t)-\beta(t)\pi$, где $\beta(t)$ – целочисленная функция, принимающая значения β_k, в интервалах (t_k,t_{k+1}), $k=\overline{1,\infty}$, $\beta(t)=0$ при $0<t<t_1$ и $\beta(t)=-\kappa$ при $t<0$. Число β_k выберем, так чтобы

$$0\le\varphi(t_k+0)-\varphi(t_k-0)<\pi, \tag{6}$$

для этого достаточно положить $\beta_k=\beta_{k-1}+l_k$, взяв $l_k=0$ при $0\le\delta_k<\pi$, $l_k=1$ при $\pi\le\delta_k<2\pi$; поскольку $\beta_0=0$, имеем $\beta_k=\sum\limits_{j=1}^{k}l_j$, $k=\overline{1,\infty}$. Ясно, что $\varphi(-\infty)=\nu(-\infty)+\kappa\pi$. Число κ определим ниже.

Теперь краевое условие (4) перепишем в виде

$$\mathrm{Re}\Big[e^{-i\varphi(t)}\Phi(t)\Big]=c_1(t),\qquad c_1(t)=\frac{c(t)}{\cos\big(\beta(t)\pi\big)|G(t)|}.$$

Обозначим

$$\kappa_k=\frac{\varphi(t_k+0)-\varphi(t_k-0)}{\pi},\qquad m_k=\frac{\varphi(t_{k+1}-0)-\varphi(t_k+0)}{\pi},\qquad k=1,2,\ldots,$$

причем в силу (6) все κ_k удовлетворяют ограничению $0\le\kappa_k<1$.

С учетом введенных обозначений получим равенство

$$\varphi(t_{k+1}-0)=\varphi(t_1-0)+\pi\sum_{j=1}^{k}\big[\kappa_j+m_j\big].$$

Предположим, что существует конечный предел

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=\varphi(+\infty), \tag{7}$$

тогда

$$\varphi(+\infty)=\lim_{t_{k+1}\to+\infty}\varphi(t_{k+1}-0)=\varphi(t_1-0)+\pi\sum_{j=1}^{\infty}\big[\kappa_j+m_j\big],$$

следовательно, ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}[\kappa_j+m_j]$ сходится.

Рассмотрим случай, когда числовые ряды $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\kappa_j$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty}m_j$ расходятся, причем функция

$$n_+^*(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<t_1,\\ \sum\limits_{j=1}^{k-1}\kappa_j, & t_{k-1}\le x<t_k,\quad k=\overline{2,\infty},\end{cases}$$

удовлетворяет дополнительному ограничению. Именно, существуют числа $\Delta_+>0$, $\kappa_+\in(0,1)$, такие, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{n_+^*(x)}{x^{\kappa_+}}=\Delta_+, \tag{8}$$

разность $\varepsilon(x)=\Delta_+x^{\kappa_+}-n_+^*(x)$, $x\ge 1$, суммируема с некоторой степенью $p>1$,

$$\varepsilon(x)\in L_p,\quad p>1. \tag{9}$$

Считая выполненным условие (9), обозначим

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\varepsilon(x)}{x}\,dx=M_+,\quad M_+<+\infty,\qquad \left(\int\limits_1^{+\infty}\varepsilon(x)^p\,dx\right)^{1/p}=M_p,\quad M_p<+\infty. \tag{10}$$

Учтя равенство $\varphi(-\infty)=\nu(-\infty)+\kappa\pi$ и обозначив $\pi\beta_*=\nu(-\infty)-\nu(t_1-0)$, вычислим

$$\kappa_\infty=\frac{\varphi(-\infty)-\varphi(+\infty)}{\pi}=\beta_*+\kappa-m_+.$$

Теперь определим постоянную κ так, чтобы скачок функции $\beta(t)$ в точке $t=0$ был целым и выполнялось неравенство $0\le\kappa_\infty<1$. Обозначив символом $E(p)$ целую часть числа p, получим $\kappa=-E(\beta_*-m_+)$, если β_*-m_+ – любое положительное или целое отрицательное число и $\kappa=-E(\beta_*-m_+)+1$, если β_*-m_+ – нецелое отрицательное число. Теперь нетрудно проверить равенство

$$\frac{\varphi(0-0)-\varphi(0+0)}{\pi}=\kappa.$$

Поэтому число κ назовем индексом данной задачи в выбранном классе решений.

Примем, что точки разрыва удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{t_k}<\infty, \tag{11}$$

гарантирующему сходимость бесконечного произведения

$$P_+(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{t_k}\right)^{\kappa_k}.$$

Здесь $\left(1-\frac{z}{t_j}\right)^{\kappa_j}=\left|1-\frac{z}{t_j}\right|^{\kappa_j}\exp\{i\kappa_j\arg(1-z/t_j)\}$, $j=1,2,\ldots$, причем под $\arg(1-z/t_j)$ понимаем однозначную ветвь, обращающуюся в нуль при $z=0$ и непрерывную в плоскости z, разрезанной по части вещественной оси, соединяющей точки $t=t_j$, $t=+\infty$, т.е. $\arg\left(1-\frac{z}{t_k}\right)=-\pi+\arg(z-t_k)$ при $0\le\arg(z-t_k)<2\pi$, $\arg t_k=0$, $k=\overline{1,\infty}$. Для любой точки z области D

$$\arg P_+(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\kappa_k\arg\left(1-\frac{z}{t_k}\right).$$

Следуя [9, с. 280] покажем, что функция $P_+(z)$ является аналитической в плоскости z, разрезанной по части действительной оси, для которой $t > t_1$, включая точки берегов разреза, кроме точек t_k, $k=\overline{1,\infty}$. Таким образом, для точек верхних берегов разрезов имеем

$$\arg P_+(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ -\pi \sum\limits_{j=1}^{k} \kappa_j, & t \in (t_k, t_{k+1}),\ k=\overline{1,\infty}, \end{cases}$$

поэтому

$$\arg P_+(t_k+0) - \arg P_+(t_k-0) = -\kappa_k \pi, \quad k=\overline{1,\infty}.$$

В [5, с. 114] с использованием представления (8) доказана формула

$$\ln P_+(z) = \frac{\pi \Delta_+ e^{-i\kappa_+\pi}}{\sin \pi\kappa_+} z^{\kappa_+} + z\int\limits_0^1 \frac{\Delta_+ x^{\kappa_+}}{x(x-z)}\,dx + z\int\limits_1^{+\infty} \frac{\varepsilon(x)\,dx}{x(x-z)},$$

которую перепишем в виде

$$\ln P_+(z) = \frac{\pi \Delta_+ e^{-i\kappa_+\pi}}{\sin \pi\kappa_+} z^{\kappa_+} - M_+ + \Delta_+\int\limits_0^1 \frac{x^{\kappa_+}\,dx}{(x-z)} - \frac{\Delta_+}{\kappa_+} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\varepsilon(x)\,dx}{(x-z)}.$$

Для $z = \xi + i\eta$ обозначим

$$I(\xi,\eta) = \Delta_+\int\limits_0^1 \frac{x^{\kappa_+}(x-\xi)\,dx}{(x-\xi)^2+\eta^2} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{(x-\xi)\varepsilon(x)\,dx}{(x-\xi)^2+\eta^2}. \tag{12}$$

Теперь для функции $|P_+(z)|$ получим представление

$$|P_+(z)| = \exp\left\{\mathrm{Re}\frac{\pi \Delta_+ e^{-i\kappa_+\pi}}{\sin \pi\kappa_+} z^{\kappa_+}\right\}|J(z)|,$$

в котором $|J(z)| = \exp\{I(\xi,\eta) - M_+ - \Delta_+/\kappa_+\}$.

Ясно, что функция $J(z)$ имеет те же нули, что и $P_+(z)$. Обозначим через t_k^* середину интервала (t_{k-1}, t_k), т.е. $t_k^* = (t_{k-1}+t_k)/2$. На последовательность точек $\{t_k\}$ налагаем дополнительно ограничение в виде неравенчтва

$$l < \frac{t_{k+1}-t_k}{t_k^\alpha} < L, \quad l > 0, \tag{13}$$

справедливого для некоторого α, $0 < \alpha < 1-\kappa_+$.

Нам понадобится следующая

Лемма 1. *Если последовательность точек разрыва удовлетворяет условиям* (11), (13), *для* $n_+^*(x)$ *выполнено представление* (8), *в котором кусочно непрерывная функция* $\varepsilon(x)$ *положительна и удовлетворяет ограничениям* (9), (10), *то для функции* $J(z)$, $z=\xi+i\eta$, *справедливо неравенство*

$$A_+\left|\frac{t_k - z}{t_{k-1}-z}\right|^{\kappa_k} < |J(z)| < B_+\left|\frac{t_k - z}{t_{k-1}-z}\right|^{\kappa_k}, \quad \xi \in (t_k^*, t_{k+1}^*),$$

и

$$E_+ < |J(z)| < L_+, \quad \xi < 1/2,$$

с абсолютными постоянными A_+, B_+, E_+, L_+.

Доказательство. Рассмотрим случай $\xi \in (t_k^*, t_{k+1}^*)$, $k > 1$. Формулу (12) перепишем в виде

$$I(\xi,\eta) = \left(\int\limits_0^1 + \int\limits_1^{t_{k-1}} + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} + \int\limits_{t_{k+1}}^{+\infty}\right)\frac{\varepsilon(x)(x-\xi)}{(x-\xi)^2+\eta^2}\,dx = I_0(\xi,\eta)+I_1(\xi,\eta)+I_2(\xi,\eta)+I_3(\xi,\eta).$$

Легко видеть, что

$$0 > I_0(\xi,\eta) > -\frac{\Delta_+}{(t^*_{k+1}-1)\kappa_+ + 1}, \qquad 0 > I_1(\xi,\eta) > -\frac{2^{1/p}M_p}{(lt^{\alpha}_{k-1})^{1/p}(q-1)^{1/q}},$$
$$0 < I_3(\xi,\eta) < \frac{2^{1/p}M_p}{(lt^{\alpha}_{k})^{1/p}(q-1)^{1/q}}. \tag{14}$$

Здесь $q = p/(p-1)$.

Для оценки представим $I_2(\xi,\eta)$ в виде

$$I_2(\xi,\eta) = \Delta_+ \int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \frac{(x-\xi)(x^{\kappa_+}-\xi^{\kappa_+})}{(x-\xi)^2+\eta^2}\,dx + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \frac{(x-\xi)(\Delta_+\xi^{\kappa_+}-n^*_+(x))}{(x-\xi)^2+\eta^2}\,dx.$$

После вычисления второго интеграла получим формулу

$$I_2(\xi,\eta) - \kappa_k \ln\left|\frac{z-t_k}{z-t_{k-1}}\right| = \Big[\Delta_+\xi^{\kappa_+} - n^*_+(t_k)\Big]\ln\left|\frac{z-t_{k+1}}{z-t_{k-1}}\right| + \Delta_+ \int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \frac{(x-\xi)(x^{\kappa_+}-\xi^{\kappa_+})}{(x-\xi)^2+\eta^2}\,dx. \tag{15}$$

Учтя справедливое для $\xi \in (t^*_k, t^*_{k+1})$ неравенство

$$\frac{x^{\kappa_+}-\xi^{\kappa_+}}{x-\xi} < \frac{\kappa_+}{t^{1-\kappa_+}_{k-1}},$$

получим

$$0 < \int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \frac{(x-\xi)(x^{\kappa_+}-\xi^{\kappa_+})}{(x-\xi)^2+\eta^2}\,dx < \kappa_+\frac{t_{k+1}-t_{k-1}}{t^{1-\kappa_+}_{k-1}}.$$

С использованием этого соотношения и легко проверяемого неравенства

$$\left[1+2\frac{t_k-t_{k-1}}{t_{k+1}-t_k}\right]^{-1} < \left|\frac{z-t_{k+1}}{z-t_{k-1}}\right| < 1+2\frac{t_{k+1}-t_k}{t_k-t_{k-1}}$$

из (15) получим

$$\ln\left(1+2\frac{t_k-t_{k-1}}{t_{k+1}-t_k}\right)^{-\varepsilon(t_{k+1})} < I_2(\xi,\eta)-\kappa_k\ln\left|\frac{z-t_k}{z-t_{k-1}}\right| < \ln\left(1+2\frac{t_{k+1}-t_k}{t_k-t_{k-1}}\right)^{\varepsilon(t_{k+1})} + \Delta_+\kappa_+\frac{t_{k+1}-t_{k-1}}{t^{1-\kappa_+}_{k-1}}.$$

Применяя теперь условие (13), запишем

$$-\varepsilon(t_{k+1})\ln\left(1+\frac{2l}{L}+O(1/t^{\kappa_+}_{k-1})\right) < I_2(\xi,\eta)-\kappa_k\ln\left|\frac{z-t_k}{z-t_{k-1}}\right| <$$
$$< \Delta_+\kappa_+L + \varepsilon(t_{k+1})\ln\left(1+\frac{2L}{l}+O(1/t^{\kappa_+}_{k-1})\right). \tag{16}$$

Из неравенств (14), (16) получается требуемая оценка.

Аналогичная оценка в случае $\xi \in (1/2, t^*_2)$ получается из представления функции $I(\xi,\eta)$ в виде

$$I(\xi,\eta) = \Delta_+\int\limits_0^1 \frac{x^{\kappa_+}(x-\xi)\,dx}{(x-\xi)^2+\eta^2} + \int\limits_1^{t_2} \frac{\varepsilon(x)(x-\xi)}{(x-\xi)^2+\eta^2}\,dx + \int\limits_{t_2}^{+\infty} \frac{\varepsilon(x)(x-\xi)}{(x-\xi)^2+\eta^2}\,dx.$$

Двусторонняя оценка $I(\xi,\eta)$ в случае $\xi < 1/2$ элементарна.

Обозначим $J^+(t) = \lim\limits_{z\to t}|J(z)|$ при стремлении z по некасательным путям к точке вещественной оси t, $\kappa^0_n = \min\{\kappa_+, \kappa_k, \alpha\}$, $0 < k < n-1$.

Лемма 2. *Если выполнены условия* (11), (13), *функция* (8) *положительна и удовлетворяет ограничениям* (9), (10), *то функция* $J(t)$ *на интервале* $(-t_n, t_n)$ *удовлетворяет условию*

$$|J^+(t'') - J^+(t')| < N_n|t''-t'|^{\kappa^0_n}.$$

Пусть $t \in (t_k, t_{k+1})$, $k \geq 1$. Из (12) с учетом формулы Сохоцкого получим

$$J^+(t) = \exp\{I(t) - M_+ - \Delta_+/\kappa_+\}, \quad I(t) = I_0(t) + I_1(t) + I_2(t) + I_3(t),$$

$$I_0(t) = \Delta_+ \int_0^1 \frac{x^{\kappa_+}\,dx}{x-t}, \quad \left(\int_1^{t_{k-1}} + \int_{t_{k-1}}^{t_{k+2}} + \int_{t_{k+2}}^{+\infty} \right) \frac{\varepsilon(x)}{x-t}\,dx = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t).$$

Из равенства

$$I_2(t) - \kappa_k \ln \frac{t-t_k}{t-t_{k-1}} - \kappa_{k+1} \ln \frac{t_{k+1}-t}{t_{k+2}-t} = \Delta_+ \int_{t_{k-1}}^{t_{k+2}} \frac{x^{\kappa_+} - t^{\kappa_+}}{x-t}\,dx + [\Delta_+ t^{\kappa_+} - n_+^*(t_k)] \ln \frac{t_{k+2}-t}{t-t_{k-1}}$$

после интегрирования по частям и последующего дифференцирования по параметру (см. [10]) получим

$$\left(I_2(t) - \kappa_k \ln \frac{t-t_k}{t-t_{k-1}} - \kappa_{k+1} \ln \frac{t_{k+1}-t}{t_{k+2}-t} \right)' = \Delta_+ \kappa_+ \int_{t_{k-1}}^{t_{k+2}} \frac{x^{\kappa_+-1} - t^{\kappa_+-1}}{x-t}\,dx +$$

$$+ \frac{\Delta_+\kappa_+}{t^{1-\kappa_+}} \ln \frac{t_{k+2}-t}{t-t_{k-1}} - \frac{\Delta_+ t_{k-1}^{\kappa_+} - n_+^*(t_k)}{t-t_{k-1}} - \frac{\Delta_+ t_{k+2}^{\kappa_+} - n_+^*(t_k)}{t_{k+2}-t}.$$

Учитывая легко проверяемые неравенства

$$0 > \frac{\Delta_+ t_{k-1}^{\kappa_+} - n_+^*(t_k)}{t-t_{k-1}} > \frac{\Delta_+\kappa_+}{t_{k-1}^{1-\kappa_+}},$$

$$\frac{\Delta_+\kappa_+}{t_k^{1-\kappa_+}} \left[1 + \frac{L}{l} \right] + o(1/t_k^{\alpha}) > \frac{\Delta_+ t_{k+2}^{\kappa_+} - n_+^*(t_k)}{t_{k+2}-t} > 0,$$

$$0 > \Delta_+\kappa_+ \int_{t_{k-1}}^{t_{k+2}} \frac{x^{\kappa_+-1} - t^{\kappa_+-1}}{x-t}\,dx > -\frac{\Delta_+\kappa_+}{t_{k-1}^{1-\kappa_+}} \left[1 + O\left(\frac{1}{t_k^{1-\alpha}} \right) \right],$$

$$\frac{\Delta_+\kappa_+}{t^{1-\kappa_+}} \ln \left[\frac{L^2}{l^2} + O\left(\frac{1}{t_k^{1-\alpha}} \right) \right] > \frac{\Delta_+\kappa_+}{t^{1-\kappa_+}} \ln \frac{t_{k+2}-t}{t-t_{k-1}} > \frac{\Delta_+\kappa_+}{t^{1-\kappa_+}} \ln \left[\frac{l^2}{L^2} + O\left(\frac{1}{t_k^{1-\alpha}} \right) \right],$$

выводим

$$\frac{\Delta_+\kappa_+}{t^{1-\kappa_+}} \left[1 + \ln \left[\frac{L}{l} \left(\frac{L}{l} + 1 \right) + O\left(\frac{1}{t_k^{1-\alpha}} \right) \right] \right] > \left(I_2(t) - \kappa_k \ln \frac{t-t_k}{t-t_{k-1}} - \kappa_{k+1} \ln \frac{t_{k+1}-t}{t_{k+2}-t} \right)' >$$

$$> -\frac{\Delta_+\kappa_+}{t^{1-\kappa_+}} \left[1 - 2\ln \frac{l}{L} + O\left(\frac{1}{t_k^{1-\alpha}} \right) \right] - \frac{\Delta_+\kappa_+}{t_k^{1-\kappa_+}} \left[1 + \frac{L}{l} \right] + o\left(\frac{1}{t_k^{\alpha}} \right).$$

Отсюда с использованием оценок

$$0 < I_0'(t) < \frac{\Delta_+}{(1+\kappa_+)(t_k-1)^2}, \qquad 0 < I_1'(t) < \frac{M_p}{l^{1+1/p}(2q-1)^{1/q} t_{k-1}^{(\alpha+\alpha/p)}},$$

$$0 < I_3'(t) < \frac{M_p}{l^{1+1/p}(2q-1)^{1/q} t_{k+1}^{(\alpha+\alpha/p)}}$$

для функции $\tilde{I}_k(t) = I_0(t) + I_1(t) + I_2(t) - \kappa_k \ln \frac{t-t_k}{t-t_{k-1}} - \kappa_{k+1} \ln \frac{t_{k+1}-t}{t_{k+2}-t} + I_3(t)$ получим соотношение

$$\frac{K_+}{t^{1-\kappa_+}} < \tilde{I}_k'(t) < \frac{N_+}{t^{1-\alpha}}, \quad t \in (t_k, t_{k+1}),$$

гарантирующее внутри интервала (t_k, t_{k+1}) для $\exp \tilde{I}_k(t)$ выполнение условия Гельдера с показателем α.

Пусть $t' \in (t_k, t_{k+1}), t'' \in (t_k, t_{k+1})$ и $t' < t''$. Для функции $e^{I(t)} = e^{\tilde{I}_k(t)} \left(\frac{t-t_k}{t-t_{k-1}}\right)^{\kappa_k} \left(\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+2}-t}\right)^{\kappa_{k+1}}$ оценим величину

$$e^{I(t'')} - e^{I(t')} = \left(e^{\tilde{I}_k(t'')} - e^{\tilde{I}_k(t')}\right) \left(\frac{t'-t_k}{t'-t_{k-1}}\right)^{\kappa_k} \left(\frac{t_{k+1}-t'}{t_{k+2}-t'}\right)^{\kappa_{k+1}} +$$

$$+ e^{\tilde{I}_k(t'')} \left(\frac{t_{k+1}-t''}{t_{k+2}-t''}\right)^{\kappa_{k+1}} \left[\left(\frac{t''-t_k}{t''-t_{k-1}}\right)^{\kappa_k} - \left(\frac{t'-t_k}{t'-t_{k-1}}\right)^{\kappa_k}\right] +$$

$$+ e^{\tilde{I}_k(t'')} \left(\frac{t'-t_k}{t'-t_{k-1}}\right)^{\kappa_k} \left[\left(\frac{t_{k+1}-t''}{t_{k+2}-t''}\right)^{\kappa_{k+1}} - \left(\frac{t_{k+1}-t'}{t_{k+2}-t'}\right)^{\kappa_{k+1}}\right].$$

Следуя [5, с. 134], получим

$$\left(\frac{t_{k+1}-t''}{t_{k+2}-t''}\right)^{\kappa_{k+1}} < 1, \qquad \left|\left(\frac{t_{k+1}-t''}{t_{k+2}-t''}\right)^{\kappa_{k+1}} - \left(\frac{t_{k+1}-t'}{t_{k+2}-t'}\right)^{\kappa_{k+1}}\right| < \frac{|t''-t'|^{\kappa_n^0}}{(t_{k+2}-t_{k-1})^{\kappa_n^0}}.$$

На основании этих неравенств как и в [5, с.134] получим

$$\left|e^{I(t'')} - e^{I(t')}\right| < K|t''-t'|^{\kappa_n^0}.$$

В случае $0 < t < 1$ для получения оценки $\tilde{I}_0'(t) = \Big(I(t) - \kappa_1 \ln(1-t)\Big)'$ представим

$$I(t) = \Delta_+ \int\limits_0^1 \frac{x^{\kappa_+}}{x-t}\,dx + \int\limits_1^{t_2} \frac{\Delta_+ x^{\kappa_+} - \kappa_1}{x-t}\,dx + \int\limits_{t_2}^{+\infty} \frac{\varepsilon(x)}{x-t}\,dx,$$

следовательно,

$$I(t) - \kappa_1 \ln(1-t) = (\Delta_+ t^{\kappa_+} - \kappa_1)\ln(t_2-t) - \Delta_+ t^{\kappa_+} \ln t + \Delta_+ \int\limits_0^{t_2} \frac{x^{\kappa_+} - t^{\kappa_+}}{x-t}\,dx + \int\limits_{t_2}^{+\infty} \frac{\varepsilon(x)}{x-t}\,dx.$$

Дифференцируя сингулярный интеграл по параметру как в [10], получим равенство

$$\tilde{I}_0'(t) = \frac{\Delta_+\kappa_+ \ln(t_2-t)}{t^{1-\kappa_+}} - \frac{\Delta_+ t^{\kappa_+} - \kappa_1}{t_2-t} + \Delta_+\kappa_+ \int\limits_0^{t_2} \frac{x^{\kappa_+-1}}{x-t}\,dx + \int\limits_{t_2}^{+\infty} \frac{\varepsilon(x)}{(x-t)^2}\,dx,$$

в котором первый интеграл представим в виде

$$\int\limits_0^{t_2} \frac{x^{\kappa_+-1}}{x-t}\,dx = \frac{1}{t^{1-\kappa_+}} \int\limits_0^{\infty} \frac{\tau^{\kappa_+-1}}{\tau-1}\,d\tau - \frac{1}{t^{1-\kappa_+}} \int\limits_{t_2/t}^{\infty} \frac{\tau^{\kappa_+-1}}{\tau-1}\,d\tau.$$

Учтя неравенства

$$-\frac{\pi \operatorname{ctg}(\kappa_+\pi)}{t^{1-\kappa_+}} - \frac{1}{1-\kappa_+} < \int\limits_0^{t_2} \frac{x^{\kappa_+-1}}{x-t}\,dx < -\frac{\pi \operatorname{ctg}(\kappa_+\pi)}{t^{1-\kappa_+}},$$

$$\int\limits_{t_2}^{+\infty} \frac{\varepsilon(x)}{(x-t)^2}\,dx < \frac{t_2}{(t_2-1)^2} M_+$$

получим ограничение

$$\tilde{I}_0'(t) < \frac{\Delta_+\kappa_+ \ln t_2}{t^{1-\kappa_+}} - \frac{\Delta_+\kappa_+\pi \operatorname{ctg}(\kappa_+\pi)}{t^{1-\kappa_+}} + \frac{t_2 M_+}{(t_2-1)^2} + \frac{\kappa_+}{t_2-1},$$

из которого следует выполнение внутри интервала $(0, t_1)$ условия Гельдера с показателем κ_+ для $\exp \tilde{I}_0(t)$.

Для $t<0$ имеем представление $\ln P_+(t)=\pi\Delta_+|t|^{\kappa_+}/\sin(\pi\kappa_+)-I(t)$, причем

$$I'(t)=\Delta_+\int\limits_0^1\frac{x^{\kappa_+}}{(x-t)^2}\,dx+\int\limits_1^{+\infty}\frac{\varepsilon(x)}{(x-t)^2}\,dx.$$

Для оценки первого интеграла после замены переменной интегрирования $x=-t\tau$ получим

$$\int\limits_0^1\frac{x^{\kappa_+}}{(x-t)^2}\,dx=|t|^{1-\kappa_+}\int\limits_0^{-1/t}\frac{\tau^{\kappa_+}}{(\tau+1)^2}\,d\tau<\frac{3}{2|t|^{1-\kappa_+}}.$$

Поскольку выполнено соотношение

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\varepsilon(x)}{(x-t)^2}\,dx<M_+,$$

то очевидна оценка

$$I'(t)<M_++\frac{3}{2|t|^{1-\kappa_+}},$$

из которой вытекает, что функция $\exp I(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на отрицательной полуоси.

Отсюда и из леммы 1 следует утверждение о выполнении для данной функции условия Гельдера с показателем κ_n^0 всюду на интервале $(-t_n,t_n)$.

Далее решение задачи проведем по схеме, примененной в [4; 5, с. 13] для задачи с конечным числом точек разрыва первого рода коэффициентов.

Краевое условие перепишем в виде

$$\operatorname{Re}\left[e^{-\varphi_1(t)}\frac{P_+(t)\Phi(t)(t+i)^{-\kappa_\infty}}{\exp\Big\{\pi\Delta_+e^{-i\kappa_+(\pi-\theta)}|t|^{\kappa_+}/\sin(\pi\kappa_+)\Big\}}\right]=$$

$$=\frac{c_1(t)|P_+(t)|}{\exp\Big\{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+(\pi-\theta))|t|^{\kappa_+}/\sin(\pi\kappa_+)\Big\}|t+i|^{\kappa_\infty}},$$

где $\theta=0$ при $t>0$ и $\theta=\pi$ при $t<0$,

$$\varphi_1(t)=\varphi(t)+\arg P_+(t)-\kappa_\infty\arg(t+i)+\pi\Delta_+t^{\kappa_+},\quad \arg P_+(t)=n_+^*(t).$$

Следовательно, $\varphi_1(-\infty)=\varphi(-\infty)-\pi\kappa_\infty$, $\varphi_1(+\infty)=\varphi(+\infty)$, т.е. функция $\varphi_1(t)$ непрерывна в точках t_k и при $t=\infty$. При этом для $t_0=0$

$$\varphi_1(t_0-0)-\varphi_1(t_0+0)=\varphi(t_0-0)-\varphi(t_0+0)=\kappa\pi.$$

Поэтому введем функцию

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{(\kappa-\kappa_0)/2}=\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^{(\kappa-\kappa_0)/2}\exp\left\{i\frac{\kappa-\kappa_0}{2}\arg\frac{z-i}{z+i}\right\},$$

$$\left(\frac{z}{z+i}\right)^{\kappa_0}=\left|\frac{z}{z+i}\right|^{\kappa_0}\exp\left\{i\kappa_0\arg\frac{z}{z+i}\right\},$$

где $\kappa_0=0$ при четном κ, $\kappa_0=-1$ при нечетном κ, $\arg\{z/(z+i)\}$ – ветвь, непрерывная в верхней полуплоскости, стремящаяся к нулю при $z=x\to\infty$, $\arg\{(z-i)/(z+i)\}$ – ветвь, непрерывная в плоскости z, разрезанной по участку мнимой оси, соединяющему точки $z=-i$, $z=i$, для которой при $z=x\to\infty$ $\arg\{(z-i)/(z+i)\}\to 0$. Теперь краевое условие преобразуем к виду

$$\mathrm{Re}\left[e^{-\varphi_2(t)}\frac{P_+(t)\Phi(t)(t+i)^{-\kappa_\infty}\Big(t/(t+i)\Big)^{-\kappa_0/2}}{\Big((t-i)/(t+i)\Big)^{(\kappa-\kappa_0)/2}\exp\Big\{\pi\Delta_+e^{-i\kappa_+(\pi-\theta)}|t|^{\kappa_+}/\sin(\pi\kappa_+)\Big\}}\right]=$$

$$=\frac{c_1(t)|P_+(t)||t/(t+i)|^{-\kappa_0/2}}{\exp\Big\{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+(\pi-\theta))|t|^{\kappa_+}/\sin(\pi\kappa_+)\Big\}|(t-i)/(t+i)|^{(\kappa-\kappa_0)/2}|t+i|^{\kappa_\infty}},$$

где

$$\varphi_2(t)=\varphi_1(t)-\kappa_0\arg\frac{t}{t+i}-\frac{\kappa-\kappa_0}{2}\arg\frac{t-i}{t+i}.$$

Функция $\varphi_2(t)$ непрерывна в точках t_0, t_k и $t=\infty$.

Так как функция $G(t)$, $|G(t)|\neq 0$ удовлетворяет условию Гельдера в любом замкнутом интервале $[t_k,t_{k+1}]$, а при больших k — условию вида (2), то аналогичному условию будет удовлетворять так же функция $\nu(t)=\arg G(t)$. Следовательно, функция $\varphi_2(t)$ будет удовлетворять условию Гельдера на любом конечном интервале вещественной оси и условию вида (2), вблизи бесконечно удаленной точки. Следовательно, этими свойствами будет обладать [2, с. 63–68; 11, с. 110] и функция

$$\Gamma_0(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi_2(\tau)d\tau}{\tau-t}.$$

Теперь краевое условие перепишем в виде

$$\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-\Gamma^+(t)}P_+(t)\Phi(t)(t+i)^{-\kappa_\infty}\Big(t/(t+i)\Big)^{-\kappa_0/2}}{\Big((t-i)/(t+i)\Big)^{(\kappa-\kappa_0)/2}\exp\Big\{\pi\Delta_+e^{-i\kappa_+(\pi-\theta)}|t|^{\kappa_+}/\sin(\pi\kappa_+)\Big\}}\right]=c_2(t),$$

$$c_2(t)=\frac{e^{-\Gamma_0(t)}c_1(t)|P_+(t)||t/(t+i)|^{-\kappa_0/2}|t+i|^{-\kappa_\infty}}{\exp\Big\{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+(\pi-\theta))|t|^{\kappa_+}/\sin(\pi\kappa_+)\Big\}|(t-i)/(t+i)|^{(\kappa-\kappa_0)/2}},\tag{17}$$

где $\Gamma_+(t)=\Gamma_0(t)+i\varphi_2(t)$.

Будем считать, что $\kappa_k\neq 0$, следовательно, функция $c_2(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на любом конечном интервале, функция

$$\frac{|P_+(t)|}{\exp\Big\{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+(\pi-\theta))|t|^{\kappa_+}/\sin(\pi\kappa_+)\Big\}}$$

ограничена, следовательно, функция $c_2(t)$ при $t\to\infty$ обращается в нуль порядка $\kappa_\infty+\gamma$, поэтому интеграл Шварца $\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_2(\tau)}{\tau-z}\,d\tau$ существует [2, с. 64] для точек z, лежащих в верхней полуплоскости, определяет в ней аналитическую функцию, действительная часть которой при $z\to t$ стремится к $c_2(t)$, а при $z\to\infty$, $\mathrm{Im}z>0$, по некасательному пути (по отношению к действительной оси) стремится к конечному пределу [2, с.63–68; 11, с. 26]. Поэтому в силу (17) при $\kappa-\kappa_0\geq 0$ имеем

$$\Phi(z)=\frac{\Big((z-i)/(z+i)\Big)^{(\kappa-\kappa_0)/2}\exp\Big\{\pi\Delta_+e^{-i\pi\kappa_+}z^{\kappa_+}/\sin(\pi\kappa_+)\Big\}}{e^{-\Gamma(z)}P_+(z)(z+i)^{-\kappa_\infty}\Big(z/(z+i)\Big)^{-\kappa_0/2}}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_2(t)}{t-z}\,dt+\sum_{k=0}^{(\kappa-\kappa_0)/2}\left(C_k\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^k-\overline{C}_k\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^k\right)\right],\tag{18}$$

где $C_k=A_k+iB_k$ — произвольные постоянные. В случае нечетного κ должно выполняться равенство

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_2(t)}{t}\,dt + iB_0 + 2i\sum_{k=0}^{(\kappa+1)/2}(-1)^k B_k = 0. \qquad (19)$$

Если $\kappa-\kappa_0$ — отрицательное число, то единственное решение задачи представляется формулой

$$\Phi(z) = \frac{\Big((z-i)/(z+i)\Big)^{(\kappa-\kappa_0)/2}\exp\Big\{\pi\Delta_+ e^{-i\pi\kappa_+}z^{\kappa_+}/\sin(\pi\kappa_+)\Big\}}{e^{-\Gamma(z)}P_+(z)(z+i)^{-\kappa_\infty}\Big(z/(z+i)\Big)^{-\kappa_0/2}} \times \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_2(t)}{t-z}\,dt, \qquad (20)$$

в которой $c_2(t)$ удовлетворяет условиям разрешимости

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_2(t)}{(t-z)^k}\,dt, \quad k=\overline{1,-(\kappa-\kappa_0)/2-1}, \qquad (21)$$

а в случае $\kappa=-1$ еще и равенству (19), в котором все B_k равны нулю.

Итак, доказана

Теорема. *Пусть последовательность точек* t_k *удовлетворяет условиям* (11), (13)*, существуют конечные пределы* (7), (5) *и для некоторого числа* κ_+, $0<\kappa_+<1$, *существует конечный предел* (8)*, функция* $\varepsilon(x)$ *удовлетворяет условиям* (9), (10)*, функция* $G(t)$ *и свободный член* $c(t)$ *удовлетворяют условию Гельдера в любом замкнутом интервале* $[t_k,t_{k+1}]$*, с показателем* $\alpha\in(0,1)$ *и условию* (3)*. Тогда при* $(\kappa-\kappa_0)/2\geq 0$ *решение неоднородной задачи в рассматриваемом классе функций определяется формулой* (18)*, причем при нечетном* κ *с дополнительным условием* (19)*; если* $\kappa-\kappa_0$ *— отрицательное четное, то решение представляется формулой* (20) *с дополнительными условиями разрешимости в виде системы* (21)*, а при нечетном* κ *— еще и с условием* (19).

Выражаю глубокую благодарность Р.Б. Салимову за постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 08-01-00381).

Библиографический список

1. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
3. *Чибрикова Л.И., Салехов Л.Г.* К решению краевой задачи Гильберта // Труды семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1971. Вып. 8. С. 155–175.
4. *Салимов Р.Б., Селезнев В.В.* К решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами // Труды семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979. Вып. 16. С. 149–162.
5. *Салимов Р.Б., Шабалин П.Л.* Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения. Казань: Изд-во Казан. мат. об-ва, 2005. 298 с.
6. *Салимов Р.Б., Шабалин П.Л.* Задача Гильберта. Случай бесконечного множества точек разрыва коэффициентов // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 898–915.
7. *Журавлева М.И.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом со счетным множеством разрывов ее коэффициента // Труды Тбилисского мат. ин-та АН Гр. ССР. 1973. Т. 43. С. 53–71.
8. *Журавлева М.И.* Неоднородная краевая задача с бесконечным индексом и со счетным множеством нулей и полюсов коэффициентов // ДАН СССР. 1974. Т. 214, № 4. С. 755–757.
9. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. В 2-х т. М.: Наука, 1968. Т. 2. 624 с.
10. *Крикунов Ю.М.* Дифференцирование особых интегралов с ядром Коши и одно граничное свойство голоморфных функций // Краевые задачи теории функций комплексного переменного. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1962. С. 17–24.
11. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984. 469 с.