УДК 517.5

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА r-КРАТНО ИНТЕГРИРОВАННЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

И.И. Шарапудинов, Г.Н. Муратова*

Дагестанский научный центр РАН,
*Дагестанский государственный педагогический университет, кафедра информатики
E-mail: mg_n@mail.ru

Изучаются аппроксимативные свойства рядов, полученных после r-кратного интегрирования ряда Фурье – Хаара. Показано, что r-кратно интегрированные ряды Фурье – Хаара могут быть полезны в задаче одновременного приближения дифференцируемой функции и ее производных.

Ключевые слова: Функции Хаара, интегрированный ряд Хаара, аппроксимативные свойства.

Same Properties r-fold Integration Series on Fourier – Haar System

I.I. Sharapudinov, G.N. Muratova

Approximation properties of series obtained by r-fold integration of Fourier – Haar series are research. It is shown that r-fold integrated Fourier – Haar series can be useful in the task of simultaneous approximation of differentiable function and its derivatives.

Key words: Haar function, integration Haar series, approximation properties.

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ФУНКЦИЯХ ХААРА И РЯДАХ ФУРЬЕ – ХААРА

Идея об интегрировании рядов Фурье по заданной ортоганальной системе встречаются в работах многих авторов. Хорошо известно, например, система Фабера – Шаудера возникает при однократном интегрировании рядов по системе Хаара. В работе [1] были рассмотрены ряды, возникающие после r-кратного интегрирования рядов Фурье – Хаара функции $g(x) = f^{(r)}(x)$, в которой были найдены условия равномерной сходимости полученного ряда к исходной функции $f(x)$.

В настоящей работе продолжены исследования, начатые в работе [1]. Изучаются аппроксимативные свойства рядов, полученных после r-кратного интегрирования ряда Фурье – Хаара $g(x) = f^{(r)}(x)$. Система Фабера – Шаудера относится к случаю, когда $r = 1$. Показано, что r-кратно интегрированные ряды Фурье – Хаара могут быть полезны в задаче одновременного приближения дифференцируемой функции и ее производных. Следует отметить, что подобные задачи для рядов Фурье – Лежандра и рядов по ультрасферическим полиномам рассматривались в работах [2–5].

Следуя [5] мы введем следующие обозначения. Положим $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, $k = 0, 1, \dots$, $\Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$, $\bar\Delta_n = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right]$, $(n \ge 2)$, $\Delta_1 = (0,1)$, $\bar\Delta_1 = [0,1]$,

$$\Delta_n^+ = (\Delta_k^i)^+ = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) = \Delta_{k+1}^{2i-1}, \qquad \Delta_n^- = (\Delta_k^i)^- = \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right) = \Delta_{k+1}^{2i}.$$

Система Хаара — это система функций $\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $x \in [0,1]$, в которой $\chi_1(x) \equiv 1$, а функция $\chi_n(x)$ с $2^k < n \le 2^{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$ определяется так:

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin \bar\Delta_n, \\ 2^{k/2}, & \text{при } x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2}, & \text{при } x \in \Delta_n^-. \end{cases} \tag{1.1}$$

Значения в точках разрыва $[0,1]$ выбирается так, чтобы выполнялись равенства:

$$\chi_n(x) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2}\left[\chi_n(x+\delta) + \chi_n(x-\delta)\right], \quad x \in (0,1),$$
$$\chi_n(0) = \lim_{\delta\to+0} \chi_n(\delta), \qquad \chi_n(1) = \lim_{\delta\to+0} \chi_n(1-\delta).$$

Непосредственно из определения (1.1) следует, что система Хаара — ортонормированная система, т.е.

$$\int_0^1 \chi_n(x)\chi_m(x)\,dx = \delta_{nm}, \tag{1.2}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера. Если $f = f(x)$ интегрируема на $[0,1]$, то мы можем определить для нее коэффициенты Фурье – Хаара

$$c_k = c_k(f) = \int\limits_0^1 f(t)\chi_k(t)\,dt \tag{1.3}$$

и ряд Фурье – Хаара

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\chi_k(x). \tag{1.4}$$

Через $S_n(f,x)$ обозначим частную сумму ряда (1.4) вида

$$S_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\chi_k(x). \tag{1.5}$$

Нам понадобятся следующие оценки [5]:

$$|c_k(f)| \le (2k)^{-1/2}\omega\left(\frac{1}{k}, f\right), \quad k > 1, \quad f \in C(0,1), \tag{1.6}$$

$$|c_k(f)| \le k^{1/p-1/2}\omega_p\left(\frac{1}{k}, f\right), \quad k > 1, \quad f \in L^p(0,1) \quad (1 \le p < \infty), \tag{1.7}$$

где $C(0,1)$ — пространство непрерывных функций $f = f(x)$,заданных на $[0,1]$ с нормой $\|f\|_C = \max\limits_{0\le x\le 1} |f(x)|$, $L^p(0,1)$ — пространство функций $f = f(x)$, измеримых на $[0,1]$, для которых норма определяется следующим образом:

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

$\omega(\delta, f)$, $\omega_p(\delta, f)$ — модули непрерывности функции f в пространствах $C(0,1)$ и $L^p(0,1)$ соответственно, т.е.

$$\omega(\delta, f) = \sup_{\substack{0\le x\le x+h\le 1,\\ 0\le h\le\delta}} |f(x+h) - f(x)|, \qquad 0 < \delta < 1,$$

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{0<h\le\delta} \left\{ \int\limits_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)^p\,dx \right\}^{1/p}, \qquad 0 < \delta < 1.$$

Отметим следующие оценки [5]:

$$\|f - S_n(f,x)\|_C \le 3\omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad n \ge 1, \quad f \in C(0,1), \tag{1.8}$$

$$\|f - S_n\|_p \le C_p\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad n \ge 1, \quad f \in L^p(0,1), \tag{1.9}$$

где $C_p = 4^{1/p}(1-2^p)^{1/p}$.

2. СИСТЕМА ФУНКЦИЙ $\{\chi_{r,n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$

Для каждого натурального r мы определим систему функций $\{\chi_{r,n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\chi_{r,n}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}\chi_n(t)\,dt, \quad x \in [0,1], \tag{2.1}$$

где $\chi_n(x)$ — функция Хаара. Нам понадобятся ниже свойства этих функций. Непосредственное вычисление интеграла (2.1), пользуясь определением функции Хаара $\chi_n(x)$ (см.(1.1)), дает

$$\chi_{r,1}(x) = \frac{x^r}{r!}, \tag{2.2}$$

а если $n = 2^k + i$, $i = 1, \ldots, 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$, то

$$\chi_{r,n}(x) = \frac{2^{k/2}}{r!} \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{i-1}{2^k}; \\ \left(x - \frac{i-1}{2^k}\right)^r, & \frac{i-1}{2^k} \le x \le \frac{2i-1}{2^{k+1}}; \\ \left(x - \frac{i-1}{2^k}\right)^r - 2\left(x - \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right)^r, & \frac{2i-1}{2^{k+1}} \le x \le \frac{i}{2^k}; \\ \left(x - \frac{i-1}{2^k}\right)^r - 2\left(x - \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right)^r + \left(x - \frac{i}{2^k}\right)^r, & \frac{i}{2^k} \le x \le 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Равенству (2.3) можно придать более компактный вид, если мы введем следующее обозначение:

$$U_+^r = \begin{cases} U^r, & \text{при } U \ge 0; \\ 0, & \text{при } U < 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Пусть $\Delta_h^m \psi = \Delta_h^m \psi(t)$ означает оператор конечной разности порядка m с шагом h, т.е. $\Delta_h^1 \psi(t) = \psi(t+h) - \psi(t)$, $\Delta_h^2 \psi(t) = \psi(t+2h) - 2\psi(t+h) + \psi(t)$, $\Delta_h^m \psi(t) = \Delta_h^1 \Delta_h^{m-1} \psi(t)$, $m \ge 2$. Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \psi_x(t) = (x-t)_+^r, \quad 0 \le t \le 1, \quad 0 \le x \le 1. \tag{2.5}$$

Имеем

$$\Delta^2_{\frac{1}{2^{k+1}}} \psi(t)\Big|_{t=\frac{i-1}{2^k}} = \psi\left(\frac{i}{2^k}\right) - 2\psi\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) + \psi\left(\frac{i-1}{2^k}\right). \tag{2.6}$$

Отсюда с учетом (2.5) и (2.4) находим

$$\Delta^2_{\frac{1}{2^{k+1}}} \psi(t)\Big|_{t=\frac{i-1}{2^k}} = 0, \quad 0 \le x \le \frac{i-1}{2^k}, \tag{2.7}$$

$$\Delta^2_{\frac{1}{2^{k+1}}} \psi(t)\Big|_{t=\frac{i-1}{2^k}} = \left(x - \frac{i-1}{2^k}\right)^r, \quad \frac{i-1}{2^k} \le x \le \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \tag{2.8}$$

$$\Delta^2_{\frac{1}{2^{k+1}}} \psi(t)\Big|_{t=\frac{i-1}{2^k}} = \left(x - \frac{i-1}{2^k}\right)^r - 2\left(x - \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right)^r, \quad \frac{2i-1}{2^{k+1}} \le x \le \frac{i}{2^k}, \tag{2.9}$$

$$\Delta^2_{\frac{1}{2^{k+1}}} \psi(t)\Big|_{t=\frac{i-1}{2^k}} = \left(x - \frac{i-1}{2^k}\right)^r - 2\left(x - \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right)^r + \left(x - \frac{i}{2^k}\right)^r, \quad \frac{i}{2^k} \le x \le 1. \tag{2.10}$$

Сопоставляя (2.7)–(2.10) с (2.3) получаем ($n = 2^k + i,\ i = 1, \ldots, 2^k,\ k = 0, 1, \ldots$)

$$\chi_{r,n}(x) = \frac{2^{k/2}}{r!} \Delta^2_{\frac{1}{2^{k+1}}} (x-t)_+^r \mid_{t=\frac{i-1}{2^k}}. \tag{2.11}$$

Рассмотрим некоторые свойства функций $\chi_{r,n}(x)$, вытекающие из равенства (2.11). Прежде всего заметим, что поскольку функция $\psi(t) = \psi_x(t) = (x-t)_+^r$ выпуклая, то $\Delta_h^2 \psi_x(t) \ge 0$ при $0 \le x \le 1$. Стало быть в силу (2.2) и (2.11)

$$\chi_{r,n}(x) \ge 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.12}$$

Если $r \ge 2$, то из (2.2) и (2.11) следует, что функция $\chi_{r,n}(x)$ дифференцируема $r-1$ раз и

$$\chi_{r,n}^{(\nu)}(x) = \chi_{r-\nu,n}(x), \quad 0 \le \nu \le r-1, \quad 0 \le x \le 1, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.13}$$

Отсюда, в свою очередь, имеем ($r \ge 2$).

$$\chi_{r-\nu,n}(x) = \frac{1}{(r-\nu-2)!} \int_0^x (x-t)^{r-\nu-2} \chi_{1,n}(t)\, dt, \quad 0 \le \nu \le r-2, \quad 0 \le x \le 1, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.14}$$

Если $r = 1$, то из (2.1) непосредственно находим,

$$\chi_{1,n}(x) = \int\limits_0^x \chi_n(t)\,dt, \quad 0 \le x \le 1, \quad n \ge 1. \tag{2.15}$$

С другой стороны, равенство

$$\varphi_n(x) = 2\|\chi_n\|_C \int\limits_0^x \chi_n(t)\,dt, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.16}$$

определяет [5] функции Фабера – Шаудера $\varphi_n(x)$ за исключением функции $\varphi_0(x) = 1$. Сопоставляя (2.15) и (2.16), замечаем, что

$$\chi_{1,n}(x) = \frac{1}{2\|\chi_n\|_C}\varphi_n(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.17}$$

Из (2.12) и (2.13) вытекает, что функция $\chi_{r,n}(x)$ не убывает на [0,1]. Поэтому при $r \ge 2$

$$\max_{0\le x\le 1} \chi_{r,n}(x) = \chi_{r,n}(1). \tag{2.18}$$

С другой стороны, из (2.3) имеем

$$\chi_{r,n}(1) = \left(\left(1 - \frac{i-1}{2^k}\right)^r - 2\left(1 - \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right)^r + \left(1 - \frac{i}{2^k}\right)^r\right)\frac{2^{\frac{k}{2}}}{r!} =$$

$$= \frac{2^{\frac{k}{2}}}{r!}\left(x^r - 2\left(x + \frac{1}{2^{k+1}}\right)^r + \left(x + \frac{2}{2^{k+1}}\right)^r\right)_{x=1-\frac{i}{2^k}} =$$

$$= \frac{2^{\frac{k}{2}}}{r!}\Delta^2_{\frac{1}{2^{k+1}}} x^r \Big|_{x=1-\frac{i}{2^k}} = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{r}\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^2 \frac{d^2}{dx^2}x^r\Big|_{x=\theta},$$

где $1 - \frac{i}{2^k} < \theta < 1 - \frac{i-1}{2^k}$. Отсюда выводим

$$\chi_{r,n}(1) \le \frac{2^{\frac{k}{2}}}{r!}\frac{r(r-1)}{2^{2k+2}}\left(1 - \frac{i-1}{2^k}\right)^{r-2}, \quad n = 2^k + i. \tag{2.19}$$

Из (2.18) и (2.19) вытекает следующая оценка ($r \ge 2,\ n = 2^k + i,\ i = 1, 2, \dots, 2^k,\ k = 0, 1, \dots$)

$$\max_{0\le x\le 1} \chi_{r,n}(x) \le \frac{2^{\frac{k}{2}}}{(r-2)!2^{2k+2}}\left(1 - \frac{i-1}{2^k}\right)^{r-2} \le \frac{n^{-\frac{3}{2}}}{(r-2)!\sqrt{2}}. \tag{2.20}$$

3. r-КРАТНО ИНТЕГРИРОВАННЫЕ РЯДЫ ХААРА

Пусть r — натуральное число, функция $f = f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,1]$ $r-1$ раз, причем $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна. Тогда $f^{(r)} \in L_1(0,1)$ и мы можем рассмотреть коэффициенты Фурье – Хаара функции $f^{(r)}(x)$:

$$f_{r,n} = c_n(f^{(r)}) = \int\limits_0^1 f^{(r)}(t)\chi_n(t)\,dt \tag{3.1}$$

и ее ряд Фурье – Хаара

$$f^{(r)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{r,n}\chi_n(x), \tag{3.2}$$

который сходится к $f^{(r)}(x)$ в метрике пространства $L_1(0,1)$. Более того, если

$$S_N(f^{(r)}, x) = \sum_{n=1}^{N} f_{r,n}\chi_n(x), \tag{3.3}$$

то в силу оценки (1.9)

$$\int\limits_0^1 |f^{(r)}(x) - S_n(f^{(r)}, x)| \le c_1\omega_1\left(\frac{1}{N}, f^{(r)}\right). \tag{3.4}$$

Далее запишем формулу Тейлора

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{f^{\nu}(0)}{\nu!}x^{\nu} + \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\,dt \tag{3.5}$$

и подставим вместо $f^{(r)}(t)$ его значение из (3.2), тогда в силу (2.1)мы находим

$$f(x) = Q_{r-1}(f,x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{r,n}\chi_{r,n}(x), \tag{3.6}$$

где

$$Q_{r-1}(x) = Q_{r-1}(f,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^{\nu}.$$

Равенство (3.6) мы получим формально путем почленного интегрирования ряда Фурье – Хаара, умноженного на $(x-t)^{r-1}$. Покажем, что эта операция законна.

Теорема 3.1. *Пусть* $1 \le r$ *— целое,* $f = f(x)$ $r-1$ *раз непрерывно дифференцируема на* $[0,1]$, *причем* $f^{(r-1)}(x)$ *абсолютно непрерывна на* $[0,1]$. *Тогда имеет место равенство (3.6), причем ряд в правой части этого равенства сходится равномерно.*

Доказательство. Имеем

$$\left|\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\,dt - \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} S_N(f^{(r)},t)\,dt\right| \le \int\limits_0^x (x-t)^{r-1}\left|f^{(r)}(t) - S_N(f^{(r)},t)dt\right| \le$$

$$\le \int\limits_0^1 |x-t|^{r-1}|f^{(r)}(t) - S_N(f^{(r)},t)|\,dt \le \int\limits_0^1 |f^{(r)}(t) - S_N(f^{(r)},t)|\,dt \le c_1\omega_1(\frac{1}{N}, f^{(r)}) \to 0, \quad N\to\infty.$$

Отсюда равномерно относительно $0 \le x \le 1$,

$$g(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\,dt = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} S_N(f^{(r)},t)\,dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f_{r,n}\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}\chi_n(t)\,dt = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f_{r,n}\chi_{r,n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{r,n}\chi_{r,n}(x).$$

Тем самым доказано, что ряд, фигурирующий в правой части равенства (3.6), сходится равномерно к своей сумме $g(x)$. Поэтому справедливость равенства (3.6) при $0 \le x \le 1$следует из (3.5). Теорема 1 доказана.

Ряд (3.6) мы будем называть *r-кратно интегрированным* рядом по системе Хаара. Через $Y_{r,N}(f,x)$ мы обозначим частичную сумму ряда (3.6) вида

$$Y_{r,N}(f,x) = Q_{r-1}(f,x) + \sum_{n=1}^{N} f_{r,n}\chi_{r,n}(x). \tag{3.7}$$

Заметим, что если $N = 2^k + i$, то $Y_{r,N}(f,x)$ представляет собой $r-1$ раз непрерывно дифференцируемый полиномиальный сплайн порядка r с узлами в точках сети $\Pi_N = \{\frac{s}{2^k}\}_{s=0}^{2^k} \cup \left\{\frac{2s-1}{2^{k+1}}\right\}_{s=1}^{i}$. Остаточный член ряда (3.6) мы обозначим через $R_{r,N}(f,x)$, т.е.

$$R_{r,N}(f,x)=\sum_{n=N+1}^{\infty} f_{r,n}\chi_{r,n}(x). \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) имеем

$$f(x)-Y_{r,N}(x)=R_{r,N}(f,x). \tag{3.9}$$

Далее заметим, что для полинома Тейлора из (3.6) справедливо равенство

$$Q^{(\nu)}_{r-1}(f,x)=Q_{r-\nu-1}(f^{(\nu)},x), \tag{3.10}$$

а для коэффициентов $f_{r,k}$, определенных равенством (3.1) имеем

$$f_{r,n}=f^{(\nu)}_{r-\nu,n}. \tag{3.11}$$

С другой стороны из (3.6) находим

$$f^{(\nu)}(x)=Q^{(\nu)}_{r-1}(f,x)+\sum_{n=1}^{\infty} f_{r,n}\chi^{(\nu)}_{r,n}(x). \tag{3.12}$$

Сопоставляя (3.10)–(3.12) с (2.13), получаем

$$f^{(\nu)}(x)=Q_{r-\nu-1}(f^{(\nu)},x)+\sum_{n=1}^{\infty} f^{(\nu)}_{r-\nu,n}\chi_{r-\nu,n}(x)=Y_{r-\nu,N}(f^{(\nu)},x)+R_n(f^{(\nu)},x). \tag{3.13}$$

Аналогично из (3.7) имеем

$$Y^{(\nu)}_{r,N}(f,x)=Q_{r-\nu-1}(f^{(\nu)},x)+\sum_{n=1}^{N} f^{(\nu)}_{r-\nu,n}\chi_{r-\nu,n}(x)=Y_{r-\nu,N}(f^{(\nu)},x). \tag{3.14}$$

Из (3.13) и (3.14) выводим $(0\le\nu\le r-1)$

$$f^{(\nu)}(x)-Y^{(\nu)}_{r,N}(f,x)=R_N(f^{(\nu)},x)=\sum_{n=N+1}^{\infty} f_{r,n}\chi_{r-\nu,n}(x). \tag{3.15}$$

Рассмотрим более подробный случай $\nu=r-1$. В этом случае равенство (3.15) с учетом (3.14) принимает вид

$$f^{(r-1)}(x)-Y_{1,N}(f^{(r-1)},x)=\sum_{n=N+1}^{\infty} f_{r,n}\chi_{1,n}(x), \tag{3.16}$$

где

$$Y_{1,N}(f^{(r-1)},x)=f^{(r-1)}(0)+\sum_{n=1}^{n} f_{r,n}\chi_{1,n}(x), \tag{3.17}$$

а равенство (3.13) дает

$$f^{(r-1)}(x)=f^{(r-1)}(0)+\sum_{n=1}^{\infty} f_{r,n}\chi_{1,n}(x), \tag{3.18}$$

причем ряд (3.18) сходится равномерно относительно $x\in[0,1]$. С другой стороны, из (2.16) и (3.18) имеем $(\varphi_0(x)\equiv 1)$:

$$f^{(r-1)}(x)=f^{(r)}(0)\varphi_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{r,n}}{2\|\chi_n\|_C}\varphi_n(x), \tag{3.19}$$

где $\varphi_n(x)$ функции Фабера – Шаудера. Поскольку система Фабера – Шаудера является базисом в $C(0,1)$, то из единственности $f^{(r-1)}(x)$ по этой системе вытекают равенства (см.[5]) $f_0=A_0(f^{(r-1)})$,

$$\frac{f_{r,1}}{2\|\chi_1\|_C}=f^{(r-1)}(1)-f^{(r-1)}(0)=A_1(f^{(r-1)}),$$

$$\frac{f_{r,n}}{2\|\chi_n\|_C}=f^{(r-1)}\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right)-\frac{1}{2}\left[f^{(r-1)}\left(\frac{i-1}{2^k}\right)+f^{(r-1)}\left(\frac{i}{2^k}\right)\right]=A_n(f^{(r-1)}), \qquad (3.20)$$

где $n=2^k+i$, $i=1,\ldots,2^k$, $k=0,1,\ldots$ В частности, из (3.17) и (3.20) следует, что

$$Y_{1,N}(f^{(r-1)})=\sum_{n=0}^{N}A_n(f^{(r-1)})\varphi_n(x), \qquad (3.21)$$

а из (3.16) и (3.20) находим

$$f^{(r-1)}(x)-Y_{1,N}(f^{(r-1)},x)=\sum_{n=N+1}^{\infty}A_n(f^{(r-1)})\varphi_n(x), \qquad (3.22)$$

или

$$f^{(r-1)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(f^{(r-1)})\varphi_n(x). \qquad (3.23)$$

Это означает, что $(r-1)$-кратное дифференцирование r-интегрированного ряда (3.6)приводит к ряду Фабера – Шаудера функции $f^{(r-1)}(x)$. Это, в свою очередь, означает,что если $r=1$, то r-кратно интегрированный ряд функции $f=f(x)$ по системе Хаара совпадает с ее рядом Фабера – Шаудера. Итак, если $f=f(x)$ абсолютно непрерывная функция, заданная на $[0,1]$, то ее ряд Фабера – Шаудера есть r-кратно интегрированный ряд по системе Хаара, соответствующий случаю $r=1$.

4. АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ $Y_{r,N}(f)$

Пусть $p\ge 1$, r — натурально. Обозначим через W_p^r пространство функций $f=f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$ и $f^{(r)}\in L_p(0,1)$.

Мы рассмотрим аппроксимативные свойства операторов $Y_{r,N}(f)$ на классах W_p^r. Нам понадобится следующая величина:

$$\omega_2(f,\delta)=\sup_{\substack{0\le h\le\delta,\\ h\le x\le 1-h}}|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)|, \qquad (4.1)$$

представляющая модуль гладкости второго порядка $f=f(x)$, определенной на $[0,1]$.

Теорема 4.1. *Пусть r — натурально, $0\le\nu\le r-1$. Если $f\in W_1^r$, то имеет место оценка*

$$|f^{(\nu)}(x)-Y_{r,N}^{(\nu)}(f,x)|\le\frac{x^{r-1-\nu}}{(r-1-\nu)!}\omega_2\left(f^{(r-1)},\frac{1}{N}\right),\quad 0\le x\le 1. \qquad (4.2)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\nu=r-1$. Тогда имеет место следующая известная (см. [5, с. 207]) оценка:

$$\left|f^{(r-1)}(x)-\sum_{n=0}^{N}A_n(f^{(r-1)})\varphi_n(x)\right|\le\omega_2\left(f^{(r-1)},\frac{1}{N}\right). \qquad (4.3)$$

Сопоставляя (3.21) и (4.3), находим

$$\left|f^{(r-1)}(x)-Y_{1,N}(f^{(r-1)},x)\right|\le\omega_2\left(f^{(r-1)},\frac{1}{N}\right),\quad 0\le x\le 1. \qquad (4.4)$$

Утверждение теоремы 4.1, относящееся к случаю $\nu=r-1$, доказано. Пусть $0\le\nu\le r-2$, тогда в силу (3.15)

$$\left|f^{(\nu)}(x)-Y_{r,N}^{(\nu)}(f,x)\right|=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}f_{r,n}\chi_{r-\nu,n}(x)\right|=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}f_{r,n}\frac{1}{(r-\nu-2)!}\int_0^x(x-t)^{r-\nu-2}\chi_{1,n}(t)dt\right|\le$$

$$\le\frac{1}{(r-\nu-2)!}\int_0^x(x-t)^{r-\nu-2}\,dt\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}f_{r,n}\chi_{1,n}(t)\right|=$$

$$= \frac{1}{(r-\nu-2)!} \int\limits_0^x (x-t)^{r-\nu-2} \left| f^{(r-1)}(t) - Y_{1,N} f^{(r-\nu)}(f,t) \right| \, dt.$$

Если мы здесь воспользуемся оценкой (4.4), то получим

$$\left| f^{(\nu)}(x) - Y_{r,N}^{(\nu)}(f,x) \right| \le \frac{\omega_2(f^{(r-1)}, \frac{1}{N})}{(r-\nu-2)!} \int\limits_0^x (x-t)^{r-\nu-2} \, dt = \frac{x^{r-\nu-1}}{(r-\nu-1)!} \omega_2 \left(f^{(r-1)}, \frac{1}{N} \right).$$

Теорема 4.1 доказана.

Замечание 1. Величина $\omega_2(f^{(r-1)}, \delta)$, определенная с помощью равенства (4.1) и фигурирующая в теореме 4.1, может быть описана с помощью r-той производной $f^{(r)}(x)$ функции $f \in W_p^r$, коэффициенты Фурье – Хаара которой участвуют в конструкции оператора $Y_{r,N}(f)$. В самом деле, если $f \in W_p^r$, то

$$f^{(r-1)}(x+h) + f^{(r-1)}(x-h) - 2f^{(r-1)}(x) = \int\limits_x^{x+h} f^{(r)}(t) \, dt - \int\limits_{x-h}^{x} f^{(r)}(t) \, dt =$$

$$= \int\limits_0^h \left[f^{(r)}(x+t) - f^{(r)}(x+t-h) \right] \, dt,$$

поэтому мы можем определить величину $\eta(f^{(r)}, \delta)$ следующим образом:

$$\omega_2(f^{(r-1)}, \delta) = \sup_{\substack{0 \le h \le \delta, \\ h \le x \le 1-h}} \left| \int\limits_0^h \left[f^{(r)}(x+t) - f^{(r)}(x+t-h) \right] dt \right| = \eta(f^{(r)}, \delta). \qquad (4.5)$$

Теперь оценка (4.2) приобретает следующий вид:

$$\left| f^{(\nu)}(x) - Y_{r,N}^{(\nu)}(f,x) \right| \le \frac{x^{r-1-\nu}}{(r-1-\nu)!} \eta \left(f^{(r)}, \frac{1}{N} \right), \quad 0 \le \nu \le r-1, \quad 0 \le x \le 1. \qquad (4.6)$$

В качестве следствия отметим, что, если,например, $f^{(r)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left| f^{(r)}(x_1) - f^{(r)}(x_2) \right| \le M|x_1 - x_2|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \le 1, \quad 0 \le x_1, x_2 \le 1,$$

то из (4.6) вытекает оценка

$$\left| f^{(r)}(x) - Y_{r,N}^{(\nu)}(f,x) \right| \le \frac{x^{r-1-\nu}}{(r-1-\nu)!} \frac{M}{N^{1+\alpha}}, \quad 0 \le \nu \le r-1, \quad 0 \le x \le 1.$$

Теорема 4.2. *Пусть $r \ge 2$, $f \in W_2^r$, $E_N(f^{(r)})_{L_2} = \|f^{(r)} - S_N(f^{(r)})\|_2$ — наилучшее приближение порядка N функции $f^{(r)}(x)$ в пространстве $L_2[0,1]$ полиномами по системе Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^N$. Тогда*

$$\left| f^{(\nu)}(x) - Y_{r,N}^{(\nu)}(f,x) \right| \le \frac{E_N(f^{(r)})_{L_2}}{2(r-\nu-2)!N}, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le \nu \le r-2.$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (3.15), тогда, пользуясь неравенством Коши – Буняковского, имеем

$$\left| f^{(\nu)}(x) - Y_{r,N}(f,x) \right| \le \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} f_{r,n}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \chi_{r-\nu,n}^2(x) \right)^{1/2} =$$

$$= E_N(f^{(r)})_{L_2} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \chi_{r-\nu,n}^2(x) \right)^{1/2}. \qquad (4.7)$$

Обратимся к оценке (2.19). Тогда

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \chi^2_{r-\nu,n}(x) \leq \frac{1}{2((r-\nu-2)!)^2 N^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} <$$

$$< \frac{1}{2((r-\nu-2)!)^2} \int\limits_N^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{4((r-\nu-2)!)^2 N^2}. \tag{4.8}$$

Сопоставляя (4.7) и (4.8) убеждаемся в справедливости теоремы 4.2.

Замечание 2. Пусть $1 \leq m$ — натуральное число. H^0_m — m-мерное пространство ступенчатых функций вида

$$g(x) = \sum_{n=1}^{m} c_k \chi_k(x).$$

Через H^r_m обозначим линейное пространство $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых на [0,1] полиномиальных сплайнов степени r таких, что $f^{(r)} \in H^0_m$. Тогда, если $f \in H^r_m$, то $f_{r,n} = 0$ при $n > m$. Поэтому r-кратно интегрированный ряд (3.6) для такой функции приобретает вид

$$f(x) = Q_{r-1}(f,x) + \sum_{n=1}^{m} f_{r,n} \chi_{r,n}(x).$$

Отсюда следует, что система функций

$$\{1, x, \ldots, x^{r-1}\} \cup \{\chi_{r,n}(x)\}_{n=1}^m$$

является базисом пространства H^r_m. Кроме того, оператор $Y_{r,N}(f) = Y_{r,N}(f,x)$ является проектором на пространство H^r_m, т. е. если $f \in H^r_m$, то

$$Y_{r,N}(f,x) \equiv f(x), \qquad x \in [0,1].$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 07-01-00143).

Библиографический список

1. *Шарапудинов И.И.* Смешанные ряды по некоторым ортогональным системам и их приложения // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 12-й Сарат. зимней школы. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004. С. 205-206.
2. *Шарапудинов И.И.* Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье – Лежандра // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 5. С. 143–160.
3. *Шарапудинов И.И.* Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 3. С. 115–148.
4. *Шарапудинов И.И.* Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Мат. заметки. 2002. Т. 72, № 5. С. 765–795.
5. *Кашин С.Б., Саакян А.А.* Ортоганальные ряды. М.: АФЦ, 1999.