УДК 517.5

О СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ЛАГЕРРА ЛИНЕЙНЫМИ МЕТОДАМИ

М.Д. Бурмистрова

ООО «Зирван»
E-mail: mburmistrova@yahoo.com

В статье рассматривается задача о суммируемости ряда Лагерра методами, задаваемыми треугольными матрицами. Получены условия на матрицу метода суммирования и разлагаемую функцию, гарантирующие сходимость соответствующих линейных средних в точке Лебега $t = 0$.

On Laguerre Expansions Summability by the Linear Methods

M.D. Burmistrova

This paper studies a problem of Laguerre expansions summability via methods defined by triangular matrices. The conditions on a matrix and an expandable function are obtained to guarantee the convergence of corresponding linear means at the Lebesgue point $t = 0$.

Пусть (см. [1]) $\hat{L}_m^\alpha(t)$, $\alpha > -1$, $m = 0, 1, \ldots$ — ортонормированные на $[0, \infty)$ с весом $\rho(t, \alpha) = e^{-t}t^\alpha$ многочлены Лагерра, $L_\rho(0, \infty) = \left\{f : \|f\| = \int_0^\infty |f(t)|\, \rho(t, \alpha)\, dt < \infty\right\}$ — пространство измеримых по Лебегу на положительной полуоси функций. Рассмотрим ряд Фурье – Лагерра функции $f \in L_\rho(0, \infty)$

$$f(t) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \hat{a}_m \hat{L}_m^\alpha(t), \hat{a}_m = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} f(t)\, \hat{L}_m^\alpha(t)\, dt, \quad m = 0, 1, \ldots . \tag{1}$$

С помощью треугольной матрицы $\Lambda = \left\{\lambda_m^{(n)} : m, n = 0, 1, \ldots;\ \lambda_0^{(n)} = 1; \lambda_m^{(n)} = 0 \quad \text{при} \ \ m \geq n + 1\right\}$ определим последовательность линейных средних

$$\tau_n^\alpha(f, t, \Lambda) = \sum_{m=0}^{n} \lambda_m^{(n)} \hat{a}_m \hat{L}_m^\alpha(t) \tag{2}$$

ряда (1). В случае сходимости этой последовательности ряд (1) называется Λ — суммируемым.

В силу специфики асимптотического поведения многочленов Лагерра в точке $t = 0$ наибольшую сложность при исследовании поточечной сходимости и суммируемости ряда Фурье – Лагерра представляет эта точка. В настоящей работе мы рассматриваем задачу о сходимости линейных средних (2) в точке $t = 0$ в случае, когда она является точкой Лебега функции f , то есть существует число A такое, что

$$\int_0^h |f(t) - A|\, dt = o(h), h \to +0.$$

Г. Сегё (см. [1]) доказал теорему о сходимости чезаровских средних порядка $k > \alpha + 1/2$ в точке непрерывности $t = 0$ функции f при выполнении дополнительного условия на поведение функции на бесконечности $\int_1^\infty |f(t)|\, e^{-t/2} t^{\alpha - k - 1/3} dt < \infty$. Это условие можно считать аналогом антиполярного условия в случае рядов Якоби. Нетрудно показать, что теорема Г. Сегё остаётся верной, если вместо непрерывности функции в точке $t = 0$ предположить, что точка $t = 0$ является точкой Лебега функции f.

Целью настоящей статьи является получение достаточных условий сходимости линейных средних (2) в точке Лебега $t = 0$ функции f для более широкого класса матриц Λ, чем матрицы, определяющие методы суммирования Чезаро.

Положим $\Delta\lambda_m^{(n)} = \lambda_m^{(n)} - \lambda_{m+1}^{(n)}$, $\Delta^2\lambda_m^{(n)} = \Delta\left(\Delta\lambda_m^{(n)}\right)$. Через C будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, различные в разных случаях.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $-1/2 < \alpha < 1/2$ и матрица Λ с ограниченными коэффициентами удовлетворяет условиям:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_m^{(n)} = 1$ для всякого фиксированного m ;

2) $\sum_{m=0}^{n-1} (m + 1) \left(\frac{n-m}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right| \leq C$;

кроме того, существует число $\delta < 0$ такое, что

3) $\sum_{m=0}^{n}(m+1)^{\alpha/2+3/4}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right| \le Cn^{\delta}$.

Если для некоторых $\mu > 0$ *и* $p > 1$ ($p \le \frac{12\alpha+12}{6\alpha-1+12\delta}$ *в случае* $1/6 < \alpha < 1/2$ *и* $\delta > 1/12-\alpha/2$) *интеграл* $\int_{\mu}^{\infty}\left|f(t)\,e^{-t/2}\right|^p t^{\alpha}dt < \infty$, *то ряд Фурье – Лагерра функции* $f \in L_{\rho}(0,\infty)$ *является* Λ — *суммируемым в точке Лебега* $t = 0$.

Перепишем линейные средние (2) в точке $t = 0$ в виде

$$\tau_n^{\alpha}(f,0,\Lambda) = \int_0^{\infty} f(t)\,K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\,\rho(t,\alpha)\,dt,$$

где $K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda) = \sum_{m=0}^{n}\lambda_m^{(n)}\hat{L}_m^{\alpha}(t)\,\hat{L}_m^{\alpha}(0)$ — ядро метода суммирования, заданного матрицей Λ.

Ядро $K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)$ будем называть сингулярным, если $\int_0^{\infty}K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\,\rho(t,\alpha)\,dt \to 1$ при $n\to\infty$ и $\int_z^{\infty}K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\,\rho(t,\alpha)\,dt \to 0$ при $n\to\infty$ для любого $z > 0$.

Доказательство теоремы основывается на теореме Д. К. Фаддеева о представлении функций в точках Лебега сингулярными интегралами (см. [2]). Согласно этой теореме, если точка $t = 0$ является точкой Лебега интегрируемой на $(0,\mu)$ функции f ($\mu > 0$), то для выполнения равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\mu} f(t)\,K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\,\rho(t,\alpha)\,dt = A$ достаточно, чтобы ядро $K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)$ было сингулярным и существовали на $(0,\mu)$ интегрируемые монотонные мажоранты $\Theta_n(t)$ для произведений $|K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)|\,\rho(t,\alpha)$ такие, что $\int_0^{\mu}\Theta_n(t)dt \le C$, где C не зависит от n.

В дальнейшем нам потребуется также теорема 8.91.2 из [1], согласно которой, если $t \ge a > 0$, то при $n\to\infty$ справедливо соотношение

$$\max_{t\ge a}|L_n^{\alpha}(t)|\,e^{-t/2}t^{\lambda} \sim n^{Q}, \tag{3}$$

где $Q = \max(\lambda - 1/3, \alpha/2 - 1/4)$, λ — произвольное вещественное число, $L_n^{\alpha}(t)$ — стандартизованные многочлены Лагерра, связанные с ортонормированными многочленами соотношением $L_n^{\alpha}(t) = \hat{L}_n^{\alpha}(t)\sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}}$.

Лемма 1. *Пусть* $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$. *Тогда* $\int_z^{+\infty}L_n^{\alpha+1}(t)\,\rho(t,\alpha)\,dt \to 0$ *при* $n\to\infty$ *для любого* $z > 0$.

Доказательство. Интегрируя по частям, используя равенство $\frac{d}{dt}L_{n+1}^{\alpha}(t) = -L_n^{\alpha+1}(t)$ ([1], стр.111) и соотношение (3), получаем

$$\left|\int_z^{\infty}L_n^{\alpha+1}(t)\,e^{-t}t^{\alpha}dt\right| = \left|\int_z^{\infty}e^{-t}t^{\alpha}dL_{n+1}^{\alpha}(t)\right| \le$$

$$\le \left|\,L_{n+1}^{\alpha}(t)\,e^{-t}t^{\alpha}\right|_z^{\infty}\Big| + \left|\int_z^{\infty}L_{n+1}^{\alpha}(t)\,e^{-t}t^{\alpha}dt\right| + \alpha\left|\int_z^{\infty}L_{n+1}^{\alpha}(t)\,e^{-t}t^{\alpha-1}dt\right| \le$$

$$\le Cn^{Q}\left(e^{-t/2}t^{\alpha}\Big|_z^{\infty} + \int_z^{\infty}e^{-t/2}t^{\alpha}dt + \alpha\int_z^{\infty}e^{-t/2}t^{\alpha-1}dt\right).$$

Так как $\int_z^{\infty}e^{-t/2}t^{\gamma}dt$ сходится для любого γ, а $Q < 0$ при $\alpha < 1/2$, то правая часть полученного неравенства стремится к нулю. □

Лемма 2. *При* $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$ *ядро Дирихле – Лагерра* $D_n^{\alpha}(t,0) = \sum_{k=0}^{n}\hat{L}_k^{\alpha}(0)\,\hat{L}_k^{\alpha}(t)$ *является сингулярным.*

Доказательство. Имеем

$$\int_0^{+\infty}D_n^{\alpha}(t,0)\,\rho(t,\alpha)\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty}L_k^{\alpha}(t)\,\rho(t,\alpha)\,dt = 1.$$

Кроме того, так как

$$D_n^{\alpha}(t,0) = \sum_{k=0}^{n}\hat{L}_k^{\alpha}(0)\,\hat{L}_k^{\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n}L_k^{\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}L_n^{\alpha+1}(t),$$

то из леммы 1 получаем, $\int_z^{+\infty}D_n^{\alpha}(t,0)\,\rho(t,\alpha)\,dt \to 0$ при $n\to\infty$ для любого $z > 0$. □

Лемма 3. *Пусть* $-1 < \alpha < 1/2$, *а матрица* Λ *удовлетворяет условию 1) теоремы и* $\sum_{m=0}^{n}\left|\Delta\lambda_m^{(n)}\right| \le C$. *Тогда ядро* $K_n^\alpha(t,0,\Lambda)$ *сингулярно.*

Доказательство. Так как $\lambda_0^{(n)} = 1$, то, как и для ядра Дирихле, $\int_0^\infty K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,\rho(t,\alpha)\,dt = 1$. Треугольная матрица Λ при выполнении условий леммы является регулярной по Теплицу (см., например, [3, с. 126]) и $\int_z^\infty K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,\rho(t,\alpha)\,dt = \sum_{m=0}^{n}\Delta\lambda_m^{(n)}\int_z^\infty D_m^\alpha(t,0)\,\rho(t,\alpha)\,dt$. Поэтому в силу сингулярности ядра Дирихле получим $\int_z^\infty K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,\rho(t,\alpha)\,dt \to 0$ при $n\to\infty$ для всякого фиксированного z. $\square$

Доказательство теоремы. Положим $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$. Очевидно, $\left|\Delta\left|\Delta\lambda_m^{(n)}\right|\right| \le \left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|$. Тогда с помощью преобразования Абеля получим

$$\sum_{m=0}^{n}\left|\Delta\lambda_m^{(n)}\right| = \left|\sum_{m=0}^{\nu-1}(m+1)\,\Delta\left|\Delta\lambda_m^{(n)}\right| + (n+1)\left|\Delta\lambda_\nu^{(n)}\right| - \sum_{m=\nu}^{n-1}(n-m)\,\Delta\left|\Delta\lambda_m^{(n)}\right|\right| \le$$

$$\le \sum_{m=0}^{\nu-1}(m+1)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right| + (n+1)\left|\Delta\lambda_\nu^{(n)}\right| + \sum_{m=\nu}^{n-1}(n-m)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|,$$

$$\nu\left|\Delta\lambda_\nu^{(n)}\right| = \left|1-\lambda_\nu^{(n)} - \sum_{i=0}^{\nu-1}(i+1)\,\Delta^2\lambda_i^{(n)}\right| \le 1 + \left|\lambda_\nu^{(n)}\right| + \sum_{m=0}^{\nu-1}(m+1)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|. \tag{4}$$

Так как

$$\sum_{m=0}^{\nu-1}(m+1)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right| \le C\sum_{m=0}^{\nu-1}(m+1)\left(\frac{n-m}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right| \le$$

$$\le C\sum_{m=0}^{n-1}(m+1)\left(\frac{n-m}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|$$

и

$$\sum_{m=\nu}^{n-1}(n-m)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right| \le C\sum_{m=\nu}^{n-1}(m+1)\left(\frac{n-m}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right| \le$$

$$\le C\sum_{m=0}^{n-1}(m+1)\left(\frac{n-m}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|,$$

то из (4), ограниченности коэффициентов матрицы Λ и условия *2)* теоремы будем иметь $\sum_{m=0}^{n}\left|\Delta\lambda_m^{(n)}\right| \le C$. Значит, по лемме 3, при выполнении условий теоремы ядро $K_n^\alpha(t,0,\Lambda)$ сингулярно.

Построим интегрируемую монотонную мажоранту на интервале $(0,\mu)$ для произведений $|K_n^\alpha(t,0,\Lambda)|\,\rho(t,\alpha)$.

Сначала построим интегрируемую монотонную на $(0,\mu)$ мажоранту $\Phi_n^\alpha(t)$ для произведения $|F_n^\alpha(t,0)|\,\rho(t,\alpha)$, где

$$F_n^\alpha(t,0) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}D_m^\alpha(0,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)(n+1)}L_n^{\alpha+2}(t) \tag{5}$$

— ядро Фейера – Лагерра. Для многочленов Лагерра при $\alpha \ge -1/2$, $0 < t \le \mu$, и $n = 1,2,\ldots$ справедливы оценки (см. [1], теорема 7.6.4)

$$|L_n^\alpha(t)| \le C\left\{\begin{array}{c} t^{-\alpha/2-1/4}n^{\alpha/2-1/4}, \\ n^\alpha. \end{array}\right. \tag{6}$$

Положим $\Phi_0^\alpha(t) = C$, $0<t$. Для $n = 1,2,\ldots$ положим $\Phi_n^\alpha(t) = C\max\left(n^{\alpha+1}t^\alpha e^{-t}, ne^{-t}\right)$, $0 < t \le \frac{1}{n}$, $\Phi_n^\alpha(t) = Cn^{\alpha/2-1/4}t^{\alpha/2-5/4}e^{-t}$, $\frac{1}{n} < t$. Здесь C выбрано в соответствии с оценкой (6), примененной для $L_n^{\alpha+2}(t)$.

Очевидно, что функции $\Phi_n^\alpha(t)$ не возрастают на $(0,\mu)$, а неравенства $|F_n^\alpha(t,0)|\,\rho(t,\alpha)\le\Phi_n^\alpha(t)$ следуют из оценок (6) и представления (5) ядра Фейера. Далее, при $\alpha<1/2$, $n=1,\ 2,\ldots$ и $\mu>\frac{1}{n}$ получим

$$\int_0^\mu \Phi_n^\alpha(t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi_n^\alpha(t)\,dt+\int_{\frac{1}{n}}^\mu \Phi_n^\alpha(t)\,dt\le$$

$$\le Cn^{\alpha+1}\int_0^{\frac{1}{n}}t^\alpha dt+Cn^{\alpha/2-1/4}\int_{\frac{1}{n}}^\mu t^{\alpha/2-5/4}dt\le C.$$

При $\mu\le\frac{1}{n}$ будем иметь

$$\int_0^\mu \Phi_n^\alpha(t)\,dt\le\int_0^{\frac{1}{n}}\Phi_n^\alpha(t)\,dt\le C.$$

Аналогично построим на $(0,\mu)$ мажорирующие функции $\Psi_{n,k}^\alpha(t)$ для произведений $\left|V_{n,k}^\alpha(t,0)\right|\rho(t,\alpha)$ при $k\le\nu$, где

$$V_{n,k}^\alpha(t,0)=\frac{1}{k+1}\sum_{m=n-k}^{n}D_m^\alpha(0,t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)(k+1)}\sum_{m=n-k}^{n}L_m^{\alpha+1}(t)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)(k+1)}\left(L_n^{\alpha+2}(t)-L_{n-k-1}^{\alpha+2}(t)\right)\tag{7}$$

— ядра Валле Пуссена. Строить будем так, чтобы

$$\int_0^\mu \Psi_{n,k}^\alpha(t)\,dt\le C\left(\frac{n+1}{k+1}\right)^{\alpha+1/2}.$$

Положим

$$\Psi_{n,k}^\alpha(t)=C\begin{cases}\max\left(n^{\alpha+1}t^\alpha e^{-t},ne^{-t}\right) & 0<t\le\frac{1}{n},\\ n^{\alpha/2+1/4}t^{\alpha/2-3/4}e^{-t}, & \frac{1}{n}<t\le\frac{n+1}{(k+1)^2},\\ \frac{n^{\alpha/2+3/4}}{(k+1)}t^{\alpha/2-5/4}e^{-t}, & \frac{n+1}{(k+1)^2}<t,\end{cases}$$

где $n=1,2,\ldots$, $k\le\nu$ и $-1/2<\alpha<1/2$.

Функции $\Psi_{n,k}^\alpha(t)$ не возрастают на $(0,\mu)$, а неравенства

$$\left|V_{n,k}^\alpha(t,0)\right|\rho(t,\alpha)\le\Psi_{n,k}^\alpha(t)$$

следуют из оценок (6), представлений ядра Валле Пуссена (7) и того факта, что $n-k-1\sim n$ при $k\le\nu$. Далее, при $-1/2<\alpha<0$ и $\mu>\frac{n+1}{(k+1)^2}$ имеем

$$\int_0^\mu \Psi_{n,k}^\alpha(t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{n}}\Psi_{n,k}^\alpha(t)\,dt+\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{(k+1)^2}}\Psi_{n,k}^\alpha(t)\,dt+\int_{\frac{n+1}{(k+1)^2}}^\mu \Psi_{n,k}^\alpha(t)\,dt\le$$

$$\le Cn^{\alpha+1}\int_0^{\frac{1}{n}}t^\alpha dt+Cn^{\alpha/2+1/4}\int_{1/n}^{\frac{n+1}{(k+1)^2}}t^{\alpha/2-3/4}dt+C\frac{n^{\alpha/2+3/4}}{(k+1)}\int_{\frac{n+1}{(k+1)^2}}^\mu t^{\alpha/2-5/4}dt\le$$

$$\le C\left(\frac{n+1}{k+1}\right)^{\alpha+1/2}.$$

При $\mu\le\frac{n+1}{(k+1)^2}$ имеем

$$\int_0^\mu \Psi_{n,k}^\alpha(t)\,dt\le\int_0^{\frac{n+1}{(k+1)^2}}\Psi_{n,k}^\alpha(t)\,dt\le C\left(\frac{n+1}{k+1}\right)^{\alpha+1/2}.$$

Случай $0\le\alpha<1/2$ рассматривается аналогично.

Теперь перейдем к общему случаю ядер $K_n^\alpha(t,0,\Lambda)$.

Ядро $K_n^\alpha(t,0,\Lambda)$ представимо в виде

$$K_n^\alpha(t,0,\Lambda)=\sum_{m=0}^{\nu-1}(m+1)\,\Delta^2\lambda_m^{(n)}F_m^\alpha(t,0)+(\nu+1)\,\Delta\lambda_\nu^{(n)}F_\nu^\alpha(t,0)+$$

$$+(n-\nu)\,\Delta\lambda_{\nu+1}^{(n)}V_{n,n-\nu-1}^\alpha(t,0)-\sum_{m=\nu+1}^{n-1}(n-m)\,\Delta^2\lambda_m^{(n)}V_{n,n-m-1}^\alpha(t,0).$$

Следовательно, последовательность

$$\Theta_n(t)=\sum_{m=0}^{\nu-1}(m+1)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|\Phi_m^\alpha(t)+(\nu+1)\left|\Delta\lambda_\nu^{(n)}\right|\Phi_\nu^\alpha(t)+$$

$$+(n-\nu)\left|\Delta\lambda_{\nu+1}^{(n)}\right|\Psi_{n,n-\nu-1}^\alpha(t)+\sum_{m=\nu+1}^{n-1}(n-m)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|\Psi_{n,n-m-1}^\alpha(t)$$

будет интегрируемой монотонной мажорантой для произведения $|K_n^\alpha(t,0,\Lambda)|\,\rho(t,\alpha)$ при $-1/2<\alpha<1/2$. Действительно, $\Theta_n(t)$ не возрастают на интервале $(0,\mu)$ и в силу условия *2)* теоремы и соотношения (4) получим

$$\int_0^\mu\Theta_n(t)\,dt\le C(\sum_{m=0}^{\nu-1}(m+1)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|+(\nu+1)\left|\Delta\lambda_\nu^{(n)}\right|+(n-\nu)\left|\Delta\lambda_{\nu+1}^{(n)}\right|+$$

$$+\sum_{m=\nu+1}^{n-1}(n-m)\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|\left(\frac{n+1}{n-m}\right)^{\alpha+1/2})\le C.$$

Согласно теореме Д.К. Фаддеева получим

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\mu f(t)\,K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,\rho(t,\alpha)\,dt=A.$$

Теперь заметим, что так как ядро $K_n^\alpha(t,0,\Lambda)$ сингулярно, то

$$\int_{z_1}^{z_2}K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,e^{-t}t^\alpha dt\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty$$

для любых $0<z_1<z_2$. Следовательно,

$$\int_\mu^\infty S(t)\,K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,e^{-t}t^\alpha dt\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty$$

для любой ступенчатой функции $S(t)$. Поэтому, в силу критерия слабой сходимости линейных функционалов (см., например, [4, стр. 198]), предполагая, что

$$\int_\mu^\infty\left|K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,e^{-t/2}\right|^q t^\alpha dt\le C,$$

получим

$$\int_\mu^\infty f(t)\,K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,e^{-t}t^\alpha dt\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty$$

для любой функции $f\in\left\{f:\int_\mu^\infty\left|f(t)\,e^{-t/2}\right|^p t^\alpha dt<\infty\right\},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\,(p>1)$. Значит, для доказательства теоремы достаточно показать, что $\int_\mu^\infty\left|K_n^\alpha(t,0,\Lambda)\,e^{-t/2}\right|^q t^\alpha dt<C$.

Согласно работе [5], при $t\ge(1+\lambda)\,\eta$ для всех m справедлива оценка

$$\left|L_m^{\alpha+2}(t)\right|e^{-t/2}\le C\,(m+1)^{\alpha/2+1}\,t^{-\alpha/2-1}e^{-\xi t}. \tag{8}$$

Здесь λ — достаточно малое положительное число, $\eta=4n+2\alpha+6$, $0<\xi<1/2$.

Разобьем интеграл на два:

$$\int_{\mu}^{\infty}\left|K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\,e^{-t/2}\right|^q t^{\alpha}dt =$$

$$=\int_{\mu}^{(1+\lambda)\eta}\left|K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\,e^{-t/2}\right|^q t^{\alpha}dt+\int_{(1+\lambda)\eta}^{\infty}\left|K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\,e^{-t/2}\right|^q t^{\alpha}dt = I_1+I_2.$$

Оценим сначала интеграл I_1. Ядро $K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)$ представимо в виде

$$K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)=\sum_{m=0}^{n}(m+1)\,\Delta^2\lambda_m^{(n)}F_m^{\alpha}(t,0)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{m=0}^{n}\Delta^2\lambda_m^{(n)}L_m^{\alpha+2}(t)\,.$$

Из соотношения (3) имеем $\max\left|L_m^{\alpha+2}(t)\right|e^{-t/2}t^{\alpha/2+13/12}\sim(m+1)^{\alpha/2+3/4}$. Тогда

$$t^{\alpha/2+13/12}\left|K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\right|e^{-t/2}\le C\sum_{m=0}^{n}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|(m+1)^{\alpha/2+3/4}\le Cn^{\delta}$$

и

$$I_1\le Cn^{q\delta}\int_{\mu}^{(1+\lambda)\eta}t^{\alpha-q(\alpha/2+13/12)}dt.$$

Если $\alpha\le 1/6$, то при любом $q>1$ будет иметь место неравенство $\alpha-q\,(\alpha/2+13/12)\le -1$. Поэтому $I_1\le Cn^{q\delta}\ln(n+1)\le C$, так как по условию теоремы $\delta<0$. Рассмотрим случай $\alpha>1/6$. Если q не меньше $\frac{12\alpha+12}{6\alpha+13}$, то снова $\alpha-q\,(\alpha/2+13/12)\le -1$ и $I_1\le C$. Если $1<q<\frac{12\alpha+12}{6\alpha+13}$, то $I_1\le Cn^{\alpha+1+q(\delta-\alpha/2-13/12)}\le C$ при $\tau=\alpha+1+q\,(\delta-\alpha/2-13/12)\le 0$. Запишем левую часть последнего условия в виде $\tau=(\alpha+1)(1-q)+q\,(\delta+\alpha/2-1/12)$. Отсюда, если $1/6<\alpha$ и $\delta\le 1/12-\alpha/2$, то $\tau\le 0$ при любом $q>1$. Если же $1/6<\alpha$, а $\delta>1/12-\alpha/2$, то $\tau\le 0$ при $q\ge\frac{12\alpha+12}{6\alpha+13-12\delta}$. Это неравенство выполняется при $p\le\frac{12\alpha+12}{6\alpha-1+12\delta}$.

Оценим теперь интеграл I_2 . Используя оценку (8), получим

$$\left|K_n^{\alpha}(t,0,\Lambda)\right|e^{-t/2}\le Ce^{-\xi t}t^{-\alpha/2-1}\sum_{m=0}^{n}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|(m+1)^{\alpha/2+1}\le$$

$$\le Ce^{-\xi t}n^{1/4}t^{-\alpha/2-1}\sum_{m=0}^{n}\left|\Delta^2\lambda_m^{(n)}\right|(m+1)^{\alpha/2+3/4}\le Cn^{\delta+1/4}t^{-\alpha/2-1}e^{-\xi t}.$$

Значит

$$I_2\le Cn^{q(1/4+\delta)}\int_{(1+\lambda)\eta}^{\infty}t^{\alpha-q(\alpha/2+1)}e^{-q\xi t}dt=Cn^{q(1/4+\delta)}\int_{(1+\lambda)\eta}^{\infty}t^{-1+q/3}t^{\alpha-q(\alpha/2+4/3)+1}e^{-q\xi t}dt.$$

Теперь заметим, что $\alpha-q\,(\alpha/2+4/3)+1<0$ при $q>1$ и $-1/2<\alpha<1/2$. Следовательно, $t^{\alpha-q(\alpha/2+4/3)+1}\le Cn^{\alpha-q(\alpha/2+4/3)+1}$ при $t\ge(1+\lambda)\,\eta$. Получаем

$$I_2\le Cn^{q(1/4+\delta)+\alpha+1-q(\alpha/2+4/3)}\int_{(1+\lambda)\eta}^{\infty}t^{-1+q/3}e^{-q\xi t}dt\le Cn^{\alpha+1-q(\alpha/2+13/12-\delta)}\le C.$$

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

2. *Фаддеев Д.К.* О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Lebesgue'a // Матем. сб. 1936. Т. 1/43, № 3. С. 351–368.

3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т.I.

4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

5. *Askey R., Wainger S.* Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Math. 1965. V. 87. P. 695–708.