



Библиографический список

1. Казанчян, П. О. Диагностика и лечение патологической извитости сонных артерий / П. О. Казанчян, В. А. Попов, Е. Н. Гапонова, Т. В. Рудакова // *Ангиология и сосудистая хирургия*. – 2001. – № 2.
2. Quattlebaum, J. K. Stroke associated with elongation and kinking of the internal carotid artery: report of three cases treated by segmental resection of the carotid artery / J. K. Quattlebaum, E. T. Upson, R. L. Neville // *Ann Surg.* – 1959. – V. 150, № 10. – P. 824–832.
3. Красавин, В. А. Клиническая характеристика и активность апоптоза у лиц детского и юношеского возраста с сосудистыми аномалиями брахиоцефальных сосудов / В. А. Красавин, К. М. Морозов, В. А. Кузьмин, С. О. Дружинин, И. И. Суслов // *Сердечно-сосудистые заболевания: Бюл. НЦССХ им. А.Н.Бакулева РАМН*. – М., 2007. – Т. 8, № 3. – С. 80.
4. Красавин, В. А. Концепция системных нарушений иммунитета в генезе аномалий ветвей дуги аорты / В. А. Красавин, С. О. Дружинин, И. И. Суслов, К. М. Морозов, В. А. Кузьмин // *Региональное кровообращение и микроциркуляция*. – СПб., 2007. – № 1 (21). – С. 81–83.
5. Казанцев, А. В. Применение точных медицинских 3D изображений при создании объектов для анализа методом конечных элементов и вычислительной гидродинамики / А. В. Казанцев // *Биомеханика-2008. IX Всероссийская конференция по биомеханике: Тез. докл.* – Н. Новгород: ИПФ РАН, 2008. – С. 44–45.
6. Leung, J. H. Fluid structure interaction of patient specific abdominal aortic aneurysms: a comparison with solid stress models / J. H. Leung, A. R. Wright, N. Cheshire et al. // *BioMedical Engineering OnLine*. – 2006. – V. 5:33 doi:10.1186/1475-925X-5-33.
7. Иванов, Д. В. Артерии человека с патологическими извитостями: клинические данные и численный эксперимент / Д. В. Иванов, Е. Л. Коссович // *Методы компьютерной диагностики в биологии и медицине – 2007: Материалы ежегодной Всерос. науч. школы-семинара*. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007. – С. 39–41.
8. Кириллова, И. В. Математическое моделирование бифуркации сонной артерии в норме, при патологии и после реконструктивной операции / И. В. Кириллова, Ю. П. Гуляев, Д. В. Иванов и др. // *Биомеханика-2008: IX Всероссийская конференция по биомеханике: Тез. докл.* – Н. Новгород: ИПФ РАН, 2008. – С. 23–26.
9. Kossovich, L. Yu. Mathematical modeling of human carotid in healthy, affected or post-corrective surgery conditions / L. Yu. Kossovich, I. V. Kirrilova, Yu. P. Gulayev, D. V. Ivanov, A. V. Kamenskiy, V. O. Polyaev, N. V. Ostrovskiy, K. M. Morozov // *India, IIT Delhi*. – 2008. – P. 235–250.
10. Kamenskiy, A. V. Finite element model of the patched human carotid / A. V. Kamenskiy, I. I. Pipinos, A. S. Desyatova, Yu. E. Salkovsky, L. Yu. Kossovich, I. V. Kirrilova, L. A. Bockeria, K. M. Morozov, V. O. Polyaev, T. G. Lynch, Yu. A. Dzenis // *Vascular and Endovascular Surgery*. – 2009. – V. 43, № 6. – P. 533–541.

УДК 539.4

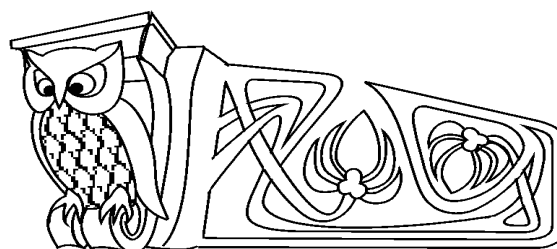
УПРУГИЕ ПАРАМЕТРЫ СМЕШАННЫХ ФОРМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНЫ ПРИ ДВУХОСНОМ НАГРУЖЕНИИ

В.Н. Шлянников, А.В. Туманов

Исследовательский центр проблем энергетике Казанского научного центра Российской академии наук
E-mail: shlyannikov@mail.ru

Разработан метод и приведены результаты расчетов упругих параметров смешанности и скорости выделения энергии в трехмерной постановке при сочетании форм смещения поверхностей трещины по типу отрыва, сдвига и среза. Рассмотрено состояние произвольно ориентированной несквозной полуэллиптической трещины при двухосном нагружении различной интенсивности. Алгоритм вычислений построен на модификации аналитического решения корректирующими функциями учета выхода вершин полуэллиптической трещины на свободную поверхность пластины. На основе выполненных расчетов установлен характер влияния вида смешанных форм нагружения и формы в плане несквозного дефекта на изменение параметров вдоль криволинейного фронта трещины.

Ключевые слова: наклонная полуэллиптическая трещина, смешанные моды, направление роста трещины, двухосность нагружения, параметр плотности энергии деформации.



Elastic Mode Mixture Parameters for Semi-Elliptical Crack under Biaxial Loading

V.N. Shlyannikov, A.V. Tumanov

Research Center for Power Engineering Problems Russian Academy of Sciences
E-mail: shlyannikov@mail.ru

A method for solution and result of calculations for the elastic mode mixture parameters. The energy release rate is suggested for complex loading including modes I+II+III. The behavior of the edge inclined semi-circular and semi-elliptical surface cracks is considered under biaxial loading of arbitrary direction. The algorithm is based on application to the full elliptical crack solution of the correcting functions accounting for the crack front intersection of the plate free surface. Mixed mode conditions along the curvilinear crack front of surface defect are characterized.

Key words: inclined semi-elliptical crack, crack growth direction, load biaxiality, strain energy density parameter, mixed mode.



ВВЕДЕНИЕ

Основное внимание в задачах прогнозирования сопротивления разрушению материалов и элементов конструкций сосредоточено на наиболее простом виде нагружения по типу нормального отрыва. Распространение механики трещин, лежащей в основе подобных задач, на более общие ситуации комплексного нагружения при сочетании форм отрыва, сдвига и среза сопряжено с существенными трудностями и ограничениями аналитического и вычислительного характера. Наибольший интерес с практической точки зрения представляют смешанные формы деформирования, возникающие при одновременной реализации двух или трех форм смещений поверхностей несквозного дефекта различной формы в плане. Типовым считается поверхностный дефект полуэллиптической формы в плане с различным соотношением осей. Особенностью смешанных форм деформирования полуэллиптических трещин является отсутствие аналитических решений для полей параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) в упругой трехмерной постановке. В литературе известны всего несколько численных результатов, рассматривающих поведение полуэллиптических трещин при смешанных формах упругого деформирования [1, 2], основанных на доопределении аналитических решений для внутренних эллиптических дефектов [3, 4].

Известно, что сопротивление материалов хрупкому разрушению характеризуется предельными значениями коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) или производными от них величинами, зависящими от вида комплексного нагружения. В этой связи актуальной является задача расчета параметров смешанных форм деформирования для наиболее распространенной модели дефекта в виде поверхностной полуэллиптической трещины при одновременном действии форм смещений по типам отрыва, сдвига и среза.

Цель настоящей работы состояла в анализе поведения полуэллиптической наклонной трещины, которое характеризуется упругими параметрами смешанных форм деформирования с учетом их изменения вдоль криволинейного фронта несквозного дефекта.

Рассмотрим пластину бесконечных размеров, находящуюся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния и ослабленную несквозной полуэллиптической трещиной с размерами полуосей a и c . Трещина расположена в наклонной плоскости $A-A$, ориентированной под углом α к направлению номинального напряжения σ (рис. 1).

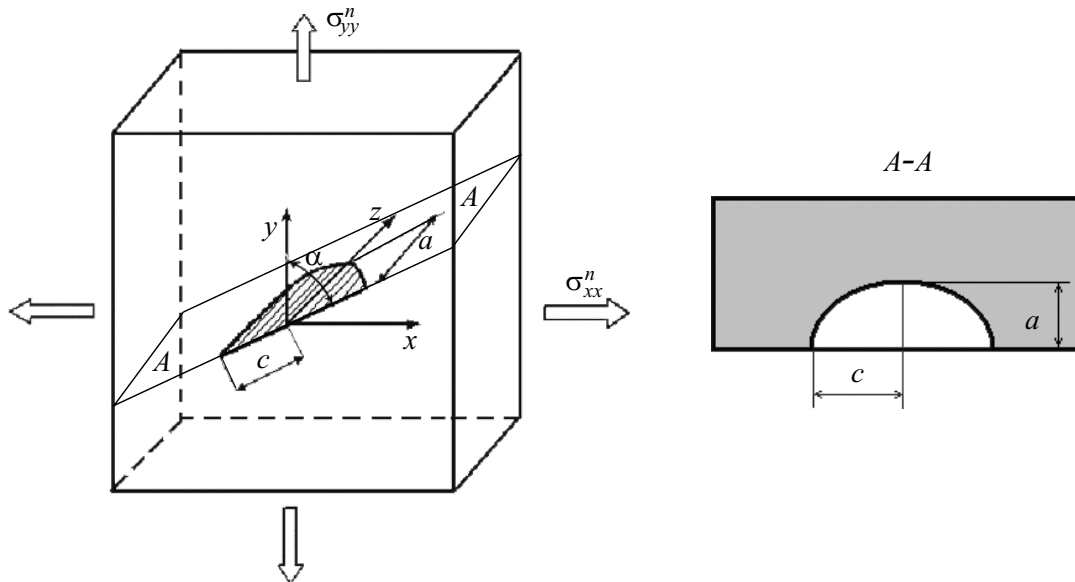


Рис.1. Пластина с наклонной полуэллиптической трещиной

Соотношение компонент номинальных напряжений, приложенных к торцам пластины, характеризуется коэффициентом двухосности $\eta = \sigma_{xx}^n / \sigma_{yy}^n$. Различные варианты смешанных форм деформирования могут быть реализованы за счет вариации α и η . Так, частный случай нормального отрыва (форма I) достигается при $\alpha = \pi/2$ для любого η во всех точках полуэллиптического фронта трещины,



положение которых определяется параметрическим углом полуэллипса φ . Для точек фронта трещины, принадлежащих свободной поверхности пластины ($\varphi = 0$), имеет место чистый сдвиг (форма II) при $\alpha = \pi/4$ и $\eta = -1$. В наиболее глубокой точке фронта трещины $z = a$ при $\varphi = \pi/2$, $\alpha = \pi/4$ и $\eta = -1$ возникает состояние чистого антиплоского среза (форма III). Все остальные ситуации относятся к условиям смешанных форм деформирования. В исходном состоянии расстояние между противоположными берегами трещины и радиус кривизны ее вершины вдоль полуэллиптического фронта равны нулю, что соответствует определению математического разреза.

1. УПРАВЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Для рассматриваемой задачи смешанных форм деформирования полуэллиптической трещины упругие коэффициенты интенсивности напряжений в общем виде описываются уравнениями

$$K_i = \sigma_i^\infty \sqrt{\pi \cdot l} F_i, \quad (1)$$

где $K_{I,II,III}$ — упругие коэффициенты интенсивности напряжений для основных форм деформирования (нормальный отрыв, сдвиг и антиплоский срез соответственно), $\sigma_{I,II,III}^\infty$ — соответствующие компоненты напряжений, F_i — функции учета влияния геометрии, схемы расположения и условий нагружения трещины. Полуэллиптическая трещина в виде математического разреза характеризуется размерами полуосей a при $\varphi = \pi/2$ и c при $\varphi = 0$. Таким образом, размеры трещины изменяются от $l = a$ до $l = c$. Параметр l определяет текущую длину трещины, задаваемую параметрическим углом φ и размерами полуосей эллипса a и c

$$l = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cos \varphi}{c}\right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi}{a}\right)^2}} = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}$$

Принятые обозначения и системы координат приведены на рис. 2. Входящие в формулу (1) компоненты напряжений для форм отрыва (I), сдвига (II) и среза (III) описываются следующими уравнениями

$$\sigma_I^\infty = \frac{\sigma_{yy}^n}{2} (1 + \eta - (1 - \eta) \cos 2\alpha),$$

$$\sigma_{II}^\infty = \sigma_{yy}^n \frac{1 - \eta}{2} \sin 2\alpha \cos \varphi,$$

$$\sigma_{III}^\infty = \sigma_{yy}^n \frac{1 - \eta}{4} \sin 2\alpha \sin \varphi.$$

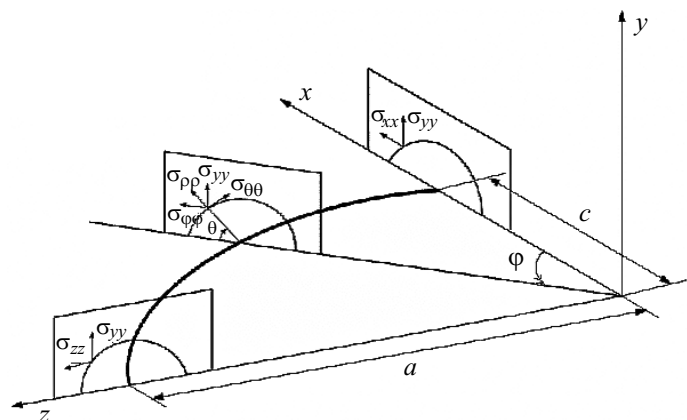


Рис. 2. Геометрия трещины и используемые системы координат

Решение задач в упругой постановке допускает суперпозицию результатов, соответствующих каждой отдельной форме деформирования. Воспользуемся этим обстоятельством для получения выражений для коэффициентов интенсивности напряжений $K_{I,II,III}$ для наклонной полуэллиптической поверхностной трещины.

Для формы смещения поверхностей трещины по типу нормального отрыва (форма I) введем безразмерный КИН в следующем виде:

$$\bar{K}_I = \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi l}} = \bar{K}_I^{REF} [1 + \eta - (1 - \eta) \cos 2\alpha], \quad (2)$$

где $\bar{K}_I^{REF} = \frac{1}{2E_s} f F$, $f = (\sin^2 \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{1/4}$, $\varepsilon = a/c$, $k = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, $E_s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$, $F = (1.13 - 0.09\varepsilon)(1 + 0.1(1 - \sin^2 \varphi))$.



В этих соотношениях E_s — полный эллиптический интеграл второго рода, F — K -тарировочная функция полуэллиптической трещины [5]. Максимальное значение КИН нормального отрыва достигается при $\alpha = \pi/2$

$$\bar{K}_I^{REF} |_{\alpha=\pi/2}^{\max} = \frac{1}{E_s}.$$

Для определения КИН при сдвиге (форма II) и срезе (форма III) воспользуемся методом, предложенным в работе [1] и состоящим во введении дополнительных функций в аналитическое решение [3] для внутренних круговых и эллиптических трещин. Смысл этих функций состоит в учете выхода точек фронта полуэллиптической трещины на свободную поверхность пластины при $\varphi = 0^\circ$. Тогда безразмерные коэффициенты интенсивности напряжений при двухосном нагружении наклонной полуэллиптической трещины будут иметь следующие выражения:

$$\bar{K}_{II} = \frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi l}} = \bar{K}_{II}^{REF} + \delta_{II} \bar{K}_{II}^{REF} |_{\max} \quad \bar{K}_{III} = \frac{K_{III}}{\sigma\sqrt{\pi l}} = \bar{K}_{III}^{REF} + 2\delta_{III} \bar{K}_{III}^{REF} |_{\max}, \quad (3)$$

где

$$\bar{K}_{II}^{REF} = \frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi l}} = \frac{k^2 \varepsilon \cos \varphi}{2Bf} (1 - \eta) \sin 2\alpha, \quad \bar{K}_{III}^{REF} = \frac{K_{III}}{\sigma\sqrt{\pi l}} = \frac{k^2 (1 - \nu) \sin \varphi}{4Bf} (1 - \eta) \sin 2\alpha, \quad (4)$$

$$B = (k^2 - \nu) E_s + \nu \varepsilon^2 D, \quad D = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi. \quad (5)$$

В формулах (4)–(5) ν — коэффициент Пуассона, D — полный эллиптический интеграл первого рода. Максимальное значение КИН сдвига реализуется в направлении большей полуоси эллипса при $\varphi = 0^\circ$

$$\bar{K}_{II}^{REF} |_{\varphi=0}^{\max} = \frac{k^2 \sqrt{\varepsilon}}{B}, \quad (6)$$

а максимум КИН среза имеет место в наиболее глубокой точке фронта трещины при $\varphi = \pi/2$

$$\bar{K}_{III}^{REF} |_{\varphi=\pi/2}^{\max} = \frac{k^2 (1 - \nu)}{2B}. \quad (7)$$

Установим пределы изменения параметрического угла эллипса от 0 до 1 за счет нормировки $\bar{\varphi} = 2\varphi/\pi$. Согласно [1], корректирующие функции учета выхода точек фронта полуэллиптической трещины на свободную поверхность пластины записываются в виде полиномов

$$\delta_{II} = b_0 + b_1 \bar{\varphi} + b_2 \bar{\varphi}^2 + b_3 \bar{\varphi}^3 + b_4 \bar{\varphi}^4 + b_5 \bar{\varphi}^5, \quad \delta_{III} = c_0 + c_1 \bar{\varphi} + c_2 \bar{\varphi}^2 + c_3 \bar{\varphi}^3 + c_4 \bar{\varphi}^4 + c_5 \bar{\varphi}^5. \quad (8)$$

Входящие в эти формулы коэффициенты b_i и c_i для различных соотношений полуосей ε приведены в работе [1]. Таким образом, формулы (2), (3) позволяют определить КИН при двухосном нагружении различной интенсивности в любой точке фронта наклонной полуэллиптической трещины произвольной формы в плане.

Известно, что состояние тела с трещиной, плоскость расположения которой не совпадает с осями симметрии геометрии и схемы нагружения, характеризуется параметрами смешанности. В случае упругого деформирования можно ввести параметры смешанности — M_{12} , M_{23} , M_{31} — в форме отношений коэффициентов интенсивности напряжений, учитывающие взаимное соотношение соответствующих форм деформирования отрывом, сдвигом и срезом:

$$M_{12} = \frac{2}{\pi} \arctg \left| \frac{\bar{K}_I}{\bar{K}_{II}} \right|, \quad M_{23} = \frac{2}{\pi} \arctg \left| \frac{\bar{K}_{III}}{\bar{K}_{II}} \right|, \quad M_{31} = \frac{2}{\pi} \arctg \left| \frac{\bar{K}_{III}}{\bar{K}_I} \right|. \quad (9)$$

Пределы изменения каждого из параметров смешанности от 0 до 1. В механике трещин одним из основных параметров оценки склонности к хрупкому разрушению при совместном деформировании отрывом, сдвигом и срезом является параметр скорости выделения упругой энергии:

$$\bar{G} = GE = (1 - \nu^2) (\bar{K}_I^2 + \bar{K}_{II}^2) + (1 + \nu) \bar{K}_{III}^2, \quad (10)$$

где E — модуль упругости материала. Использование в уравнении (10) полученных выражений для КИН в форме (2), (3) с учетом (4)–(8) позволяет получить интегральную оценку состояния тела с поверхностной полуэллиптической трещиной при смешанных формах упругого деформирования.



2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Для иллюстрации и количественной оценки влияния типа смешанных форм деформирования на поведение полуэллиптической трещины проведена серия расчетов для трех соотношений двухосности номинальных напряжений $\eta = -1, 0, +1$ и двух форм трещины в плане $\varepsilon = 0.5, 1$ с вариацией угла ориентации трещины $\alpha \in (0 \div \pi/2)$. Рассматривалось изменение параметров смешанности M_{12}, M_{23}, M_{31} и скорости выделения энергии \bar{G} вдоль фронта полуэллиптической трещины $\varphi \in (0 \div \pi/2)$ при указанных сочетаниях варьируемых функций нагружения и геометрии. При интерпретации результатов расчетов в виде трехмерных поверхностей поведения соответствующих параметров использовалось безразмерное значение угла ориентации трещины $\bar{\alpha} = 2\alpha/\pi$.

На рис. 3 представлены результаты расчета скорости выделения энергии \bar{G} вдоль фронта трещины ($\bar{\varphi}$) в зависимости от угла ориентации плоскости ее расположения ($\bar{\alpha}$) для двух форм дефекта в плане при одноосном растяжении $\eta = 0$. Распределения \bar{G} на рис. 3, *a* и *b* относятся к сквозной поверхностной трещине. На рис. 3, *c* и *d* для сравнения приведены распределения \bar{G} для внутренней дисковой трещины. Значения $\varepsilon = 1$ соответствуют круговой (полукруговой), а $\varepsilon = 0.5$ эллиптической (полуэллиптической) формам дефекта в плане.

Из представленных на рис. 3 значений скорости выделения энергии следует, что распределения \bar{G} вдоль фронта трещины при одноосном растяжении $\eta = 0$ не совпадают для внутреннего и поверхностного дефектов. Так, для внутренней круговой трещины при нормальном отрыве $\bar{\alpha} = 1$ значения \bar{G} постоянны вдоль фронта (см. рис. 3, *c*), а для поверхностной трещины величины \bar{G} возрастают при движении от наиболее глубокой точки к выходу фронта на свободную поверхность пластины (см. рис. 3, *a*). При переходе к геометрии дефекта в виде эллипса (полуэллипса) скорость выделения энергии возрастает (см. рис. 3, *b, d*).

Наиболее опасной при одноосном растяжении с позиции оценки сопротивления хрупкому разрушению является ситуация в самой глубокой точке фронта $\bar{\varphi} = 1$ при нормальном отрыве $\bar{\alpha} = 1$.

На рис. 4 представлены распределения скорости выделения энергии \bar{G} при равнодвухосном растяжении-сжатии $\eta = -1$ для различной геометрии поверхностного и внутреннего дефектов. Как и в случае одноосного растяжения, распределения \bar{G} вдоль фронта дефекта зависят от его формы в растяжении-сжатии $\eta = -1$ плане. Необходимо отметить различное состояние в точке фронта $\varphi = 0^\circ$, что для полукругового дефекта соответствует положению выхода большей полуоси эллипса на свободную поверхность. Так, для внутреннего дефекта при переходе от нормального отрыва $\bar{\alpha} = 1$ к чистому сдвигу $\bar{\alpha} = 0.5$ происходит увеличение \bar{G} , тогда как для поверхностного дефекта величины скорости выделения энергии в этой ситуации почти постоянны.

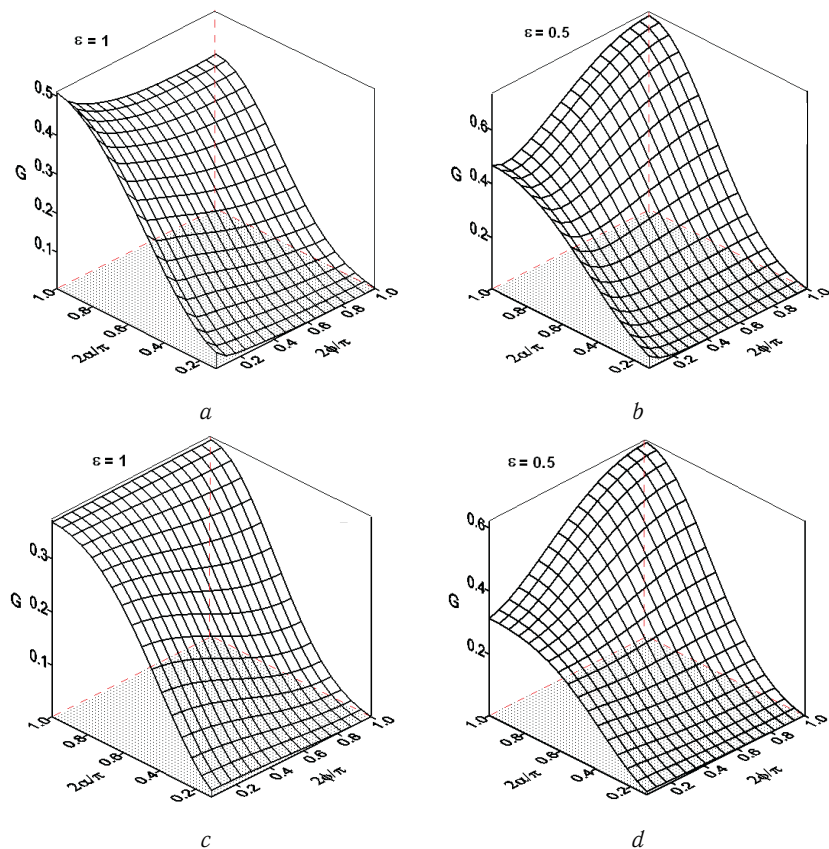


Рис. 3. Скорость выделения энергии при одноосном растяжении $\eta = 0$



Различной также является реакция на смешанные формы нагружения. Для полукругового дефекта максимум \bar{G} реализуется в точке $\bar{\alpha} = 1$ при нормальном отрыве (рис. 4, а), а для внутренней дисковой трещины максимум \bar{G} имеет место в точке $\bar{\alpha} = 0.5$ при чистом сдвиге (рис. 4, с). Из

сравнения условий двухосного нагружения следует, что максимальные значения \bar{G} из всех рассмотренных вариантов геометрии дефектов реализуются при равнодвухосном растяжении-сжатии $\eta = -1$ полуэллиптической трещины $\varepsilon = 0.5$ в наиболее глубокой точке ее фронта $\bar{\varphi} = 1$ при нормальном отрыве $\bar{\alpha} = 1$. Представленная на рис. 3 и рис. 4 информация позволяет дать сравнительную количественную оценку склонности тела с поверхностным дефектом различной формы в плане к хрупкому разрушению при смешанных формах двухосного нагружения.

Характер изменения параметров смешанности M_{12} , M_{23} и M_{31} вдоль фронта трещины различной формы в плане в зависимости от условий смешанных форм двухосного нагружения представлен на рис. 5–8. Очевидно, что

Рис. 4. Скорость выделения энергии при равнодвухосном растяжении-сжатии $\eta = -1$

наибольшим изменениям по фронту трещины подвержены распределения параметров смешанности M_{12} и M_{23} . Параметр M_{31} почти не зависит от позиции на фронте трещины при всех рассмотренных углах исходной ориентации плоскости расположения дефекта. При $\eta = 0$ имеет место наибольшее влияние формы дефекта на распределения параметров M_{12} и M_{23} .

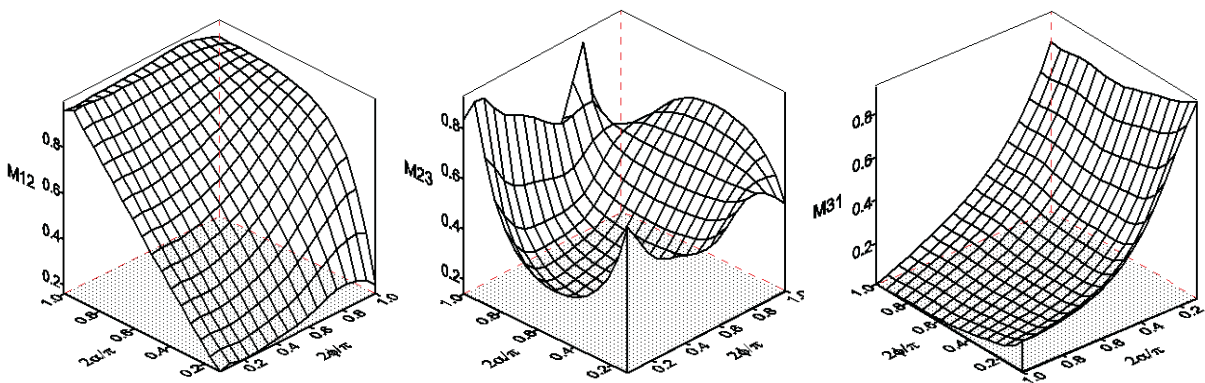


Рис. 5. Параметры смешанности для полукруговой трещины $\varepsilon = 1$ при одноосном растяжении $\eta = 0$

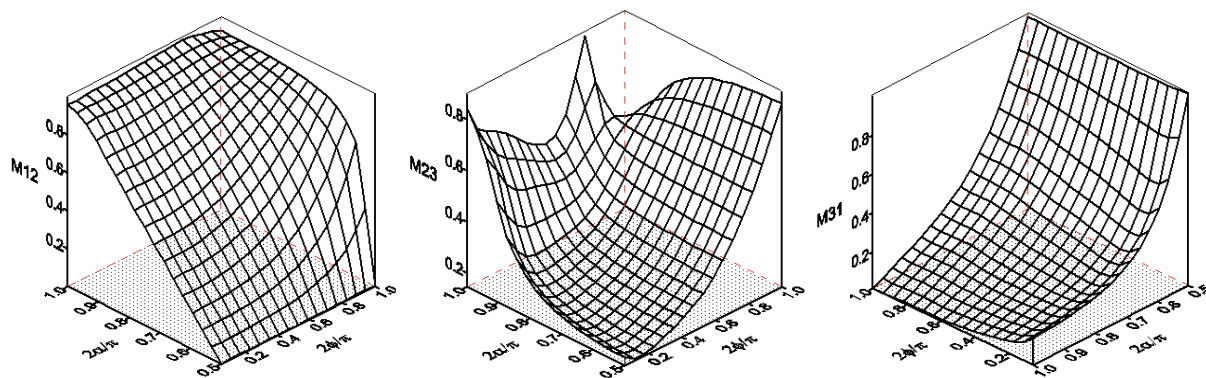


Рис. 6. Параметры смешанности для полукруговой трещины $\varepsilon = 1$ при равнодвухосном растяжении-сжатии $\eta = -1$

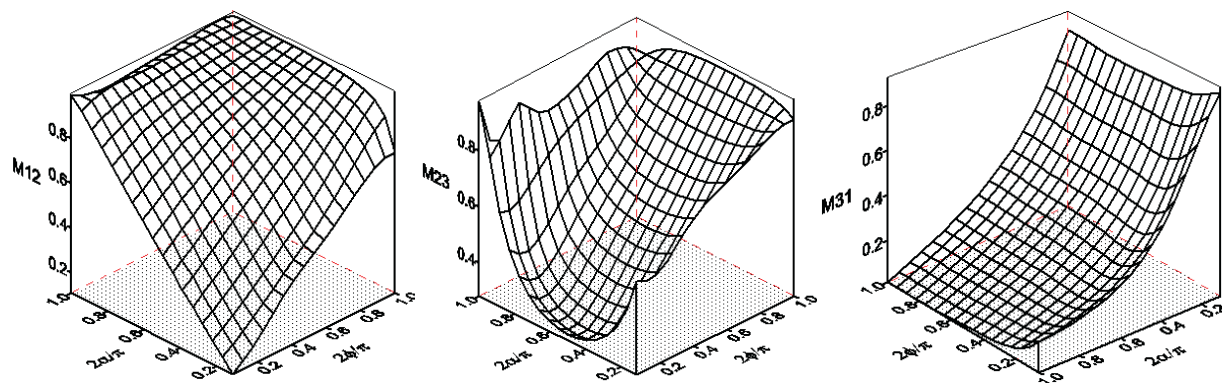


Рис. 7. Параметры смешанности для полуэллиптической трещины $\varepsilon = 0.5$ при одноосном растяжении $\eta = 0$

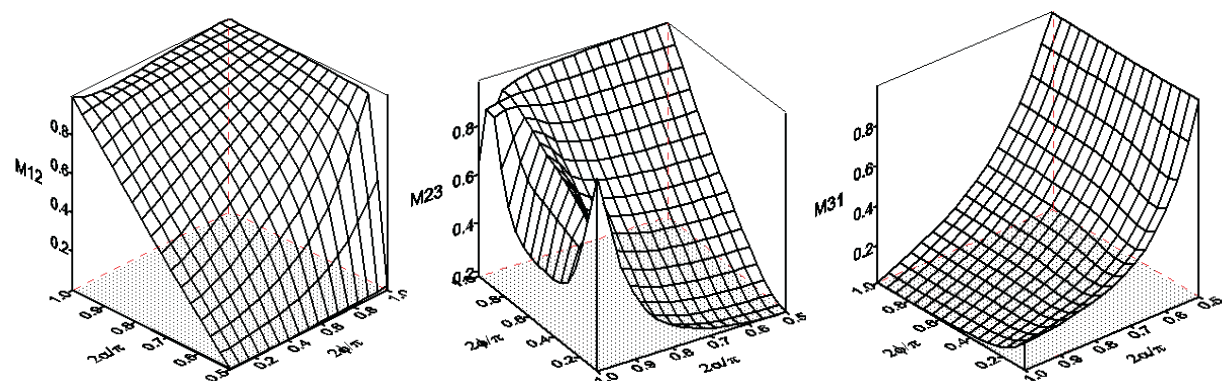


Рис. 8. Параметры смешанности для полуэллиптической трещины $\varepsilon = 0.5$ при равнодвухосном растяжении-сжатии $\eta = -1$

При равнодвухосном растяжении-сжатии $\eta = -1$ при $\bar{\alpha} = 0.5$ четко заметен переход от состояния чистого сдвига на свободной поверхности пластины $\bar{\varphi} = 0$ к состоянию чистого среза в наиболее глубокой точке фронта трещины $\bar{\varphi} = 1$, когда параметр M_{23} изменяется от минимальных до максимальных значений. Также при $\eta = -1$ в значениях параметра M_{12} наблюдается переход от ситуации чистого сдвига к нормальному отрыву по всему фронту трещины при изменении угла ориентации от $\bar{\alpha} = 0.5$ до $\bar{\alpha} = 1$.

Таким образом, предельные значения параметров смешанности M_{12} , M_{23} и M_{31} в оговоренных пределах их вариаций и установленные тенденции изменения скорости выделения энергии \bar{G} подтверждают заложенный при их формулировке смысл количественных характеристик состояния тела с наклонным поверхностным дефектом при комплексном нагружении отрывом, сдвигом и срезом.

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракт 02.740.11.0205).



Библиографический список

1. He, M. Y. Surface crack subject to mixed mode loading / M. Y. He, J. W. Hutchinson // Engineering Fracture Mechanics. – 2000. – V. 65. – P. 1–14.
2. Zhao, J. The in-plane and out-of-plane stress constraint factors and K-T-T_z description of stress field near the border of a semi-elliptical surface crack / J. Zhao, W. Guo, C. She // Intern. J. of Fatigue. – 2007. – V. 29. – P. 435–443.
3. Kassir, M. K. Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings / M. K. Kassir, G. C. Sih // Intern. J. of the Engineering Sciences. – 1967. – V. 5. – P. 899–912.
4. Molla-Abbasi, K. On the full set elastic T-stress terms of internal elliptical cracks under mixed-mode loading condition / K. Molla-Abbasi, H. Schutte // Engineering Fracture Mechanics. – 2008. – V. 75. – P. 1545–1568.
5. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 1016 с.