Библиографический список

1. *Borg G.* Eine umkehrung der Sturm-Liouvillischen eigenwertaufgabe bestimmung der differentialgleichung durch die eigenwerte // Acta Math. (Uppsala). 1946. V. 78. P. 1–96.

2. *Гасымов М.Г., Левитан Б.М.* О разложении по произведениям некоторых решений двух уравнений Штурма – Лиувилля // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. С. 781–784.

3. *Христов Е.Х.* О разложениях по произведениям решений двух задач Штурма – Лиувилля на полуоси // Диф. уравнения. 1980. № 16. С. 23–29.

4. *Yurko V.A.* The Inverse Spectral Problem for Differential Operators with Nonseparated Boundary Conditions // J. Math. Analysis and Applications. 2000. № 250. P. 266–289.

5. *Поплавский Д.В.* О разрешимости начально-краевой задачи для системы Богоявленского // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 98–101.

6. *Поплавский Д.В.* Прямые и обратные задачи спектрального анализа и их приложения к нелинейным эволюционным операторам: Дис. ... канд. физ.-мат. наук / Сарат. ун-т. Саратов, 2006. 116 с.

7. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.

8. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967. 444 с.

УДК 517.518.85

ОШИБКА ПРИБЛИЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ФОРМОСОХРАНЯЮЩИМИ ОПЕРАТОРАМИ

С.П. Сидоров

Саратовский государственный университет,
кафедра математической экономики
E-mail: SidorovSP@info.sgu.ru

В статье приводится оценка ошибки равномерного приближения дифференцируемых функций многих переменных с ограниченной производной второго порядка линейными интерполяционными операторами, сохраняющими свойство положительности и выпуклости приближаемых функций.

Ключевые слова: формосохраняющее приближение, оптимальная интерполяция.

The Error of Approximation of Differentiable Functions of Several Variables by Means of Interpolatory Shape-Preserving Operators

S.P. Sidorov

Saratov State University, Chair of Mathematical Economics
E-mail: SidorovSP@info.sgu.ru

The article deals with the estimation of the error of uniform approximation of differentiable functions of several variables with limited second derivations by means of linear interpolation operators, which preserve the properties of positivity and convexity of approximated functions.

Key words: shape-preserving approximation, optimal interpolation.

ВВЕДЕНИЕ

Для многих прикладных задач теории приближений зачастую необходимо не просто аппроксимировать некоторую функцию, а приблизить ее с сохранением некоторых ее свойств, связанных с формой функции (положительность, монотонность, выпуклость и т.п.). Раздел теории приближений, посвященный возникающим задачам, называется *теорией формосохраняющего приближения*. Обзор некоторых результатов теории формосохраняющего приближения можно найти в книге [1].

Пусть $p, r \in \mathbb{N}$, $p, r \geq 2$, $C[0,1]^r$ есть пространство непрерывных на множестве $[0,1]^r$ функций, $\|f\| = \sup_{(x_1,\ldots,x_r)\in[0,1]^r} |f(x_1,\ldots,x_r)|$. Обозначим $A = \{(x_1^{[i_1]},\ldots,x_r^{[i_r]}) : \ 0 \leq i_j \leq p\} \subset [0,1]^r$ множество точек, координаты которых лежат в узлах многомерной сетки $\left(\frac{i_1}{p},\ldots,\frac{i_r}{p}\right) \in [0,1]^r$, $i_j \in \{0,1,\ldots,p\}$. Множество A содержит $n = (p+1)^r$ точек, перенумеруем их и обозначим $a^{[i]}$, $i = 1,\ldots,n$. Пусть $V \subset C[0,1]^r$ означает конус всех положительных и выпуклых на $[0,1]^r$ функций.

Обозначим через $\mathcal{L}_n(V)$ множество всех линейных операторов L_n, определенных в $C[0,1]^r$, со значениями в $C[0,1]^r$, вида

$$L_n f(x_1,\dots,x_r) = \sum_{k=1}^{n} f(a^{[k]}) l_{k,n}(x_1,\dots,x_r), \tag{1}$$

где $l_{k,n} \in C[0,1]^r$, и таких, что $L_n(V) \subset V$. Операторы вида (1) являются интерполяционными в том смысле, что значение оператора на некоторой функции полностью определяется значениями этой функции в узлах сетки $\{a^{[1]},\dots,a^{[n]}\}$ (см. [2]).

Целью статьи является оценка линейного относительного поперечника:

$$\inf_{L_n \in \mathcal{L}_n(V)} \sup_{f \in B_2[0,1]^r} \|f - L_n f\|,$$

где

$$B_2[0,1]^r := \left\{ f \in C^2[0,1]^r : \ \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\| \le 1, \ 1 \le i,j \le r \right\}.$$

Оценки относительных линейных поперечников для класса положительных операторов приведены в работе [3].

1. ОЦЕНКА ОШИБКИ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Пусть W есть замкнутое уравновешенное выпуклое подмножество линейного пространства X. Рассмотрим проблему оптимального восстановления линейного функционала L на основе множества значений линейных функционалов $l_1,\dots,l_n$. Для $f \in W$ положим $If := (l_1 f,\dots,l_n f)$. Оператор $I : W \to \mathbb{R}^n$ называется информационным оператором.

Задачи оптимального восстановления функционалов возникают во многих приложениях теории приближения функций и привлекают повышенное внимание. Подробное изложение предмета можно найти в работах [4, 5].

Пусть V — замкнутый конус в $\mathbb{R}^n$, такой что $V \cap I(W) \neq \emptyset$. Пусть $\Phi_I(V)$ означает класс всех линейных алгоритмов $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, использующих информацию I, таких что $A(v) \geqslant 0$ для всех $v \in V$.

Величина $e(L,W,I,V) := \inf\limits_{A \in \Phi_I(V)} \sup\limits_{f \in W} |Lf - A(If)|$ есть ошибка задачи оптимального линейного восстановления линейного функционала L на W на основе информации If, $f \in W$, *с ограничением* V.

Рассмотрим экстремальную задачу $\sup\limits_{f \in W,\ -If \in V} Lf$. Пусть элемент f^* является ее решением, т.е. f^* таков, что $f^* \in W$, $-If^* \in V$ и $Lf^* = \sup\limits_{f \in W,\ -If \in V} Lf$. Заметим, что так как W замкнуто, такой элемент существует. Обозначим $J := \{1 \le j \le n : \ l_j f^* = 0\}$, $I^* f = (l_j f)_{j \in J}$.

Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 1. *Справедлива оценка ошибка задачи оптимального линейного восстановления линейного функционала L на W на основе информации If, $f \in W$, с ограничением V:*

$$\sup_{f \in W,\ -If \in V} Lf \le e(L,W,I,V) \le \sup_{f \in W,\ I^* f = 0} Lf.$$

Если $J = \emptyset$, то полагаем $\sup\limits_{f \in W,\ I^* f = 0} Lf = \infty$.

Доказательство. Имеем

$$e(L,W,I,V) \ge \inf_{A \in \Phi_I(V)} \sup_{f \in W} (Lf - A(If)) \ge \inf_{A \in \Phi_I(V)} \sup_{f \in W,\ -If \in V} (Lf + A(-If)) \ge$$
$$\ge \inf_{A \in \Phi_I(V)} \sup_{f \in W,\ -If \in V} Lf = \sup_{f \in W,\ -If \in V} Lf$$

Установим верхнюю оценку. Обозначим через Φ_{I^*} множество всех линейных алгоритмов, использующих информацию I^*. Имеем

$$e(L,W,I,V) = \inf_{A \in \Phi_I(V)} \sup_{f \in W} |Lf - A(If)| \le \inf_{A \in \Phi_{I^*}} \sup_{f \in W} |Lf - A(I^* f)|.$$

Из [5, лемма 3.1] следует, что последнее выражение равно $\sup\limits_{f \in W, I^* f = 0} Lf$. □

Пусть E_r есть множество всех угловых точек куба $D = [0,1]^r$. Обозначим $p(x_1, \ldots, x_r) = \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{r} x_i (1 - x_i)$, F — множество всех функций $f \in B_2[0,1]^r$, таких что $f(x) = 0$ для всех $x \in E_r$.

Лемма 2. *Пусть* $y = (y_1, \ldots, y_r) \in [0,1]^r$. *Тогда* $\sup\limits_{f \in F} |f(y_1, \ldots, y_r)| = p(y_1, \ldots, y_r)$.

Доказательство. Покажем, используя индукцию, что если $f(x) \le 0$ для всех $x \in E_r$ и $\|(\partial^2 f)/(\partial x_i \partial x_j)\| \le 1$, $1 \le i, j \le r$, то для $(y_1, \ldots, y_r) \in [0,1]^r$ будет

$$|f(y_1, \ldots, y_r)| \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} y_i (1 - y_i). \tag{2}$$

Если $r = 1$, то для $y \in [0,1]$ и функции $f \in C^2[0,1]$, такой что $f(0) \le 0$, $f(1) \le 0$ и $\|f''\| \le 1$ имеем

$$\|f(y)| \le 1/2y(1-y). \tag{3}$$

Пусть (2) имеет место для $r = k - 1$. Покажем, что (2) справедливо для $r = k$. Рассмотрим две грани куба $[0,1]^k$, лежащие на гиперплоскостях $x_k = 0$ и $x_k = 1$. По предположению индукции имеем

$$|f(y_1, \ldots, y_{k-1}, 0)| \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} y_i (1 - y_i), \qquad |f(y_1, \ldots, y_{k-1}, 1)| \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} y_i (1 - y_i). \tag{4}$$

Рассмотрим функцию $f(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k)$ переменной x_k на отрезке $[0,1]$. По условию леммы $\|(\partial^2 f)/(\partial x_k^2)\| \le 1$. Из (3), (4) имеем

$$|f(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k)| \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} y_i (1 - y_i) + \frac{1}{2} y_k (1 - y_k). \qquad \square$$

Пусть $L = \delta_\zeta$, $I = (\delta_{a_1}, \ldots, \delta_{a_n})$, т.е. $Lf = f(\zeta)$ и $If = (f(a^{[1]}), \ldots, f(a^{[n]}))$. Для фиксированных $i_j \in \{0, \ldots, p-1\}$, $j = 1, \ldots, r$, обозначим $D_{i_1, \ldots, i_r} := \bigotimes\limits_{j=1}^{r} \left[\frac{i_j}{p}; \frac{i_{j+1}}{p}\right]$, где $\otimes$ означает декартово произведение множеств. Пусть $\zeta \in D_{k_1, \ldots, k_r}$. Обозначим $q(x_1, \ldots, x_r) = \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{r} (x_i - x_i^{[k_i]})(x_i^{[k_i+1]} - x_i)$.

Теорема 1. *Имеет место следующая оценка ошибки оптимальной интерполяции на множестве* $B_2[0,1]^r$ *на основе информации* I *с ограничением* V:

$$e(\delta_\zeta, B_2[0,1]^r, I, V) = q(\zeta_1, \ldots, \zeta_r).$$

Доказательство. Очевидно, $q \in B_2[0,1]^r$ и $-Iq \in V$. Из лемм 1 и 2 следует, что

$$e(\delta_\zeta, B_2[0,1]^r, I, V) \ge \sup_{f \in B_2[0,1]^r,\ -If \in V} f(\zeta) = q(\zeta_1, \ldots, \zeta_r).$$

Линейный алгоритм, который дает верхнюю оценку, приведен в работе [6]. $\square$

2. ОЦЕНКА ЛИНЕЙНОГО ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНИКА

Рассмотрим конус $V \subset C[0,1]^r$ всех положительных и выпуклых на $[0,1]^r$ функций и множество $\mathcal{L}_n(V)$ всех линейных операторов L_n, определенных в $C[0,1]^r$, со значениями в $C[0,1]^r$, вида (1) и обладающих свойством формосохранения относительно конуса V, т.е. таких, что $L_n(V) \subset V$.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\inf_{L_n \in \mathcal{L}_n(V)} \sup_{f \in B_2[0,1]^r} \|f - L_n f\| = \frac{r}{8n^{2/r}}. \tag{5}$$

Доказательство. Имеем

$$\inf_{L_n \in \mathcal{L}_n(V)} \sup_{f \in B_2[0,1]^r} \|f - L_n f\| = \inf_{L_n \in \mathcal{L}_n(V)} \sup_{f \in B_2[0,1]^r} \sup_{\zeta \in [0,1]^r} |f(\zeta) - L_n f(\zeta)| \ge$$

$$\ge \sup_{\zeta \in [0,1]^r} \inf_{L_n \in \mathcal{L}_n(V)} \sup_{f \in B_2[0,1]^r} |f(\zeta) - L_n f(\zeta)| \ge \sup_{\zeta \in D_0} \inf_{L_n \in \mathcal{L}_n(V)} \sup_{f \in B_2[0,1]^r} |f(\zeta) - L_n f(\zeta)|,$$

где $D_0 = [0, 1/(p+1)]^r$. С учетом теоремы 1 имеем

$$\inf_{L_n \in \mathcal{L}_n(V)} \sup_{f \in B_2[0,1]^r} \|f - L_n f\| \ge \sup_{\zeta \in D_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \zeta \left(\frac{1}{p-1} - \zeta \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{2(p-1)} \right)^2 = \frac{r}{8(p-1)^2} = \frac{r}{8n^{2/r}}.$$

Таким образом, нижняя оценка в (5) установлена. Линейный алгоритм, который дает верхнюю оценку, приведен в работе [6]. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 07-01-00167-а) *и гранта для государственной поддержки ведущих научных школ РФ* (*проект* НШ-2970.2008.1).

Библиографический список

1. *Gal S. G.* Shape-Preserving Approximation by Real and Complex Polynomials. Springer, 2008.
2. *DeVore R. A.* The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1972.
3. *Сидоров С.П.* Оценка относительных линейных поперечников единичого шара для класса положительных операторов // Сиб. журн. индустриальной математики. 2007. Т. 10, № 4. С. 122–128.
4. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Optimal estimation in approximation theory // A survey of optimal recovery. N.Y.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
5. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.
6. *Васильев Р.К.* О порядке приближения функций многих переменных линейными положительными операторами конечного ранга // Мат. заметки. 1993. Т. 53, вып. 1. С. 3–15.

УДК 517.977

О РЕШЕНИИ ДИСКРЕТНОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Н.Ю. Трошина

Саратовский государственный университет,
кафедра математической экономики
E-mail: troshina.n@gmail.com

В статье рассматривается дискретная линейно-квадратичная задача оптимального управления с закреплёнными концами и ограничениями на управление. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности типа принципа максимума и предлагается метод точного решения краевой зачи, который сводится к решению конечного числа систем линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: дискретное оптимальное управление.

About Solution of Discrete Linear-Quadratic Optimal Control Problem

N.Yu. Troshina

Saratov State University, Chair of Mathematical Economics
E-mail: troshina.n@gmail.com

This paper is focuses on development of the method for exact solution of the optimal control problem for discrete linear system with quadratic criteria, with boundary conditions and constraints on control. This method gives a solution of finite number of systems of linear algebraic equations.

Key words: discrete optimal control.

Как известно, линейно-квадратичные задачи оптимального управления достаточно хорошо изучены, однако интерес к этим задачам не ослабевает [1–3]. В первую очередь это объясняется тем, что к задаче оптимизации квадратичного функционала на линейных системах приводит построение моделей многих технических и экономических процессов управления [4, 5].

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия оптимальности для линейной дискретной системы с закрепленными концами и квадратичным критерием качества при ограничениях на управление, которые дают в явном виде выражение оптимального управления через сопряженные переменные. Предлагается метод решения полученной краевой задачи, который сводится к последовательному решению конечного числа систем линейных алгебраических уравнений. В одном частном случае сопряженные переменные удаётся полностью исключить, что значительно упрощает процедуру вычислений. При этом получены формулы, показывающие зависимость оптимального управления и оптимальной траектории от заданных граничных условий.