УДК 517.927.25

КРАТНАЯ НЕПОЛНОТА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

О.В. Шигаева

Саратовская государственная академия права,
кафедра информатики
E-mail: Oksana_Shigaeva@mail.ru

Рассматривается класс пучков обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что корни характеристического уравнения пучков этого класса лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Главное предположение состоит в том, что порождающие функции для системы собственных и присоединенных функций являются линейными комбинациями экспонент. Описываются случаи, когда система собственных и присоединенных функций n-кратно и m-кратно $(3 \leq m \leq n-1)$ неполна с бесконечным дефектом в пространстве суммируемых с квадратом функций на любом конечном отрезке.

Ключевые слова: кратная полнота, кратная неполнота, собственные и присоединенные функции, пучок обыкновенных дифференциальных операторов.

Multiple Non-Completeness for the System of Eigenfunctions of a Class of the Pencils of Ordinary Differential Operators

O.V. Shigaeva

Saratov State Academy of Law,
Chair of Informatics
E-mail: Oksana_Shigaeva@mail.ru

A class of the pencils of ordinary differential operators of n-th order with constant coefficients is considered. The roots of the characteristic equation of the pencils from this class is supposed to lie on a straight line coming through the origin. The main condition is such that the generating functions for the system of eigen- and associated functions are linear combinations of exponential functions. The cases when the system of eigen- and associated functions is n-fold and m-fold $(3 \leq m \leq n-1)$ non-complete with infinity defect in the space of square summable functions on an arbitrary finite interval are described.

Key words: multiple completeness, multiple non-completeness, eigen- and associated functions, pencil of ordinary differential operators.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ пучок операторов $L(\lambda)$, порожденный однородным дифференциальным выражением

$$l(y,\lambda) = y^{(n)}(x) + \lambda p_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + \lambda^n p_n y(x),$$

и двухточечными линейно независимыми краевыми условиями:

$$\sum_{s+k \leq n-1} \lambda^s \left(\alpha_{jsk} y^{(k)}(0) + \beta_{jsk} y^{(k)}(1)\right) = 0, \quad j = \overline{1,n},$$

где $n \geq 3$, а $p_j, \alpha_{jsk}, \beta_{jsk} \in \mathbb{C}$.

Пусть корни ω_j, $j = \overline{1,n}$, характеристического уравнения $\omega^n + p_1\omega^{n-1} + \cdots + p_n = 0$ для дифференциального уравнения $l(y,\lambda) = 0$ попарно различны, отличны от нуля и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, причем так, что один корень ω_n лежит по одну сторону от начала координат, а остальные корни — по другую сторону.

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\omega_n < 0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{n-1}. \tag{1}$$

Пусть собственные значения (с.з.) пучка $L(\lambda)$ образуют счетное множество $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, занумерованы в порядке неубывания модулей, и собственные и присоединенные функции (с.п.ф.) пучка $L(\lambda)$, соответствующие ненулевым собственным значениям, начиная с некоторого номера N, порождаются одной порождающей функцией:

$$y(x,\lambda) = a_1 e^{\lambda\omega_1 x} + a_2 e^{\lambda\omega_2 x} + \cdots + a_{n-1} e^{\lambda\omega_{n-1} x} + a_n e^{\lambda\omega_n x}, \quad a_j \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Обозначим $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ и рассмотрим следующие системы функций: Y_Λ — система с.п.ф. пучка $L(\lambda)$, а

$$Y_{\mathbb{C}} = \{y(x,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}. \tag{3}$$

Задача состоит в исследовании n- и m-кратной неполноты ($1 \le m \le n$) систем Y_Λ и $Y_\mathbb{C}$ в пространствах $L_2[0, \sigma]$, $\sigma > 0$. Ранее в [1–3] был исследован случай, когда корни характеристического уравнения лежат на одном луче по одну сторону от начала координат, и порождающая функция также имеет вид (2). В работе [4] анонсирована теорема об n-кратной, а в работе [5] — об m-кратной неполноте систем Y_Λ и $Y_\mathbb{C}$ в пространствах $L_2[0, \sigma]$, $\sigma > 0$ при условиях (1) и (2).

Данным условиям, очевидно, удовлетворяет следующий класс пучков, рассмотренный в работе [6]:

$$\sum_{s+k=n} p_{sk} \lambda^s y^{(k)},$$

$$\sum_{s+k=\varkappa_j} \lambda^s \alpha_{jsk} y^{(k)}(0) = 0, \qquad j = \overline{1, n-1},$$

$$\sum_{s+k=\varkappa_n} \lambda^s (\alpha_{nsk} y^{(k)}(0) + \beta_{nsk} y^{(k)}(1)) = 0,$$

где $p_{sk} \in \mathbb{C}$, $p_{0n} \ne 0$, $\alpha_{jsk}, \beta_{jsk} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ — порядки краевых условий, если корни характеристического уравнения удовлетворяют неравенствам (1). Для данного класса пучков порождающая функция имеет вид (2). В работе [6] исследована полнота собственных и присоединенных функций в случае, когда корни характеристического уравнения удовлетворяют неравенствам

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n.$$

В данной статье доказываются следующие результаты.

Теорема 1. *Предположим, что выполняется условие* (1), *и функция* $y(x, \lambda)$ *в* (3) *определяется формулой* (2). *Тогда при любых* $a_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, n}$, *в* (2) *система* $Y_\mathbb{C}$ *не является* n*-кратно полной ни в каком пространстве* $L_2[0, \sigma]$, *где* $\sigma > 0$, *и имеет в каждом таком пространстве бесконечный дефект относительно* n*-кратной полноты.*

Следствие 1. *Система* Y_Λ *не является* n*-кратно полной ни в каком пространстве* $L_2[0, \sigma]$, *где* $\sigma > 0$, *и имеет в каждом таком пространстве бесконечный дефект относительно* n*-кратной полноты.*

Теорема 2. *Предположим,* $n \ge 4$, *выполняется условие* (1), *и функция* $y(x, \lambda)$ *в* (3) *определяется формулой* (2). *Если коэффициенты* $a_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, n}$, *в* (2) *таковы, что выполняется условие*

$$q = \min_{\substack{r, l = \overline{1, m} \\ r \ne l}} \sum_{s=1}^{n-2} \left| \frac{a_s}{a_{n-1}} \right| \left| \frac{\omega_s^{-l} - \omega_s^{-r} \omega_n^{r-l}}{\omega_{n-1}^{-l} - \omega_{n-1}^{-r} \omega_n^{r-l}} \right| < 1, \tag{4}$$

то система $Y_\mathbb{C}$ *не является* m*-кратно полной* ($3 \le m \le n-1$) *ни в каком пространстве* $L_2[0, \sigma]$, $\sigma > 0$, *и имеет в каждом таком пространстве бесконечный дефект относительно* m*-кратной полноты.*

Следствие 2. *Предположим* $n \ge 4$, *выполняется условие* (1), *и функция* $y(x, \lambda)$ *в* (3) *определяется формулой* (2). *Тогда если коэффициенты* $a_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, n}$ *в* (2) *таковы, что выполняется условие* (4), *то система* Y_Λ *не является* m*-кратно полной* ($3 \le m \le n-1$) *ни в каком пространстве* $L_2[0, \sigma]$, *где* $\sigma > 0$, *и имеет в каждом таком пространстве бесконечный дефект относительно* m*-кратной полноты.*

Замечание 1. Условие (4) выполняется, например, для пучка

$$y^{(4)} - 5.2\lambda y^{(3)} + 2.36\lambda^2 y^{(2)} + 20.848\lambda^3 y^{(1)} - 25.344\lambda^4 y,$$

$$y(0) = y'(0) = y^{(3)}(0) - 3.1\lambda y^{(2)}(0) = y'(1) = 0.$$

Корни характеристического уравнения данного пучка есть $\omega_1 = 1.8$, $\omega_2 = 2.2$, $\omega_3 = 3.2$, $\omega_4 = -2$, и, очевидно, удовлетворяют неравенствам (1), а порождающая функция (2) имеет вид $y(x, \lambda) = -6,552e^{1.8\lambda x} - 2.7664e^{2.2\lambda x} + 7.0224e^{3.2\lambda x} + 2.296e^{-2\lambda x}$.

Для этого пучка при $l = 1$ и $r = 3$ получаем $\sum_{s=1}^{2} \left| \frac{a_s}{a_3} \right| \left| \frac{\omega_s^{-l} - \omega_s^{-r} \omega_4^{r-l}}{\omega_3^{-l} - \omega_3^{-r} \omega_4^{r-l}} \right| \approx 0.801678 < 1$, а следовательно, и подавно будет $q < 1$.

Доказательство сформулированных результатов существенно использует теорему об ортогональном дополнении к системе $\widehat{Y}_\mathbb{C}^m = \{\widehat{y}(x, \lambda) | \lambda \in \mathbb{C}\}$, где $m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le n$, $\widehat{y}(x, \lambda) = (y(x, \lambda), \lambda y(x, \lambda), \ldots \ldots, \lambda^{m-1} y(x, \lambda))^T$.

2. ТЕОРЕМА ОБ ОРТОГОНАЛЬНОМ ДОПОЛНЕНИИ

Пусть как и перед этим $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le n$. Будем использовать следующие обозначения: $\widehat{f}(x) = (\overline{f_1}(x), \overline{f_2}(x), \ldots, \overline{f_m}(x))^T$, $\forall\ g \in L[0,\sigma]:\ (g)_1(x) = \int\limits_0^x g(\xi)d\xi$, $(g)_j(x) = \int\limits_0^x (g)_{j-1}(\xi)d\xi = = \int\limits_0^x \frac{(x-\xi)^{j-1}}{(j-1)!} g(\xi)d\xi$, $j = \overline{2, m-1}$.

Теорема 3. *Если*

$$f_k \in L_2[0,\sigma], \quad k = \overline{1,m}, \tag{5}$$

$$(f_k)_j(\sigma) = 0, \quad j = \overline{1, m-k}, \quad k = \overline{1, m-1}, \tag{6}$$

тогда для того, чтобы

$$\widehat{Y}_{\mathbb{C}}^m \perp \widehat{f} \tag{7}$$

в пространстве $L_2^m[0,\sigma]$*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:*

$$\begin{cases} \frac{a_n}{|\omega_n|} F_n\left(\frac{x}{|\omega_n|}\right) = 0, & \text{п.в.}\ \ x \in [0, \sigma|\omega_n|], \\ \sum\limits_{s=1}^{n-1} \frac{a_s}{\omega_s} F_s\left(\frac{x}{\omega_s}\right) = 0, & \text{п.в.}\ \ x \in [0, \sigma\omega_1], \\ \sum\limits_{s=2}^{n-1} \frac{a_s}{\omega_s} F_s\left(\frac{x}{\omega_s}\right) = 0, & \text{п.в.}\ \ x \in (\sigma\omega_1, \sigma\omega_2], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{s=n-2}^{n-1} \frac{a_s}{\omega_s} F_s\left(\frac{x}{\omega_s}\right) = 0, & \text{п.в.}\ \ x \in (\sigma\omega_{n-3}, \sigma\omega_{n-2}], \\ \frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}} F_{n-1}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) = 0, & \text{п.в.}\ \ x \in (\sigma\omega_{n-2}, \sigma\omega_{n-1}], \end{cases} \tag{8}$$

где

$$F_s(x) = \sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \omega_s^{m-k} (f_k)_{m-k}(x), \quad s = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть выполняется условие (5). Условие (7) запишем в следующем виде:

$$0 = \sum_{k=1}^m \lambda^{k-1} \int\limits_0^\sigma y(x,\lambda) f_k(x)dx, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Для каждого $k = \overline{1, m-1}$ проинтегрируем k-е слагаемое справа в (10) по частям $m-k$ раз. Для первого слагаемого получим

$$\int\limits_0^\sigma y(x,\lambda) f_1(x)dx = \int\limits_0^\sigma y(x,\lambda) d(f_1)_1(x) = y(\sigma,\lambda)(f_1)_1(\sigma) - \int\limits_0^\sigma y'(x,\lambda)(f_1)_1(x)dx =$$

$$= y(\sigma,\lambda)(f_1)_1(\sigma) - \int\limits_0^\sigma y'(x,\lambda) d(f_1)_2(x) = y(\sigma,\lambda)(f_1)_1(\sigma) - y'(\sigma,\lambda)(f_1)_2(\sigma) + \int\limits_0^\sigma y''(x,\lambda)(f_1)_2(x)dx =$$

$$= y(\sigma,\lambda)(f_1)_1(\sigma) - y'(\sigma,\lambda)(f_1)_2(\sigma) + \int\limits_0^\sigma y''(x,\lambda) d(f_1)_3(x) = \cdots = y(\sigma,\lambda)(f_1)_1(\sigma) - y'(\sigma,\lambda)(f_1)_2(\sigma) +$$

$$+ y''(\sigma,\lambda)(f_1)_3(\sigma) + \cdots + (-1)^{m-2} y^{(m-2)}(\sigma,\lambda)(f_1)_{m-1}(\sigma) + (-1)^{m-1} \int\limits_0^\sigma y^{(m-1)}(x,\lambda)(f_1)_{m-1}(x)dx,$$

для второго слагаемого повторяем аналогичные действия:

$$\lambda \int\limits_0^\sigma y(x,\lambda) f_2(x)dx = \lambda \int\limits_0^\sigma y(x,\lambda) d(f_2)_1(x) = \lambda y(\sigma,\lambda)(f_2)_1(\sigma) - \lambda \int\limits_0^\sigma y'(x,\lambda)(f_2)_1(x)dx =$$

$$= \lambda y(\sigma,\lambda)(f_2)_1(\sigma) - \lambda \int_0^\sigma y'(x,\lambda)d(f_2)_2(x) = \lambda y(\sigma,\lambda)(f_2)_1(\sigma) - \lambda y'(\sigma,\lambda)(f_2)_2(\sigma) +$$

$$+\lambda \int_0^\sigma y''(x,\lambda)(f_2)_2(x)dx = \lambda y(\sigma,\lambda)(f_2)_1(\sigma) - \lambda y'(\sigma,\lambda)(f_2)_2(\sigma) + \lambda \int_0^\sigma y''(x,\lambda)d(f_2)_3(x) = \cdots =$$

$$= \lambda y(\sigma,\lambda)(f_2)_1(\sigma) - \lambda y'(\sigma,\lambda)(f_2)_2(\sigma) + \lambda y''(\sigma,\lambda)(f_2)_3(\sigma) + \cdots + \lambda(-1)^{m-3} y^{(m-3)}(\sigma,\lambda)(f_2)_{m-2}(\sigma) +$$

$$+\lambda(-1)^{m-2} \int_0^\sigma y^{(m-2)}(x,\lambda)(f_2)_{m-2}(x)dx;$$

и так далее. Для $(m-1)$-го слагаемого в (10) получим

$$\lambda^{m-2} \int_0^\sigma y(x,\lambda) f_{m-1}(x)dx = \lambda^{m-2} \int_0^\sigma y(x,\lambda)d(f_{m-1})_1(x) =$$

$$= \lambda^{m-2} y(\sigma,\lambda)(f_{m-1})_1(\sigma) - \lambda^{m-2} \int_0^\sigma y'(x,\lambda)(f_{m-1})_1(x)dx.$$

Подставив найденные формулы в (10), будем иметь

$$0 = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda^{k-1} \sum_{j=1}^{m-k} (-1)^{j-1} y^{(j-1)}(\sigma,\lambda)(f_k)_j(\sigma) + \int_0^\sigma \sum_{k=1}^{m} \lambda^{k-1}(-1)^{m-k} y^{(m-k)}(x,\lambda)(f_k)_{m-k}(x)dx.$$

Из этого равенства в силу условия (6) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ получим соотношения

$$0 = \int_0^\sigma \sum_{k=1}^{m} \lambda^{k-1}(-1)^{m-k} y^{(m-k)}(x,\lambda)(f_k)_{m-k}(x)dx. \tag{11}$$

Так как $y^{(m-k)}(x,\lambda) = \lambda^{m-k} \sum\limits_{s=1}^{n} a_s e^{\lambda\omega_s x}\omega_s^{m-k}$, то, используя обозначение (9), из (11) получим

$$0 = \int_0^\sigma \sum_{k=1}^{m} \lambda^{k-1}(-1)^{m-k} \lambda^{m-k} \sum_{s=1}^{n} a_s e^{\lambda\omega_s x}\omega_s^{m-k}(f_k)_{m-k}(x)dx =$$

$$= \lambda^{m-1} \sum_{s=1}^{n} \int_0^\sigma a_s e^{\lambda\omega_s x} F_s(x)dx, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{12}$$

Сделаем в интегралах замену переменных $\xi = \omega_s x$. В результате будем иметь

$$0 = \lambda^{m-1} \left(\sum_{s=1}^{n-1} \int_0^{\sigma\omega_s} \frac{a_s}{\omega_s} e^{\lambda x} F_s\left(\frac{x}{\omega_s}\right) dx + \int_0^{\sigma\omega_n} \frac{a_n}{\omega_n} e^{\lambda x} F_n\left(\frac{x}{\omega_n}\right) dx \right).$$

Считаем, что $\lambda \neq 0$. Разделим обе части последнего равенства на λ^{m-1}, получим

$$0 = \sum_{s=1}^{n-1} \int_0^{\sigma\omega_s} \frac{a_s}{\omega_s} e^{\lambda x} F_s\left(\frac{x}{\omega_s}\right) dx + \int_0^{\sigma\omega_n} \frac{a_n}{\omega_n} e^{\lambda x} F_n\left(\frac{x}{\omega_n}\right) dx,$$

или

$$0 = \sum_{s=1}^{n-1} \int_0^{\sigma\omega_s} \frac{a_s}{\omega_s} e^{\lambda x} F_s\left(\frac{x}{\omega_s}\right) dx + \int_{-\sigma|\omega_n|}^{0} \frac{a_n}{|\omega_n|} e^{\lambda x} F_n\left(-\frac{x}{|\omega_n|}\right) dx,$$

или

$$0 = \int_{-\sigma|\omega_n|}^{\sigma\omega_{n-1}} F(x)e^{\lambda x}dx, \qquad \forall\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \tag{13}$$

где

$$F(x) = \begin{cases} \frac{a_n}{|\omega_n|} F_n\left(\frac{x}{\omega_n}\right), & \text{п.в. } x \in [-\sigma|\omega_n|, 0], \\ \sum\limits_{s=1}^{n-1} \frac{a_s}{\omega_s} F_s\left(\frac{x}{\omega_s}\right), & \text{п.в. } x \in [0, \sigma\omega_1], \\ \sum\limits_{s=2}^{n-1} \frac{a_s}{\omega_s} F_s\left(\frac{x}{\omega_s}\right), & \text{п.в. } x \in (\sigma\omega_1, \sigma\omega_2], \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \sum\limits_{s=n-2}^{n-1} \frac{a_s}{\omega_s} F_s\left(\frac{x}{\omega_s}\right), & \text{п.в. } x \in (\sigma\omega_{n-3}, \sigma\omega_{n-2}], \\ \frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}} F_{n-1}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right), & \text{п.в. } x \in (\sigma\omega_{n-2}, \sigma\omega_{n-1}]. \end{cases} \tag{14}$$

Очевидно, из (13) следует, что $F(x) = 0$ для почти всех $x \in [-\sigma|\omega_n|, \sigma\omega_{n-1}]$, а это с учетом (14) эквивалентно (8). Нетрудно заметить, что проведенные рассуждения в предположении (5)–(6) обратимы, а именно из (8) вытекает (13), а затем (12). Из (12) следует (10) на основании (6). А (10) равносильно (7). Таким образом, достаточность условия (8) доказана, а следовательно, и теорема 3 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Запишем (8) подробнее:

$$\begin{cases} \frac{a_n}{|\omega_n|} F_n\left(\frac{x}{|\omega_n|}\right) = 0, & \text{п.в. } x \in [0, \sigma|\omega_n|], \\ \frac{a_1}{\omega_1} F_1\left(\frac{x}{\omega_1}\right) + \frac{a_2}{\omega_2} F_2\left(\frac{x}{\omega_2}\right) + \dots + \frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}} F_{n-1}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) = 0, & \text{п.в. } x \in [0, \sigma\omega_1], \\ \frac{a_2}{\omega_2} F_2\left(\frac{x}{\omega_2}\right) + \dots + \frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}} F_{n-1}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) = 0, & \text{п.в. } x \in (\sigma\omega_1, \sigma\omega_2], \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}} F_{n-1}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) = 0, & \text{п.в. } x \in (\sigma\omega_{n-2}, \sigma\omega_{n-1}]. \end{cases} \tag{15}$$

Пусть $m = n$, $\sigma > 0$ — любое фиксированное число и $h_j \in C^{n-1}[0, \sigma]$, $j = \overline{1, n}$ — произвольные функции, такие что

$$h_j(\sigma) = h'_j(\sigma) = \dots = h_j^{n-1}(\sigma) = 0, \tag{16}$$

$h_n(x) = 0$, $x \in [0, \sigma]$, и

$$h_{n-1}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) = \begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{n-2} h_j\left(\frac{x}{\omega_j}\right), & x \in [0, \sigma\omega_1], \\ -\sum\limits_{j=2}^{n-2} h_j\left(\frac{x}{\omega_j}\right), & x \in (\sigma\omega_1, \sigma\omega_2], \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ -h_{n-2}\left(\frac{x}{\omega_{n-2}}\right), & x \in (\sigma\omega_{n-3}, \sigma\omega_{n-2}], \\ 0, & x \in (\sigma\omega_{n-2}, \sigma\omega_{n-1}]. \end{cases}$$

Очевидно, множество функций $h = (h_1(x), \dots, h_n(x))^T$, обладающих указанными свойствами, является бесконечномерным подпространством в $L_2[0, \sigma]$.

Положим

$$F_s(x) = \frac{\omega_s}{a_s} h_s(x), \quad x \in [0, \sigma], \quad s = \overline{1, n}. \tag{17}$$

Функции $F_s(x)$ удовлетворяют соотношениям (8).

Подставив (17) в левые части формул (9), получим для нахождения функций $(f_1)_{n-1}(x)$, $(f_2)_{n-2}(x)$, ..., $(f_{n-1})_1(x)$, $f_n(x)$ систему из n уравнений.

$$\sum_{k=1}^{n} (-\omega_s)^{n-k} (f_k)_{n-k}(x) = \frac{\omega_s}{a_s} h_s(x), \quad s = \overline{1, n}. \tag{18}$$

При фиксированном $x \in [0, \sigma]$ система (18) является системой линейных алгебраических уравнений с определителем Вандермонда от попарно различных чисел $-\omega_1, -\omega_2, \ldots, -\omega_n$, который не зависит от x и отличен от нуля.

Из (18) имеем $(f_k)_{n-k}(x) = \sum\limits_{s=1}^{n} c_{ks} h_s(x)$, $k = \overline{1,n}$, отсюда, так как $h_n(x) \equiv 0$, получим

$$(f_k)_{n-k}(x) = \sum_{s=1}^{n-1} c_{ks} h_s(x), \quad k = \overline{1,n}, \tag{19}$$

где c_{ks} — числовые коэффициенты, определяемые однозначно из системы (18).

Дифференцируя k-е соотношение в (19) $n-k$ раз и полагая $x = \sigma$, получим с учетом (16)

$$(f_k)_j(\sigma) = \sum_{s=1}^{n-1} c_{ks} h_s^{(n-k-j)}(\sigma) = 0, \quad j = \overline{1, n-k}, \quad k = \overline{1,n},$$

$$f_k(x) = \sum_{s=1}^{n-1} c_{ks} h_s^{(n-k)}(x), \quad k = \overline{1,n}.$$

Отсюда следует, что функции $f_k(x)$ удовлетворяют свойствам (5)–(6) теоремы 3 в случае $m = n$. Тогда по этой теореме с учетом того, что функции $F_s(x)$, определяемые формулами (17), удовлетворяют соотношениям (8), семейство функций $\widehat{f} = (\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_n})^T$ ортогонально семейству функций $(y(x,\lambda), \lambda y(x,\lambda), \ldots, \lambda^{n-1} y(x,\lambda))^T$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$. По построению семейство функций $\widehat{f}$, обладающих этим свойством, образует бесконечномерное подпространство в $L_2[0,\sigma]$. Таким образом, теорема 1 доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Зафиксируем $m \in \{3, 4, \ldots, n-1\}$. Для доказательства теоремы 2 будем использовать функциональное соотношение (8), полученное в теореме 3. Построим функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$, для которых выполняются условия (5) и (6), а функции $F_s(x), s = \overline{1,n}$, строящиеся по формулам (9), удовлетворяют соотношениям (8).

Подставим (9) в (8):

$$\begin{cases} \frac{a_n}{|\omega_n|} \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \omega_n^{m-k} (f_k)_{m-k} \left(\frac{x}{|\omega_n|}\right) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in [0, \sigma|\omega_n|], \\ \sum\limits_{s=1}^{n-1} \frac{a_s}{\omega_s} \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \omega_s^{m-k} (f_k)_{m-k} \left(\frac{x}{\omega_s}\right) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in [0, \sigma\omega_1], \\ \sum\limits_{s=2}^{n-1} \frac{a_s}{\omega_s} \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \omega_s^{m-k} (f_k)_{m-k} \left(\frac{x}{\omega_s}\right) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in (\sigma\omega_1, \sigma\omega_2], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{s=n-2}^{n-1} \frac{a_s}{\omega_s} \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \omega_s^{m-k} (f_k)_{m-k} \left(\frac{x}{\omega_s}\right) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in (\sigma\omega_{n-3}, \sigma\omega_{n-2}], \\ \frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}} \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \omega_{n-1}^{m-k} (f_k)_{m-k} \left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) = 0, & \text{п.в.} \quad x \in (\sigma\omega_{n-2}, \sigma\omega_{n-1}]. \end{cases} \tag{20}$$

Рассмотрим первое уравнение в (20), сделаем замену переменных $\frac{x}{|\omega_n|} = t$ и разделим на $\frac{a_n}{|\omega_n|}$. Получим

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \omega_n^{m-k} (f_k)_{m-k}(x) = 0, \quad x \in [0, \sigma]. \tag{21}$$

Зададим произвольные $r, l \in \overline{1,m}$, $r \neq l$. Для $k \neq r$ и $k \neq l$ выберем $(f_k)_{m-k}(x)$ произвольно, так что $f_k \in C^m[0,\sigma]$ и

$$(f_k)_j(\sigma) = 0, \quad (f_k)^{(j)}(\sigma) = 0, \quad k, j = \overline{1,m}, \quad k \neq r, \quad k \neq l.$$

Выразим $(f_r)_{m-r}$ из соотношения (21) через $(f_l)_{m-l}$ и остальные $m-2$ функции $(f_k)_{m-k}$, которые m раз непрерывно дифференцируемы. Функцию $(f_l)_{m-l}$ считаем пока не заданной. Получим

$$(f_r)_{m-r}(x) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq r,l}}^{m} (-1)^{r+1-k}\omega_n^{r-k}(f_k)_{m-k}(x) + (-1)^{r+1-l}\omega_n^{r-l}(f_l)_{m-l}(x), \quad x\in[0,\sigma]. \tag{22}$$

Обозначим $(f_l)_{m-l}(x) = \varphi(x)$. Тогда из (22) видно, что если $\varphi(x)$ такова, что $\varphi(x)\in C^m[0,\sigma]$, $\varphi(\sigma) = \varphi'(\sigma) = \dots = \varphi^{(m)}(\sigma) = 0$, тогда и $(f_r)_{m-r}(x)$ будет, по крайней мере, из $C^{m-r}[0,\sigma]$ и $(f_r)_j(\sigma) = 0$, $j=\overline{1,m-r}$.

Перепишем (за исключением первого) соотношения в (20) с учетом (22) таким образом, чтобы слева остались только слагаемые с функцией φ. Будем иметь последовательно:

$$\begin{cases}
\sum\limits_{s=1}^{n-1}\frac{a_s}{\omega_s}\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{m}(-\omega_s)^{m-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_s}\right) - \sum\limits_{s=1}^{n-1}\frac{a_s}{\omega_s}(-\omega_s)^{m-r}\times \\
\times\left(\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r,l}}^{m}(-\omega_n)^{r-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_s}\right) + (-\omega_n)^{r-l}\varphi\left(\frac{x}{\omega_s}\right)\right) = 0, \qquad \text{п.в.}\quad x\in[0,\sigma\omega_1], \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}}\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{m}(-\omega_{n-1})^{m-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) - \frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}}(-\omega_{n-1})^{m-r}\times \\
\times\left(\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r,l}}^{m}(-\omega_n)^{r-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) + (-\omega_n)^{r-l}\varphi\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right)\right) = 0, \quad \text{п.в. } x\in(\sigma\omega_{n-2},\sigma\omega_{n-1}];
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\sum\limits_{s=1}^{n-1}\frac{a_s}{\omega_s}(-\omega_s)^{m-l}\varphi\left(\frac{x}{\omega_s}\right) - \sum\limits_{s=1}^{n-1}\frac{a_s}{\omega_s}(-\omega_n)^{r-l}\varphi\left(\frac{x}{\omega_s}\right)(-\omega_s)^{m-r} = \\
= -\sum\limits_{s=1}^{n-1}\frac{a_s}{\omega_s}\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r,l}}^{m}(-\omega_s)^{m-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_s}\right) + \sum\limits_{s=1}^{n-1}\frac{a_s}{\omega_s}(-\omega_s)^{m-r}\times \\
\times\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r,l}}^{m}(-1)^{r+1-k}\omega_n^{r-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_s}\right), \qquad \text{п.в.}\quad x\in[0,\sigma\omega_1], \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}}(-\omega_{n-1})^{m-l}\varphi\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) - \frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}}(-\omega_n)^{r-l}\varphi\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right)(-\omega_{n-1})^{m-r} = \\
= -\frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}}\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r,l}}^{m}(-\omega_{n-1})^{m-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) + \frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}}(-\omega_{n-1})^{m-r}\times \\
\times\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r,l}}^{m}(-\omega_n)^{r-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right), \qquad \text{п.в.}\quad x\in(\sigma\omega_{n-2},\sigma\omega_{n-1}];
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\sum\limits_{s=1}^{n-1}a_s\omega_s^{m-1}(-1)^{m-l}(\omega_s^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_s^{-r})\varphi\left(\frac{x}{\omega_s}\right) = \\
= -\sum\limits_{s=1}^{n-1}\frac{a_s}{\omega_s}\left(\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r,l}}^{m}(-\omega_s)^{m-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_s}\right) - \right. \\
\left. - \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r,l}}^{m}(-\omega_s)^{m-r}(-\omega_n)^{r-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_s}\right)\right), \qquad \text{п.в.}\quad x\in[0,\sigma\omega_1], \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n-1}\omega_{n-1}^{m-1}(-1)^{m-l}(\omega_{n-1}^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_{n-1}^{-r})\varphi\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) = \\
= -\frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}}\left(\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r,l}}^{m}(-\omega_{n-1})^{m-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right) - \right. \\
\left. - \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r,l}}^{m}(-\omega_{n-1})^{m-r}(-\omega_n)^{r-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right)\right), \qquad \text{п.в.}\quad x\in(\sigma\omega_{n-2},\sigma\omega_{n-1}].
\end{cases} \tag{23}$$

Обозначим

$$h\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right)=\begin{cases}-\sum\limits_{s=1}^{n-1}\frac{a_s}{\omega_s}\left(\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r,l}}^{m}(-\omega_s)^{m-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_s}\right)-\right.\\ \left.-\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r,l}}^{m}(-\omega_s)^{m-r}(-\omega_n)^{r-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_s}\right)\right), & \text{п.в. } x\in[0,\sigma\omega_1],\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\ -\frac{a_{n-1}}{\omega_{n-1}}\left(\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r,l}}^{m}(-\omega_{n-1})^{m-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right)-\right.\\ \left.-\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq r,l}}^{m}(-\omega_{n-1})^{m-r}(-\omega_n)^{r-k}(f_k)_{m-k}\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right)\right), & \text{п.в. } x\in(\sigma\omega_{n-2},\sigma\omega_{n-1}].\end{cases}$$

Ясно, что $h(x)\in C^m[0,\sigma]$ и $h(\sigma)=h'(\sigma)=\dots=h^{(m)}(\sigma)=0$. При этом соотношения (23) будут иметь вид

$$\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{n-1}a_s\omega_s^{m-1}(-1)^{m-l}(\omega_s^{-l}-\omega_n^{r-l}\omega_s^{-r})\varphi\left(\frac{x}{\omega_s}\right)=h\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right), & \text{п.в. } x\in[0,\sigma\omega_1],\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\ a_{n-1}\omega_{n-1}^{m-1}(-1)^{m-l}(\omega_{n-1}^{-l}-\omega_n^{r-l}\omega_{n-1}^{-r})\varphi\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right)=h\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right), & \text{п.в. } x\in(\sigma\omega_{n-2},\sigma\omega_{n-1}].\end{cases}$$

Далее, имеем

$$\varphi\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right)=\begin{cases}\frac{(-1)^{l-m}}{a_{n-1}\omega_{n-1}^{m-1}(\omega_{n-1}^{-l}-\omega_n^{r-l}\omega_{n-1}^{-r})}\left(h\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right)-\right.\\ \left.-\sum\limits_{s=1}^{n-2}a_s\omega_s^{m-1}(-1)^{m-l}(\omega_s^{-l}-\omega_n^{r-l}\omega_s^{-r})\varphi\left(\frac{x}{\omega_s}\right)\right), & \text{п.в. } x\in[0,\sigma\omega_1],\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\ \frac{(-1)^{l-m}}{a_{n-1}\omega_{n-1}^{m-1}(\omega_{n-1}^{-l}-\omega_n^{r-l}\omega_{n-1}^{-r})}h\left(\frac{x}{\omega_{n-1}}\right), & \text{п.в. } x\in(\sigma\omega_{n-2},\sigma\omega_{n-1}].\end{cases}$$

Пусть $\widetilde{h}(x)=\frac{(-1)^{l-m}}{a_{n-1}\omega_{n-1}^{m-1}(\omega_{n-1}^{-l}-\omega_n^{r-l}\omega_{n-1}^{-r})}h(x)$. Делая замену переменных $x=\omega_{n-1}\xi$, будем иметь:

$$\varphi(x)=B\varphi(x)+\widetilde{h}(x),\quad x\in[0,\sigma], \tag{24}$$

где

$$(B\varphi)(x)=\begin{cases}-\sum\limits_{s=1}^{n-2}\frac{a_s}{a_{n-1}}\left(\frac{\omega_s}{\omega_{n-1}}\right)^{m-1}\frac{(\omega_s^{-l}-\omega_n^{r-l}\omega_s^{-r})}{(\omega_{n-1}^{-l}-\omega_n^{r-l}\omega_{n-1}^{-r})}\varphi\left(\frac{\omega_{n-1}}{\omega_s}x\right), & \text{п.в. } x\in\left[0,\sigma\frac{\omega_1}{\omega_{n-1}}\right],\\ -\sum\limits_{s=2}^{n-2}\frac{a_s}{a_{n-1}}\left(\frac{\omega_s}{\omega_{n-1}}\right)^{m-1}\frac{(\omega_s^{-l}-\omega_n^{r-l}\omega_s^{-r})}{(\omega_{n-1}^{-l}-\omega_n^{r-l}\omega_{n-1}^{-r})}\varphi\left(\frac{\omega_{n-1}}{\omega_s}x\right), & \text{п.в. } x\in\left(\sigma\frac{\omega_1}{\omega_{n-1}},\sigma\frac{\omega_2}{\omega_{n-1}}\right],\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\ 0, & \text{п.в. } x\in\left(\sigma\frac{\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}},\sigma\right].\end{cases}$$

Считая $B\in W_2^{m-1}[0,\sigma]\to W_2^{m-1}[0,\sigma]$, оценим норму этого оператора. Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\Phi_s(x)=\begin{cases}-\frac{a_s}{a_{n-1}}\left(\frac{\omega_s}{\omega_{n-1}}\right)^{m-1}\frac{(\omega_s^{-l}-\omega_n^{r-l}\omega_s^{-r})}{(\omega_{n-1}^{-l}-\omega_n^{r-l}\omega_{n-1}^{-r})}\varphi\left(\frac{\omega_{n-1}}{\omega_s}x\right), & x\in\left[0,\sigma\frac{\omega_s}{\omega_{n-1}}\right],\\ 0, & x\in\left(\sigma\frac{\omega_s}{\omega_{n-1}},\sigma\right].\end{cases}$$

Очевидно,

$$\|B\varphi\|_{W_2^{m-1}[0,\sigma]}=\|\sum_{s=1}^{n-2}\Phi_s\|_{W_2^{m-1}[0,\sigma]}\le\sum_{s=1}^{n-2}\|\Phi_s\|_{W_2^{m-1}[0,\sigma]}. \tag{25}$$

Таким образом,

$$\|\Phi_s\|^2_{W_2^{m-1}[0,\sigma]} = \sum_{k=0}^{m-1} \|\Phi_s^{(k)}\|^2_{L_2[0,\sigma]} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_0^{\sigma\frac{\omega_s}{\omega_n}} \left|\frac{a_s}{a_{n-1}}\right|^2 \left|\frac{\omega_s}{\omega_{n-1}}\right|^{2(m-1)} \frac{(\omega_s^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_s^{-r})^2}{(\omega_{n-1}^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_{n-1}^{-r})^2} \left(\frac{\omega_{n-1}}{\omega_s}\right)^{2k} \left|\varphi^{(k)}\left(\frac{\omega_{n-1}}{\omega_s}x\right)\right|^2 dx =$$

$$= \left|\frac{a_s}{a_{n-1}}\right|^2 \left|\frac{(\omega_s^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_s^{-r})}{(\omega_{n-1}^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_{n-1}^{-r})}\right|^2 \left|\frac{\omega_s}{\omega_{n-1}}\right|^{2m-2} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{\omega_{n-1}}{\omega_s}\right)^{2k} \int\limits_0^{\sigma} \left|\varphi^{(k)}(x)\right|^2 dx \le$$

$$\le \left|\frac{a_s}{a_{n-1}}\right|^2 \left|\frac{(\omega_s^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_s^{-r})}{(\omega_{n-1}^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_{n-1}^{-r})}\right|^2 \left|\frac{\omega_s}{\omega_{n-1}}\right|^{2m-2} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{\omega_{n-1}}{\omega_s}\right)^{2k} \|\varphi^{(k)}\|^2_{L_2[0,\sigma]} \le$$

$$\le \left|\frac{a_s}{a_{n-1}}\right|^2 \left|\frac{(\omega_s^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_s^{-r})}{(\omega_{n-1}^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_{n-1}^{-r})}\right|^2 \left|\frac{\omega_s}{\omega_{n-1}}\right|^{2m-2} \left|\frac{\omega_{n-1}}{\omega_s}\right|^{2m-2} \|\varphi\|^2_{W_2^{m-1}[0,\sigma]},$$

или

$$\|\Phi_s\|_{W_2^{m-1}[0,\sigma]} \le \left|\frac{a_s}{a_{n-1}}\right| \left|\frac{(\omega_s^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_s^{-r})}{(\omega_{n-1}^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_{n-1}^{-r})}\right| \|\varphi\|_{W_2^{m-1}[0,\sigma]}.$$

Следовательно,

$$\|B\varphi\|_{W_2^{m-1}[0,\sigma]} \le \sum_{s=1}^{n-2} \|\Phi_s\|_{W_2^{m-1}[0,\sigma]} \le$$

$$\le \sum_{s=1}^{n-2} \left|\frac{a_s}{a_{n-1}}\right| \left|\frac{(\omega_s^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_s^{-r})}{(\omega_{n-1}^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_{n-1}^{-r})}\right| \|\varphi\|_{W_2^{m-1}[0,\sigma]} = b(l,r)\|\varphi\|_{W_2^{m-1}[0,\sigma]},$$

где

$$b(l,r) = \sum_{s=1}^{n-2} \left|\frac{a_s}{a_{n-1}}\right| \left|\frac{(\omega_s^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_s^{-r})}{(\omega_{n-1}^{-l} - \omega_n^{r-l}\omega_{n-1}^{-r})}\right|.$$

Так как r и l являются параметрами, тогда если

$$\min_{\substack{r,l=\overline{1,m}\\ r\ne l}} b(l,r) = \min_{\substack{r,l=\overline{1,m}\\ r\ne l}} \sum_{s=1}^{n-2} \left|\frac{a_s}{a_{n-1}}\right| \left|\frac{\omega_s^{-l} - \omega_s^{-r}\omega_n^{r-l}}{\omega_{n-1}^{-l} - \omega_{n-1}^{-r}\omega_n^{r-l}}\right| < 1,$$

то уравнение (24) имеет при любой функции $\widetilde{h(x)}$ единственное решение $\varphi \in W_2^{m-1}[0,\sigma]$. Тем самым в этом случае требуемые функции $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ построены.

Таким образом, множество вектор-функций $\widehat{f} = (\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_m})^T$ образует бесконечномерное подпространство в $L_2^m[0,\sigma]$ и по теореме 3 ортогонально семейству функций из $Y_{\mathbb{C}}$ в этом пространстве. Следовательно, теорема 2 полностью доказана.

Библиографический список

1. *Рыхлов В.С.* О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных диференциальных операторов // Математика. Механика: Сб. науч.тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 114–117.

2. *Рыхлов В.С.* О кратной неполноте собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче // Докл. РАЕН. 2004. № 4. С. 72–79.

3. *Голубь А.В., Кутепов В.А., Рыхлов В.С.* Кратная неполнота собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче. Деп. в ВИНИТИ 05.08.04. № 1353-В2004. Саратов, 2004. 24 с.

4. *Рыхлов В.С., Шигаева О.В.* Об n-кратной неполноте системы собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 14-й Сарат. зимн. школы. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 162.

5. *Рыхлов В.С., Шигаева О.В.* Теорема о кратной неполноте комбинации экспонент с показателями, ле-

жащими на одной прямой, и ее применение к пучкам дифференциальных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 69–72.

6. *Рыхлов В.С.* О полноте собственных функций одного класса дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2009. № 6. С. 42–53.

УДК 517.984

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФЕ-КУСТЕ

В.А. Юрко

Саратовский государственный университет,
кафедра вычислительной математики
и математической физики
E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для операторов Штурма – Лиувилля на произвольном графе с циклом. Приведена конструктивная процедура решения и установлена его единственность.

Ключевые слова: операторы Штурма – Лиувилля, пространственные сети, обратные спектральные задачи.

Recovering Differential Operators on a Bush-Type Graph

V.A. Yurko

Saratov State University,
Chair of Mathematical Physics and Numerical Analysis
E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

An inverse spectral problem is studied for Sturm – Liouville operators on arbitrary graphs with a cycle. A constructive procedure for the solution is provided and the uniqueness is established.

Key words: Sturm – Liouville operators, spatial networks, inverse spectral problems.

ВВЕДЕНИЕ

Исследуется обратная задача спектрального анализа для дифференциальных операторов Штурма – Лиувилля на так называемом графе-кусте, т.е. на произвольном графе с циклом. Обратные спектральные задачи состоят в восстановлении коэффициентов операторов по их спектральным характеристикам. Основные результаты по обратным спектральным задачам на *интервале* представлены в [1]. Обратные задачи на графах являются более трудными, и в настоящее время есть только несколько работ в этой области. В частности, обратные задачи восстановления коэффициентов дифференциальных операторов на произвольного вида деревьях (т.е. на графах без циклов) исследовались в работах [2–6] и других. Обратные задачи на графах с циклом изучались в работах [7–9], но только для весьма частных случаев. В данной статье рассматриваются более общие графы, чем в работах [7–9], а именно произвольные графы с циклом. Для этого класса графов дается постановка и решение обратной задачи спектрального анализа. Доказана соответствующая теорема единственности и получена конструктивная процедура построения решения этого класса обратных задач.

Рассмотрим компактный граф G в $\mathbf{R}^\ell$ ($\ell \geq 2$) с множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$ и множеством вершин $W = V \cup U$, где $V = \{v_1, \dots, v_r\}$, $U = \{u_1, \dots, u_N\}$. Граф имеет вид $G = e_0 \cup T$, где e_0 — цикл, $u_i \in e_0$, $i = \overline{1, N}$, $v_j \notin e_0$, $j = \overline{1, r}$, $T \cap e_0 = U$, $T = T_1 \cup \ldots \cup T_m$, T_j — дерево с корнем из множества U и с одним корневым ребром из $\mathcal{E}$. Множество T состоит из N групп деревьев: $T = Q_1 \cup \ldots \cup Q_N$, $Q_i \cap e_0 = u_i$, т.е. все деревья из Q_i имеют общий корень u_i. Пусть m_i — число деревьев в блоке Q_i; т.е. $m_1 + \dots + m_N = m$. Обозначим $s_0 = 1$, $s_i = m_1 + \dots + m_i$, $i = \overline{1, N}$. Тогда

$$Q_i = \bigcup_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} T_j, \, , \quad \bigcap_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} T_j = u_i, \; i = \overline{1, N}.$$

Зафиксируем $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, m}$ и рассмотрим дерево $T_j \in Q_i$. Для двух точек $a, b \in T_j$ будем писать $a \leq b$, если a лежит на единственном простом пути, соединяющем корень u_i с b. Будем писать $a < b$, если $a \leq b$ и $a \neq b$. Отношение $<$ определяет частичную упорядоченность на T_j. Если $a < b$, то обозначим $[a, b] := \{z \in T_j : \; a \leq z \leq b\}$. В частности, если $e = [v, w]$ — ребро, то мы будем называть v его начальной точкой, w — его конечной точкой, и будем говорить, что e выходит из v и заканчивается