



## МЕХАНИКА

УДК 539.4

### ПАРАМЕТРЫ СМЕШАННЫХ ФОРМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДЛЯ ТРЕЩИНЫ В ВИДЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО РАЗРЕЗА

В.Н. Шлянников, С.Ю. Кислова

Исследовательский центр проблем энергетики Казанского научного центра РАН  
E-mail: shlyannikov@mail.ru, svetlana\_kislova@mail.ru

Разработан метод и приведены результаты расчетов упругопластических коэффициентов интенсивности напряжений в полном диапазоне смешанных форм деформирования от нормального отрыва до чистого сдвига. Рассмотрено состояние произвольно ориентированной прямолинейной трещины в виде математического разреза при двухосном нагружении различной интенсивности. Решение построено на использовании уравнения совместности деформаций, представленное через функцию напряжений Эри и ее производные. Поведение упругопластического материала соответствует модели Рамберга – Осгуда. На основе выполненных расчетов установлен характер влияния вида смешанных форм нагружения и пластических свойств материала, описываемых показателем деформационного упрочнения.

**Ключевые слова:** трещина, смешанные формы нагружения, математический надрез, параметр смешанности, поля напряжений, коэффициент интенсивности напряжений.

#### Mode Mixity Parameters for Mathematical Crack Type

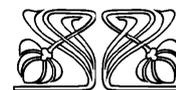
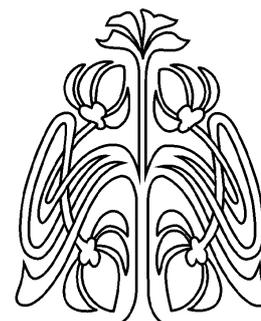
V.N. Shlyannikov, S.Yu. Kislova

A method for calculating the elastic-plastic stress intensity factors for full range of mixed mode loading from tensile to shear crack is suggested. The state of arbitrary oriented straight-line crack in form of mathematical notch under biaxial loading is considered. The solution is based on a combination of both the compatibility strain equation and the Airy stress function with its derivatives. The elastic-plastic material behavior is represented by the Ramberg – Osgood model. On the base of obtaining results the influence of both mode mixity and material plastic properties, describing by strain hardening exponent, on the elastic-plastic stress intensity factors is stated.

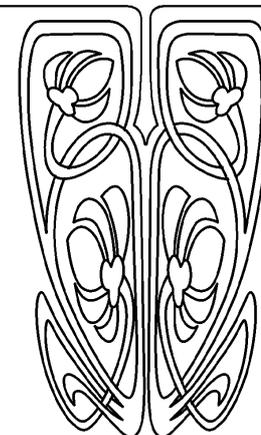
**Key words:** crack, mixed mode loading, mathematical notch, mixity parameter, stress fields, stress intensity factor.

#### ВВЕДЕНИЕ

Сопrotивление упругопластических материалов разрушению характеризуется предельными значениями коэффициентов интенсивности напряжений (КИН), зависящими от вида нагружения. Наиболее широко экспериментальные данные и результаты решения плоских краевых задач представлены только для ситуации нормального отрыва, когда плоскость дефекта расположена по нормали к направлению действующей нагрузки. Однако на практике не совпадение направления приложения усилия и плоскости ориентации исходного дефекта является скорее правилом, чем исключением. Подобные задачи в механике трещин принадлежат к классу смешанных форм деформирования и разрушения. В открытой литературе отсутствует анализ поведения упругопластических КИН в полном диапазоне условий нагружения от нормального отрыва до чистого сдвига. В этой связи



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





актуальной является задача расчета параметров смешанных форм деформирования для наиболее распространенной модели дефекта в виде математического разреза.

Рассмотрим пластину бесконечных размеров, находящуюся в условиях плоской деформации и ослабленную внутренней прямолинейной сквозной трещиной длиной  $a$ , ориентированной под углом  $\alpha$  к направлению номинального напряжения  $\sigma$  (рис. 1). Соотношение компонент номинальных напряжений, приложенных к торцам пластины характеризуется коэффициентом двухосности  $\eta$ . Полный диапазон смешанных форм деформирования может быть реализован за счет различных комбинаций  $\alpha$  и  $\eta$ . Так, частный случай нормального отрыва достигается при  $\alpha = \pi/2$  для любого  $\eta$ , а чистый сдвиг возникает при  $\alpha = \pi/4$  и  $\eta = -1$ . Все остальные ситуации относятся к условиям смешанных форм деформирования. В исходном состоянии расстояние между противоположными берегами трещины и радиус кривизны ее вершины равны нулю, что соответствует определению математического разреза.

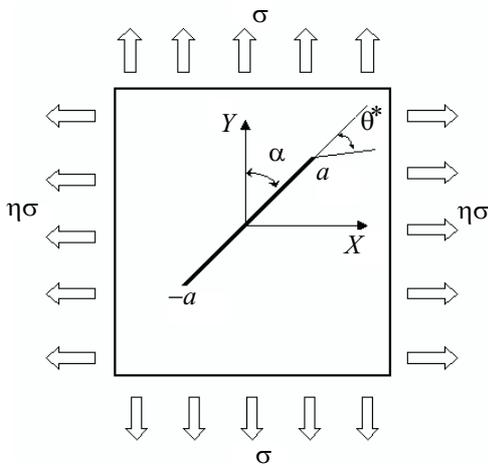


Рис. 1. Пластина с трещиной при двухосном нагружении

### 1. УПРАВЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Для рассматриваемой задачи уравнения равновесия в полярной системе координат  $r, \theta$  имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} = 0,$$

где  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{r\theta}$  — компоненты нормальных и сдвиговых напряжений.

Уравнения равновесия удовлетворяются тождественно при использовании функции напряжений Эри  $\phi$  в форме:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right). \quad (1)$$

В плоской задаче разрешающим относительно искомой функции Эри выступает одно уравнение совместности деформаций:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \cdot r \right) = 0, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{\theta\theta}$ ,  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{r\theta}$  — компоненты нормальных и сдвиговых деформаций. Поведение упругопластического материала при простом одноосном растяжении описывается законом Рамберга – Осгуда:

$$\varepsilon = \begin{cases} \sigma/E, & \sigma \leq \sigma_0, \\ \sigma/E + \alpha_0 (\sigma/E)^n, & \sigma > \sigma_0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $E$  — модуль упругости,  $\sigma_0$  — предел текучести,  $\alpha_0$  и  $n$  — константы упрочнения.

Сингулярное решение, управляющее асимптотическим поведением полей напряжений в малой пластической зоне вершины трещины известно в литературе как модель Хатчинсона – Райса – Розенгрена (ХРР) [1, 2] и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_0 K_M^p r^{-1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}, \\ \sigma_e &= \sigma_0 K_M^p r^{-1/(n+1)} \tilde{\sigma}_e, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $K_M^p$  — упругопластический коэффициент интенсивности напряжений, зависящий от параметра смешанности  $M_p$ , введенного Ши [3]. Безразмерные угловые функции напряжений  $\tilde{\sigma}_{ij}$  и  $\tilde{\sigma}_e$  зависят



только от полярного угла  $\theta$ , показателя упрочнения  $n$  и  $M_p$ . В свою очередь, параметр смешанности  $M_p$  определяется как отношение окружной и сдвиговой компонент напряжений на продолжении плоскости расположения исходной трещины, т.е. при  $\theta = 0$

$$M_p = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left| \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{\theta\theta}(\theta=0)}{\sigma_{r\theta}(\theta=0)} \right| = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left| \frac{\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta=0)}{\tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta=0)} \right|. \quad (5)$$

Обобщение модели Рамберга – Осгуда (3) на ситуацию сложного напряженного состояния приводит к следующим нелинейным соотношениям между компонентами напряжений и деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta} + \frac{3}{4}\alpha_0\sigma_e^{n-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr} + \frac{3}{4}\alpha_0\sigma_e^{n-1}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}), \\ \varepsilon_{r\theta} &= (1 + \nu)\sigma_{r\theta} + \frac{3}{2}\alpha_0\sigma_e^{n-1}\sigma_{r\theta}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона. В уравнениях (4) и (6)  $\sigma_e$  представляет собой интенсивность напряжений или эквивалентное напряжение, которое для плоской деформации описывается формулой

$$\sigma_e^2 = \frac{3}{4}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 3\sigma_{r\theta}^2.$$

Подстановка физических соотношений (6) с учетом (1) в уравнение совместности деформаций (2) приводит к следующему разрешающему уравнению относительно функции Эри:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \phi + \frac{3\alpha_0}{4} \left\{ \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \left[ \sigma_e^{n-1} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{4}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left[ r \sigma_e^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, определение компонент напряжений связано с решением нелинейного дифференциального уравнения в частных производных при соответствующих граничных условиях. Приближенное решение уравнения (7) отыскивается в виде разложения в ряд по радиусу в малой пластической области вершины трещины, как это предложено в [1]:

$$\phi(r, \theta) = r^s \tilde{\phi}(\theta) + r^t \tilde{\phi}_2(\theta) + \dots, \quad (8)$$

где первый член разложения является главным, т.е.  $s < t$ . Показатели степени  $s$  и  $t$  задают порядок особенностей решения в окрестности вершины трещины. Следуя методу решения плоских задач ХРР-типа, ограничимся рассмотрением только первого члена разложения (8), который имеет следующую структуру [1, 2]:

$$\phi(r, \theta) = K_M^p r^s \tilde{\phi}(\theta), \quad (9)$$

где  $K_M^p$  – упругопластический коэффициент интенсивности напряжений,  $r, \theta$  – полярные координаты с центром в вершине трещины,  $\tilde{\phi}(\theta)$  – безразмерная угловая функция напряжений Эри. Подстановка (9) в (1) дает новые выражения для компонент упругопластических напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= K_M^p r^{s-2} \tilde{\sigma}_{rr}(\theta) = K_M^p r^{s-2} (s\tilde{\phi} + d^2\tilde{\phi}/d\theta^2), \\ \sigma_{\theta\theta} &= K_M^p r^{s-2} \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) = K_M^p r^{s-2} s(1-s)\tilde{\phi}, \\ \sigma_{r\theta} &= K_M^p r^{s-2} \tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta) = K_M^p r^{s-2} (1-s)d\tilde{\phi}/d\theta, \\ \sigma_e &= K_M^p r^{s-2} \tilde{\sigma}_e(\theta), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\tilde{\sigma}_{rr}(\theta) = s\tilde{\phi} + \frac{d^2\tilde{\phi}}{d\theta^2}, \quad \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) = s(s-1)\tilde{\phi}, \quad \tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta) = (1-s)\frac{d\tilde{\phi}}{d\theta}. \quad (11)$$

Для условий маломасштабной текучести, когда зона пластичности в окрестности вершины трещины мала по сравнению с характерным размером тела, обычно принимается, что пластическая часть полной плотности энергии деформации в этой зоне существенно больше ее упругой составляющей.



Это допущение приводит к тому, что можно опустить бигармонический оператор в уравнении (7), которое после сокращения на общий множитель, зависящий от радиальной координаты  $r$ , становится однородным относительно угловой координаты  $\theta$ . В результате после преобразований приходим к однородному нелинейному дифференциальному уравнению:

$$\left[ \frac{d^2}{d\theta^2} - n(s-2)[n(s-2)+2] \right] \left[ \tilde{\sigma}_e^{n-1} \left\{ s(2-s)\tilde{\phi} + \frac{d^2\tilde{\phi}}{d\theta^2} \right\} \right] + 4(s-1)[n(s-2)+1] \frac{d}{d\theta} \left( \tilde{\sigma}_e^{n-1} \cdot \frac{d\tilde{\phi}}{d\theta} \right) = 0.$$

Это уравнение четвертого порядка может быть разрешено относительно старшей производной и преобразовано к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\tilde{\phi}}{d\theta} = \tilde{\phi}_1, \quad \frac{d\tilde{\phi}_1}{d\theta} = \tilde{\phi}_2, \quad \frac{d\tilde{\phi}_2}{d\theta} = \tilde{\phi}_3, \quad \frac{d\tilde{\phi}_3}{d\theta} = \varphi(\tilde{\phi}, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{\phi}, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3) = & - \left[ \frac{3}{4}n(a_2\tilde{\phi} + \tilde{\phi}_2)^2 + a_4\tilde{\phi}_1^2 \right]^{-1} \left\{ \tilde{\sigma}_e^2 [(a_2 - a_1 + a_3)\tilde{\phi}_2 - a_1a_2\tilde{\phi}] + \frac{n-3}{2}\varphi_1 \times \right. \\ & \times (a_2\tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_3) + \frac{n-1}{2}(a_2\tilde{\phi} + \tilde{\phi}_2) \left[ \frac{3}{2}(a_2\tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_3)^2 + \frac{3}{2}(a_2\tilde{\phi} + \tilde{\phi}_2)a_2\tilde{\phi}_2 + 2a_4(\tilde{\phi}_2^2 + \tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_3) \right] + \\ & \left. + \frac{n+1}{2}\varphi_1(a_2\tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_3) + a_3\frac{n-1}{2}\varphi_1\tilde{\phi}_1 + \frac{1}{\tilde{\sigma}_e^2} \frac{(n-3)(n-1)}{4}\varphi_1^2(a_2\tilde{\phi} + \tilde{\phi}_2) \right\}, \end{aligned}$$

$$\varphi_1(\tilde{\phi}, \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3) = \frac{3}{2}(a_2\tilde{\phi} + \tilde{\phi}_2)(a_2\tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_3) + 2a_4\tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_2,$$

$$a_1 = n(s-2)[n(s-2)+2], \quad a_2 = s(2-s), \quad a_3 = 4(s-1)[n(s-2)+1], \quad a_4 = 3(1-s)^2.$$

Решение нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (12) возможно при соответствующих краевых условиях на основе какого-либо численного метода. Как правило, для решения подобных задач применяют метод пристрелки и разностный метод. В настоящей работе использован разностный метод, подробные детали реализации которого в приложении к задаче смешанных форм деформирования изложены в работе [4].

## 2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В рассматриваемой задаче упругопластического состояния наклонной трещины при произвольном двухосном нагружении (см. рис. 1) предполагается, что берега трещины  $\theta = \pm\pi$  свободны от напряжений. Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(-\pi) = 0, \quad \tilde{\sigma}_{r\theta}(-\pi) = 0, \quad \text{или} \quad \tilde{\phi}(-\pi) = 0, \quad \tilde{\phi}_1(-\pi) = 0, \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\pi) = 0, \quad \tilde{\sigma}_{r\theta}(\pi) = 0, \quad \text{или} \quad \tilde{\phi}(\pi) = 0, \quad \tilde{\phi}_1(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для задач смешанных форм деформирования вводится дополнительное граничное условие, согласно которому окружная компонента нормальных напряжений имеет максимум в направлении предполагаемого развития трещины  $\theta^*$  (см. рис. 1) [5]:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta^*)}{d\theta} = 0, \quad \text{или} \quad \tilde{\phi}_1(\theta^*) = 0, \quad -\pi < \theta^* < \pi. \quad (14)$$

Подобная формулировка граничного условия соответствует первой теории прочности, или критерию максимальных нормальных напряжений.

## 3. ПАРАМЕТРЫ СМЕШАННОСТИ

Состояние пластины при двухосном нагружении с произвольно ориентированной трещиной в виде математического разреза (см. рис. 1) будем характеризовать величинами параметра смешанности  $M_p$  и упругопластического коэффициента интенсивности напряжений  $K_{M_p}^p$ . Параметр  $M_p$  определяется непосредственно по результатам расчета компонент напряжений через функцию Эри по формуле (5).



Для расчета упругопластического коэффициента интенсивности напряжений, входящего в формулы (4), (9), (10), воспользуемся свойством инвариантности  $J$ -интеграла Черепанова – Райса. Выберем первый контур интегрирования  $\Gamma_1$ , замкнутый на берега трещины и расположенный в упругой области пластины, для которого вычислим значение  $J$ -интеграла:

$$J = \int_{\Gamma_1} (Wdy - \sigma_{ij}n_j u_{i,x} ds) = \frac{1-\nu^2}{E} (K_1^2 + K_2^2) = \frac{\pi}{2E} (1-\nu^2) (\sigma^2) [(1+\eta^2) - (1-\eta^2) \cos 2\alpha], \quad (15)$$

$$K_1 = \frac{\sigma_{yn}\sqrt{\pi a}}{2} [1 + \eta - (1 - \eta) \cos 2\alpha] \quad K_2 = \frac{\sigma_{yn}\sqrt{\pi a}}{2} (1 - \eta) \sin 2\alpha. \quad (16)$$

В формулах (15), (16)  $K_1$  и  $K_2$  – упругие коэффициенты интенсивности напряжений для форм нормального отрыва и поперечного сдвига соответственно.

Второй контур  $\Gamma_2$ , охватывающий непосредственно вершину трещины, поместим в зоне пластичности и получим:

$$J = \int_{\Gamma_2} (Wdy - \sigma_{ij}n_j u_{i,x} ds) = \alpha_0 (K_M^P)^{n+1} r^{(n+1)(s-2)+1} I_n(\theta^*), \quad (17)$$

где

$$I_n(\theta^*) = \int_{-\pi}^{\pi} \Omega(n, \theta) d\theta, \quad (18)$$

$$\Omega = \frac{n}{n+1} \tilde{\sigma}_e^{n+1} \cos \theta - \left[ \tilde{\sigma}_{rr} \left( \tilde{u}_\theta - \frac{d\tilde{u}_r}{d\theta} \right) - \tilde{\sigma}_{r\theta} \left( \tilde{u}_r + \frac{d\tilde{u}_\theta}{d\theta} \right) \right] \sin \theta - \frac{1}{n+1} (\tilde{\sigma}_{rr} \tilde{u}_r + \tilde{\sigma}_{r\theta} \tilde{u}_\theta) \cos \theta,$$

$$\tilde{u}_r(\theta) = \frac{3}{4} (n+1) \tilde{\sigma}_e^{n-1} [a_2 \tilde{\phi} + \tilde{\phi}_2], \quad \tilde{u}_\theta(\theta) = \frac{n+1}{n} \left[ \frac{d\tilde{u}_r}{d\theta} - 3\tilde{\sigma}_e^{n-1} (1-s) \cdot \tilde{\phi}_1 \right].$$

Константа интегрирования  $I_n(\theta^*)$  и компоненты перемещений  $\tilde{u}_r$  и  $\tilde{u}_\theta$  вычисляются по найденным в результате решения системы уравнений (12) значениям функции Эри и ее производных с учетом дифференциальных зависимостей (11) для напряжений. Приравняем уравнения (15) и (17) и получим выражение для упругопластического коэффициента интенсивности напряжений при смешанных формах деформирования для трещины в виде математического разреза:

$$K_M^P = \left( \frac{1-\nu^2}{\alpha_0} \right)^{\frac{1}{n+1}} \left( \frac{0.5\pi}{I_n(\theta^*)} \right)^{\frac{1}{n+1}} \left\{ \sigma^2 [(1+\eta^2) - (1-\eta^2) \cos 2\alpha] \right\}^{\frac{1}{n+1}}. \quad (19)$$

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В каждом отдельном варианте из выполненной серии расчетов управляющим параметром являлась наперед заданная величина угла  $\theta^*$ , определяющая направление предполагаемого развития трещины. Этот угол варьировался в пределах  $0 \leq \theta^* \leq 75^\circ$  так, чтобы воспроизвести полный диапазон смешанных форм деформирования от нормального отрыва  $M_p = 1$ ,  $\theta^* = 0^\circ$  до чистого сдвига  $M_p = 0$ ,  $\theta^* = 71^\circ \div 75^\circ$  в зависимости от показателя деформационного упрочнения  $n$ , который изменялся от 1 (идеально упругий материал) до 15 (близкий к идеально пластичному материалу). В результате решения системы дифференциальных уравнений (12) с соответствующими граничными условиями (13), (14) для каждой комбинации  $\theta^*$  и  $n$  найдены значения функции Эри и ее производных и далее по формулам (11) рассчитаны безразмерные компоненты упругопластических напряжений  $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, \theta^*, n)$ , а по ним, в свою очередь, по формулам (5) и (18), (19) определены параметр смешанности  $M_p(\theta^*, n)$  и упругопластический коэффициент интенсивности напряжений  $K_M^P(\theta^*, n)$ .

На рис. 2 и 3 представлены угловые распределения безразмерных компонент напряжений  $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, \theta^*, n)$  и пластических деформаций  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, \theta^*, n)$  в полном диапазоне смешанных форм деформирования от  $M_p = 0$  (чистый сдвиг) до  $M_p = 1$  (нормальный отрыв) для материалов различных пластических свойств. В распределениях окружной компоненты напряжений  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta, \theta^*, n)$ , как и следовало ожидать, имеет место максимум в направлении предполагаемого развития трещины  $\theta = \theta^*(M_p, n)$ , заданный граничными условиями (14).

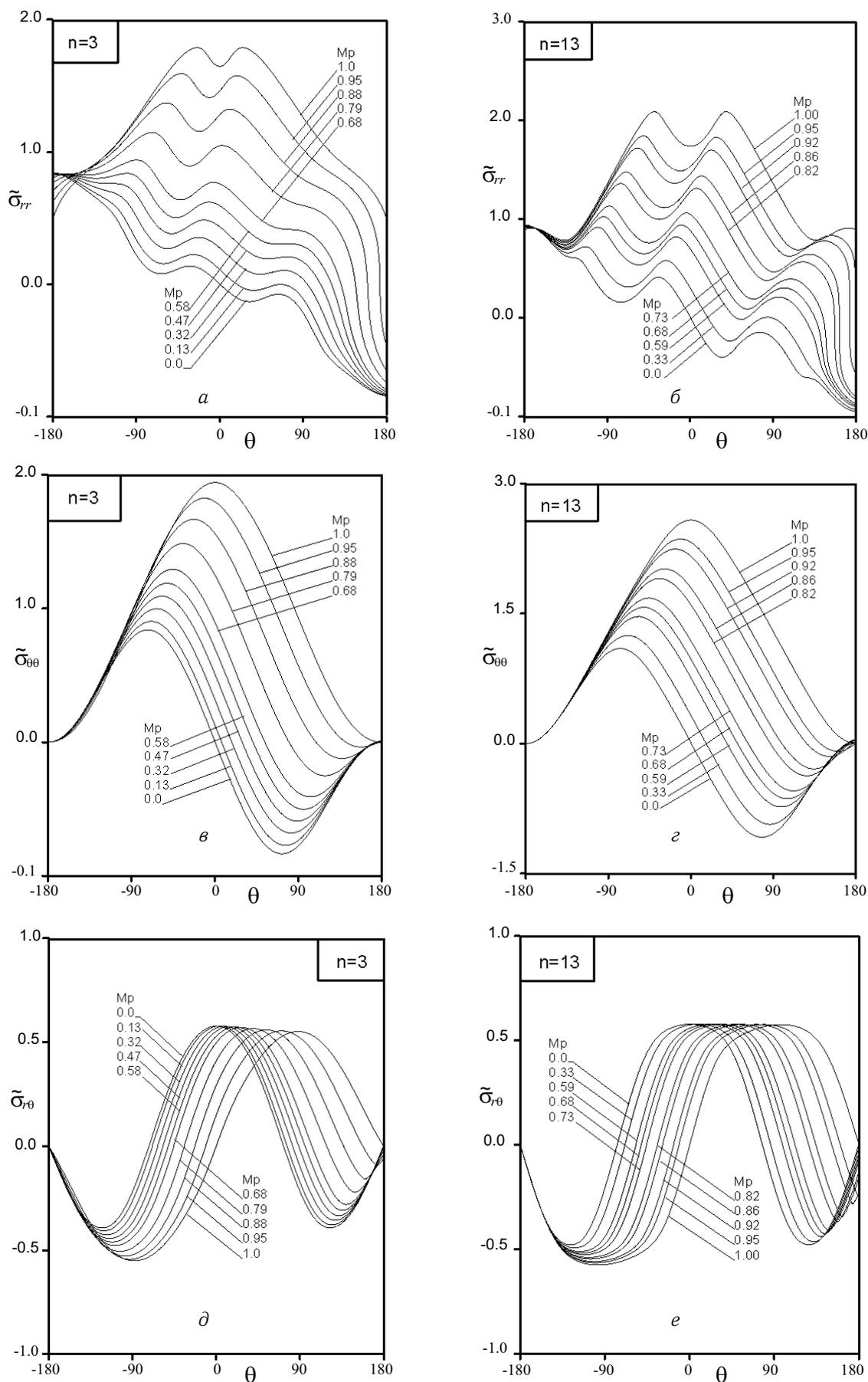


Рис. 2. Угловые распределения компонент напряжений для  $n = 3$  (*a*, *в*, *д*) и  $n = 13$  (*б*, *г*, *е*)

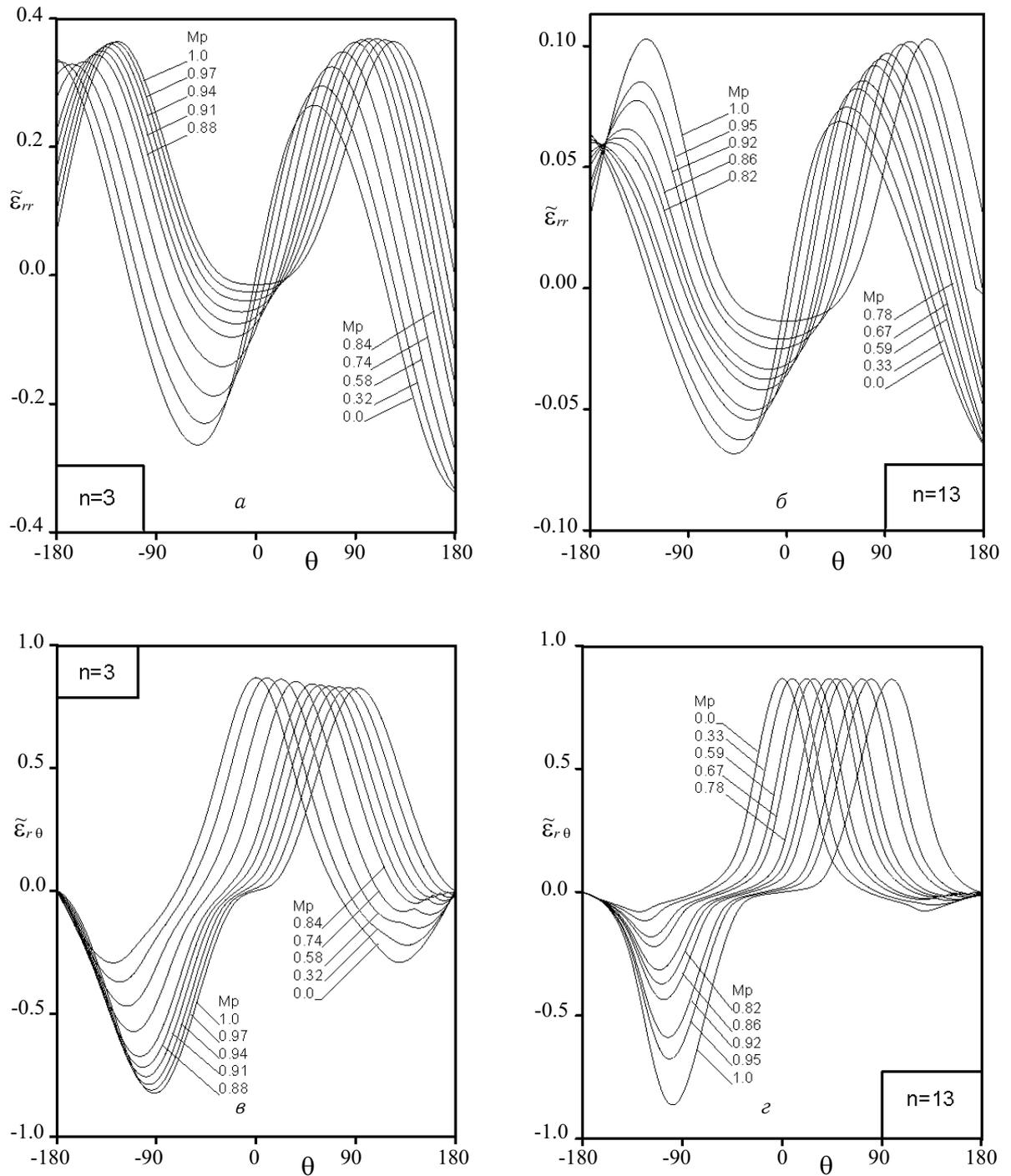


Рис. 3. Угловые распределения компонент деформаций для  $n = 3$  (а, в) и  $n = 13$  (б, г)

Обобщением полученных результатов являются представленные на рис. 4 поверхности изменения константы интегрирования  $I_n$  (18) и упругопластического коэффициента интенсивности напряжений  $K_M^p$  (19) в зависимости от вида смешанных форм нагружения ( $M_p$ ) и пластических свойств материала ( $n$ ). Из этих данных следует, что по мере приближения к ситуации идеальной пластичности  $n \rightarrow \infty$  влияние смешанных форм деформирования становится менее значимым. В то же время для показателя упрочнения в диапазоне  $3 \leq n \leq 9$ , что соответствует свойствам реальных конструкционных материалов, влияние вида нагружения, характеризуемого параметром смешанности  $M_p$ , является существенным.

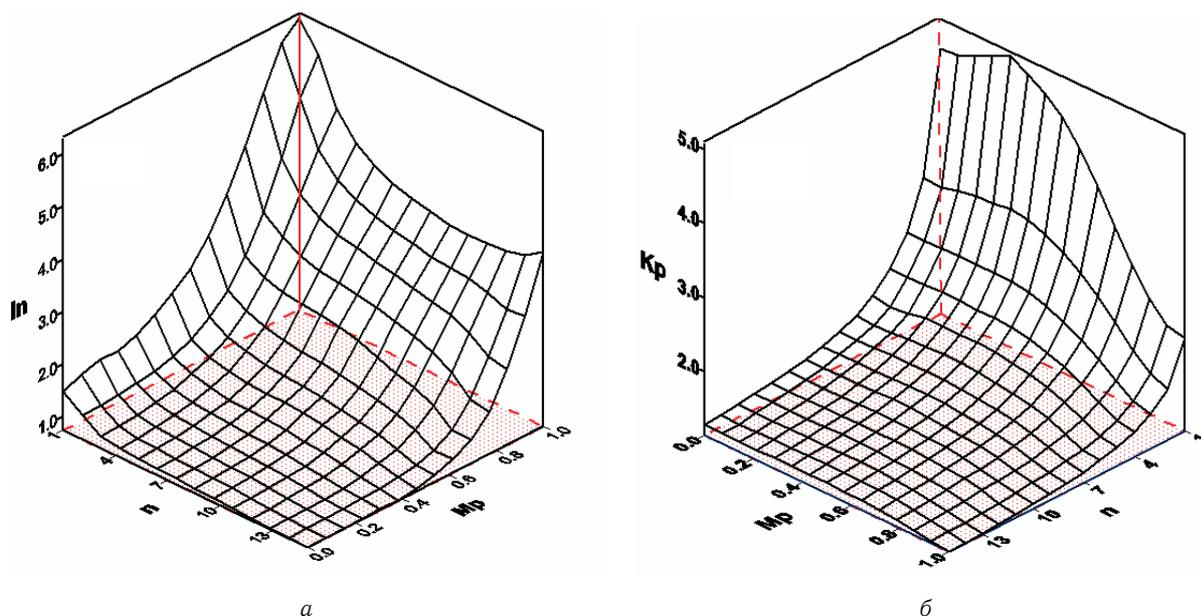


Рис. 4. Поведение константы интегрирования (а) и КИН (б) для различных условий смешанных форм деформирования

#### Библиографический список

1. Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material // J. of the Mechanics and Physics of Solids. 1968. V. 16. P. 13–31.
2. Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in power law hardening material // J. of the Mechanics and Physics of Solids. 1968. V. 16. P. 1–12.
3. Shih C.F. Small-scale yielding analysis of mixed plane strain crack problem // Fracture Analysis. 1974. ASTM STP 560. P. 187–210.
4. Shlyannikov V.N., Sakhabutdinov J.M. Evaluation of the elastic-plastic mixity parameters on the base of different crack propagation criteria. Communication 2. Solution and results // Strength of Materials. 2005. № 4. P. 46–63.
5. Shlyannikov V.N., Dolgorukov V.A. Analysis of the crack propagation under biaxial cyclic load taking into account their orientation // Failure analysis — theory and practice. Hungary EMAS. 1988. V. 2. P. 1095–1103.