



вращения // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2004. Вып. 30. С. 83–91.

33. Сеницкий Ю. Э., Сеницкий А. Ю. О вычислении скалярного произведения в формуле обращения биортогонального конечного интегрального преобразования // Математическое моделирование и краевые задачи:

тр. 6-й межвуз. конф. Самара, 1996. Ч. 2. С. 93–94.  
34. Сеницкий Ю. Э., Козьма И. Е. Дифференциальные уравнения колебаний трехслойных ортотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью // Тр. XXI Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов, 2005. С. 207–216.

УДК 532.517.2:534.2

## ПОЛЗУЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В УСЛОВИЯХ НЕИЗОТЕРМИЧНОСТИ

Б. А. Снигерев, К. М. Алиев<sup>1</sup>, Ф. Х. Тазюков<sup>1</sup>

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, лаборатория моделирования технологических процессов;  
<sup>1</sup> Казанский государственный технологический университет, кафедра теоретической механики и сопротивление материалов  
E-mail: snigerev@mail.knc.ru, alievm@rambler.ru, Tazyukov@mail.ru

Работа посвящена моделированию медленного движения вязкоупругой жидкости со свободной поверхностью, реализующейся при входе полимерной жидкости в формующую насадку и выхода из нее. Движение жидкости описывается уравнениями сохранения массы, импульса и энергии, дополненными реологическим уравнением состояния среды Гиезекуса. На основе метода конечных элементов разработан устойчивый численный алгоритм решения задачи. Проведены численные исследования по определению формы выходной струи для различных режимов течения и формы насадки. Исследована картина распределения скорости жидкости, давления, напряжений и температуры при увеличении степени нагрева стенки насадки. Получены численные результаты зависимости эффекта разбухания полимера от параметров реологической модели и температурных факторов.

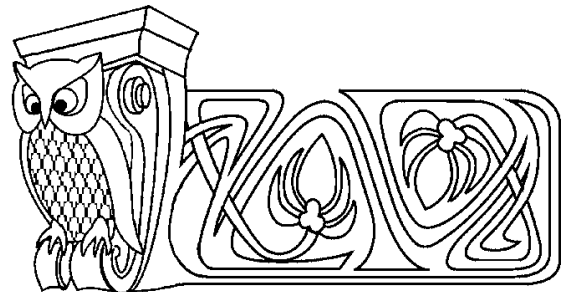
**Ключевые слова:** вязкоупругая жидкость, реологическая модель Гиезекуса, течение со свободной поверхностью.

### ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в промышленности переработки полимеров большое внимание уделяется интенсификации существующих процессов и производств, при этом все больше внимания уделяется качеству производимых изделий. Индустрия переработки полимерных материалов базируется в основном на двух основных типах производств — литье под давлением и экструзия [1, 2]. Под термином «экструзия» имеется в виду непрерывный процесс формования длинномерных изделий, заключающийся в придании материалу требуемой формы в результате продавливания его через профилирующий канал. Экструзия дает возможность формовать погонажные профильные изделия, прежде всего пленки во всем их многообразии и длинномерные профили, включая трубы и профильные уплотнения. При помощи литья под давлением производится огромное многообразие объемных изделий.

Экспериментальные и теоретические исследования [1, 2] показывают, что характер течения полимерной жидкости в формующих элементах насадки (фильере) и в выходной струе определяется совокупностью факторов, которые можно разделить на три группы:

– гидродинамические и реологические факторы: расход массы в насадке, определяемый производительностью перерабатываемого оборудования; геометрические характеристики формующей насадки;



### Creeping Flow of Viscoelastic Fluid with Free Surface at Non-Isothermal Condition

B. A. Snigerev, K. M. Aliev<sup>1</sup>, F. Kh. Tazyukov<sup>1</sup>

Institute of Mechanics and Engineering RAS, Kazan, Laboratory of Modelling of Technological Processes;

<sup>1</sup> Kazan State Technological University, Chair of Mechanical Engineering

E-mail: snigerev@mail.knc.ru, alievm@rambler.ru, Tazyukov@mail.ru

Numerical simulation flow of viscoelastic fluid with free surface, which is realized in entrance and output flow in extrusion die was performed. The flow of liquid is described by equations of conservation of mass, momentum and thermal energy with rheological constitutive equation of Giesekes. On basis of finite element method the stable numerical scheme was developed to solve this problem. Different numerical experiments was performed to define the configuration of outflow jet in various regimes and construction of die. The distribution of flow velocity fields, pressure and temperature are investigated on dependence of heating the walls. The ratio of extrusion in dependence of parameters the rheological model are investigated.

**Key words:** viscoelastic fluid, Giesekes model, free surface flow.



физико-механические свойства полимерной жидкости (плотность, вязкость, реологические характеристики и пр.); массовые силы;

– теплофизические факторы: температурный режим экструзии (температура поступающей полимерной жидкости, температура и изоляционные качества стенок насадки и фильеры, температура окружающего воздуха) и теплофизические свойства полимерной жидкости;

– физико-химические факторы: факторы связанные с процессами отверждения и, в конечном счете, определяющие время и характер действия первых двух факторов.

В соответствии с вышеизложенным особую актуальность приобретает разработка математических моделей, методов расчета и оптимизации процесса экструзии с последующей проверкой и внедрением полученных результатов в производство. К настоящему времени число работ, посвященных исследованию гидродинамических и тепловых процессов в канале формирующей головки и экструзии из формирующей насадки, незначительно.

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассматривается вытекание упруговязкой жидкости из цилиндрической ступенчатой щелевой насадки, схема которой представлена на рис. 1. На рисунке  $h$  обозначает радиус узкого канала выходной части насадки,  $4h$  — радиус трубы на входе,  $h_1 = 0.5h$  — длина закругленной части,  $L$  — длина выходной части насадки.

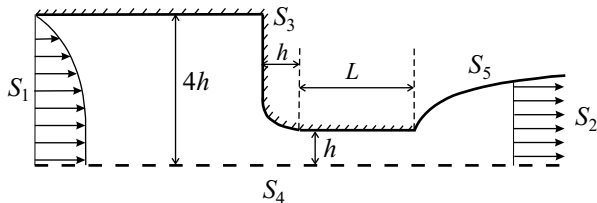


Рис. 1. Схема вытекания упруговязкой жидкости из осесимметричной ступенчатой насадки

Рассматривается влияние длины выходной части насадки  $L$  на степень разбухания полимерной жидкости в процессе экструзии. Рассматриваются значения, равные  $L = 0, 2h, 4h, 10h$ . Анализируются также влияние реологических параметров конститутивного соотношения Гиезекуса на характер истечения из насадки.

Введем следующие обозначения границ:  $S_1$  — входное сечение,  $S_2$  — выходное сечение струи,  $S_3$  — твердая стенка формирующего канала,  $S_4$  — граница, являющаяся осью симметрии области,  $S_5$  — часть границы, приходящаяся на свободную поверхность.

Исходной является система уравнений законов сохранения массы, импульса, энергии, для замыкания которой привлекается конститутивное реологическое соотношение Гиезекуса [3–5]:

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^V + 2\eta_N D_{ij}, \quad \frac{\delta \tau_{ij}^V}{\delta t} = \frac{\partial \tau_{ij}^V}{\partial t} + v_k \frac{\partial \tau_{ij}^V}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \tau_{kj}^V - \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \tau_{ik}^V,$$

$$\tau_{ij}^V + \lambda \frac{\delta \tau_{ij}^V}{\delta t} + \frac{\alpha \lambda}{\eta_V} \tau_{ij}^{2V} = 2\eta_V D_{ij}, \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + (\tau_{ij} D_{ji}). \quad (2)$$

В системе уравнений (1)–(2)  $v_i$  — компоненты скорости жидкости,  $P$  — давление,  $\tau_{ij}$  — девиатор напряжения,  $\tau_{ij}^V$  — вязкоупругая часть напряжения,  $T$  — температура жидкости,  $\eta_V, \eta_N$  — динамические вязкости полимера и растворителя соответственно,  $c_p$  — теплоемкость жидкости при постоянном давлении,  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $\lambda$  — время релаксации напряжений полимерной жидкости. Для зависимости вязкости и времени релаксации от температуры используется соотношение Аррениуса [4]

$$\eta(T) = \eta_0 a(T), \quad \lambda(T) = \lambda_0 a(T), \quad a(T) = \exp[A(1/T - 1/T_0)], \quad A = E/R,$$

где индекс 0 означает, что значение параметра вычисляется при температуре  $T_0$ ,  $E$  — энергия активации,  $R$  — универсальная газовая постоянная.



Граничные условия имеют вид:  $S_1: v_2 = v_2(x_2), \tau_{ij}^V = \tau_{ij}^V(x_2), T = T_0(x_1)$ ;  $S_2: v_1 = 0, \partial v_2/\partial x_2 = 0, \partial T/\partial x_2 = 0, \partial \tau_{ij}/\partial x_2 = 0$ ;  $S_3: v_i = 0, T = T_1$ ;  $S_4: v_1 = 0, \tau_{12} = 0, \partial T/\partial x_1 = 0$ ;  $S_5: dx_i/dt = v_i, n_i \tau_{ij} n_j - (P - P_0) n_i = \frac{1}{\sigma_p} 2K, n_j \tau_{ij} t_i = 0, k \partial T/\partial n = -\alpha (T - T_2)$ . Здесь  $n_i, t_j$  — компоненты единичной нормали и касательной к поверхности  $S_5$ ,  $P_0$  — давление над свободной поверхностью,  $\sigma_p$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $K$  — кривизна свободной поверхности,  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи с окружающей средой,  $T_1$  — температура стенок канала,  $T_0$  — температура жидкости на входе,  $T_2$  — температура окружающей среды.

В качестве безразмерных переменных используются параметры

$$x_i^* = x_i/L, \quad v_i^* = v_i/U_0, \quad t^* = tU_0/L, \quad p^* = \eta U_0/L p, \quad \tau_{ij}^* = \eta U_0/L \tau_{ij}, \quad \theta = (T - T_1)/(T - T_0),$$

где  $U_0$  — средняя скорость жидкости на входе,  $L$  — характерный размер, равный радиусу узкой части канала (далее звездочка над безразмерными величинами опущена).

Исходную систему уравнений запишем в безразмерном виде:

$$Re \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^V + 2\beta D_{ij}, \quad \tau_{ij}^V + We \frac{\delta \tau_{ij}^V}{\delta t} + \frac{\alpha We}{1 - \beta} \tau_{ij}^2 V = 2(1 - \beta) D_{ij},$$

$$Pe \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + v_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2} + Br(\tau_{ik} \cdot D_{kj}).$$

Здесь определяющими являются безразмерные комплексы:  $Re = Re_0 a(\theta)$ ,  $Re_0 = \rho U_0 L/\eta$  — число Рейнольдса,  $Pe = \rho c_p U L/k$  — число Пекле,  $We = We_0 a(\theta)$ ,  $We_0 = \lambda U_0/L$  — числа Вайссенберга,  $Br = Br_0 a(\theta)$ ,  $Br = \eta U_0^2/(T_1 - T_0)$  — числа Бринкмана,  $\beta = \beta_0 a(\theta)$ ,  $\beta_0 = \eta_N/(\eta_N + \eta_V)$  — параметр ретардации.

Граничные условия в безразмерной форме примут вид:  $S_1: v_i = v_i(x_1), \theta = 0$ ;  $S_2: v_1 = 0, \partial v_2/\partial x_2 = 0, \theta = 1$ ;  $S_3: v_i = 0, \theta = 1$ ;  $S_4: v_1 = 0, \tau_{12} = 0$ ;  $S_5: dx_i/dt = v_i, n_i \tau_{ij} n_j - \frac{1}{Ca} 2K = 0; n_j \tau_{ij} t_i = 0, \partial \theta/\partial n = -Bi(\theta - \theta_0)$ , где  $Ca = \eta U/\sigma_p$  — число капиллярности,  $Bi = \alpha L/k$  — параметр Био.

## 2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Аппроксимация уравнений (1–2) и вычисления проводятся методом конечных элементов (МКЭ) второго порядка на нерегулярных сетках, сгущающихся к зоне истечения полимера из насадки. Для расчетов строилась последовательность сгущающихся сеток  $\Omega_e$  9-узловых четырехугольных элементов (число узлов 5000, 18400, 26700). Для скоростей применяется квадратичная аппроксимация  $\varphi = \{\varphi_i, i = 1, 9\}$  и линейная  $\psi = \{\psi_i, i = 1, 4\}$  для давления, напряжений, температуры. После применения стандартной процедуры метода конечных элементов получаем уравнения следующего вида:

$$M_{ij} v_j^{n+1} + A_{ij} v_j^{n+1} - E_{ij} p_i^{n+1} = M_{ij} v_j^n - C_{ij} v_j^n + E_{ik} \tau_{kj}, \quad E_{ij}^T v_i^{n+1} = 0, \quad (3)$$

где  $M_{ij}$  — матрица масс,  $E_{ij}$  — дискретизация оператора дивергенции,  $E_{ij}^T$  — транспонированная матрица оператора дивергенции,  $A_{ij}$  — сеточный аналог оператора Лапласа,  $C_{ij}$  — дискретизация конвективного члена. Для их вычисления применяются следующие формулы:

$$M_{ij} = \int_{\Omega_e} \varphi_i \varphi_j dx_1 dx_2, \quad E_{ij} = \int_{\Omega_e} (\nabla \psi_i) \varphi_j dx_1 dx_2,$$

$$A_{ij} = \int_{\Omega_e} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx_1 dx_2, \quad C_{ij} = \int_{\Omega_e} v_i^n (\nabla \varphi_i) \varphi_j dx_1 dx_2.$$

Интегралы на четырехугольнике вычисляются с помощью 4-точечной квадратурной формулы Гаусса.



Уравнения для напряжений и температуры считаются отдельно при известном распределении поля скоростей из матричного уравнения:

$$M_{ij}\tau_{ik}^{n+1} = M_{ij}\tau_{ij}^n - G_{ij}(v_i^n)\tau_{ij}^n - S_{ij}(v_i^n)\tau_{ij}^n - P_{ij}, \quad (4)$$

$$M_{ij}\theta_j^{n+1} = M_{ij}\theta_j^n - C_{ij}(v_i^n)\theta_j^n + F_{ij}\tau_{ij}^n, \quad (5)$$

где  $M_{ij}$  — матрица масс,  $G_{ij}$ ,  $S_{ij}$  — дискретизации оператора верхней конвективной производной и конвективных слагаемых соответственно,  $F_{ij}$ ,  $P_{ij}$  — порождены дополнительными членами в уравнениях для энергии и напряжений. Данные матрицы находятся через

$$G_{ij} = \int_{\Omega_e} [f(v_i^n)]\psi_i\psi_j dx_1dx_2, \quad S_{ij} = \int_{\Omega_e} v_i^n(\nabla\psi_i)\psi_j dx_1dx_2,$$

$$F_{ij} = \int_{\Omega_e} v_i^n(\nabla\psi_i)\psi_j dx_1dx_2, \quad P_{ij} = \int_{\Omega_e} (\psi_i)^2(\psi_j) dx_1dx_2.$$

Для свободной поверхности, описываемой уравнением  $F(x_i, t) = 0$ , выполняется соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_i\nabla F = 0. \quad (6)$$

Местоположение деформируемой свободной поверхности находится из аппроксимации кинематического условия (6) методом конечных элементов, затем сетка конечных элементов вблизи нее перестраивается для получения решений матричных уравнений (3)–(5), с помощью которых находится поле скоростей, давлений, напряжений и температур на новом временном слое  $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$ . Стационарное положение формы выходящей струи находится методом установления эволюционной задачи с использованием традиционных для уравнений данного класса алгоритмов [6, 7].

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Для изотермического обтекания значения всех теплофизических параметров рассматриваются при температуре  $T_0 = 303$  К. В случае неизотермического обтекания рассматривается истечение полимерной жидкости из насадки с нагретыми стенками, температура которых повышается до  $T_1 = 323$  К, 353 К соответственно. Расчеты проводились при следующих значениях теплофизических свойств полимерной жидкости  $\rho = 924$  кг/м<sup>3</sup>,  $\eta = 10^4$  Па·с,  $c_p = 2300$  Дж/(кг·К),  $k = 0.26$  Вт/(м·К),  $A = 2000$  К,  $\sigma_p = 3 \cdot 10^{-2}$  н/м,  $\alpha = 10^2$  Вт/(м<sup>2</sup>·К). Характерные параметры рассматривались следующие  $Re = 10^{-2}$  м,

где  $Re$  — число Рейнольдса,  $Pe = 180$ ,  $Br = 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $Ca = 1.4 \cdot 10^3$ ,  $Bi = 3.8$ , а число  $We$  изменялось в пределах от 0.1 до 5.

На рис. 2 представлена картина течения для насадки с размером выходного канала, равным  $L = 0$ , в виде изолиний линий тока (рис. 2, а), первой разницы главных нормальных напряжений  $N_1$  (рис. 2, б) и компоненты осевой скорости (рис. 2, в), для изотермической экструзии при  $We = 3.0$ . Увеличение диаметра выходной струи характеризуется параметром  $h_f$ , равным отношению диаметра струи к диаметру канала и называемым эффектом разбухания струи.

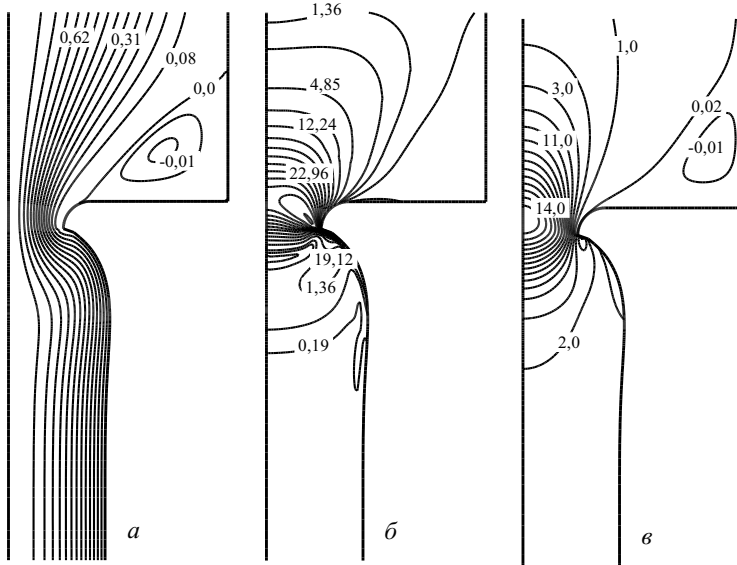


Рис. 2. Изолинии линии тока  $\psi$  (а); изолинии  $N_1$  (б); осевой компоненты скорости (в) при  $We = 3.0$  для насадки  $L = 0$



На рис. 3 приведена зависимость степени разбухания  $h_f$  выходящей струи полимерной жидкости от значения числа  $We$  для различных насадок. Формы насадок различаются длиной узкой выходной части  $L$ , изменяющейся от 0 до  $10h$ . Результаты показывают, что степень разбухания  $h_f$  струи увеличивается при уменьшении длины выходного участка. Видно, что значения  $h_f$  зависят от кинематики предшествующего деформирования — скорости сдвига и длины выходной части капилляра. Что можно трактовать тем, что постэкструзионное разбухание при переработке полимеров обусловлено высвобождением упругой энергии, запасенной при предшествующем течении в канале. Вязкоупругие жидкости являются средами, обладающими наследственной памятью. Наследственная жидкость «помнит» предысторию, т. е. изменение поля скоростей в предшествующие моменты времени. Длительность «памяти» характеризуется временем релаксационных процессов  $\lambda$ , что определяется параметром  $We$ . Видно, что при увеличении значения числа  $We$  степень разбухания увеличивается для всех насадок.

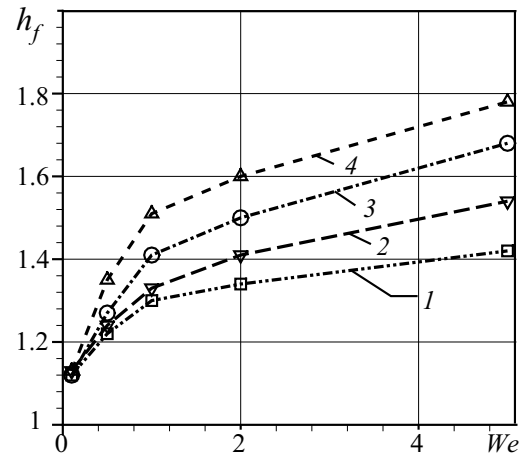


Рис. 3. Степень разбухания выходной струи  $h_f$  в зависимости от значения числа  $We$  для различных насадок: 1 —  $L = 10h$ , 2 —  $L = 4h$ , 3 —  $L = 2h$ , 4 —  $L = 0$

Результаты исследования влияния реологических параметров модели Гиезекуса  $\alpha$  и  $\beta$  при изотермическом течении показаны на рис. 4. На рис. 4, а приведена зависимость степени разбухания выходящей струи полимерной жидкости от значения числа  $We$  для насадки с длиной  $L = 0$  при увеличении параметра  $\alpha$  модели Гиезекуса. Увеличение данного параметра для вязкоупругих жидкостей означает, что они обладают большей аномалией вязкости при увеличении скорости сдвига. Жидкости, не обладающие аномалией вязкости, описываются реологическим уравнением Олдройда [4, 5], что соответствует  $\alpha = 0$  в модели Гиезекуса. Видно, что для упруговязких жидкостей, проявляющих большую аномалию вязкости, степень разбухания уменьшается при изотермическом выдавливании из насадки. Аналогичные кривые при изменении параметра ретардации  $\beta$  приведены на рис. 4, б. Увеличение параметра  $\beta$  означает увеличение доли растворителя в полимерной смеси. Видно, что разбавление полимерной смеси приводит к более значительному уменьшению степени разбухания выходной струи. Это объясняется тем, что упругие свойства жидкости играют значительную роль в увеличении диаметра выходной струи. Для больших значений данного параметра поведение полимерной смеси близко к ньютоновской жидкости, когда значение  $h_f$  не превышает 1.13. В этом случае увеличение диаметра струи в основном определяется резким перераспределением неоднородного поля скорости в однородный.

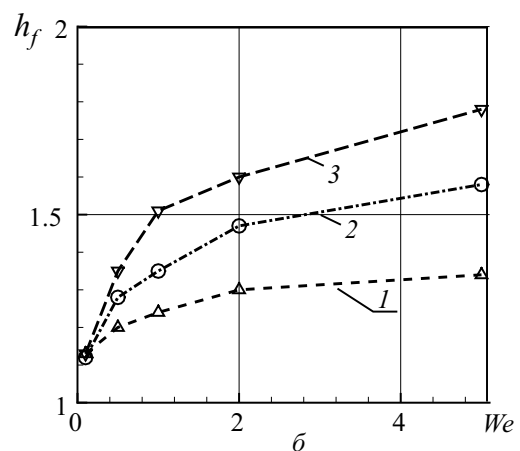
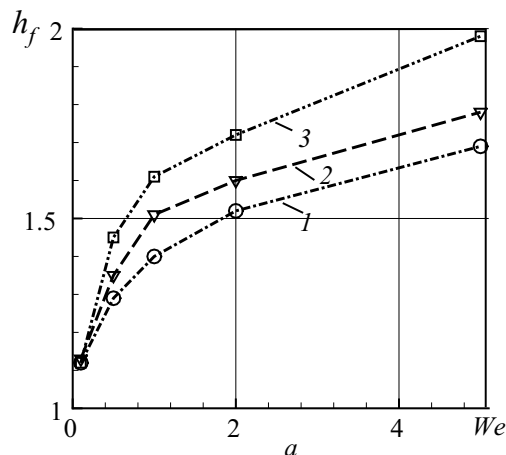


Рис. 4. Степень разбухания выходной струи  $h_f$  в зависимости от значения числа  $We$  для насадки с длиной  $L = 0$  в зависимости от параметра  $\alpha$  (а, 1 —  $\alpha = 0.86$ , 2 —  $\alpha = 0.33$ , 3 —  $\alpha = 0.11$ ) и для различных значений  $\beta$  (б, 1 —  $\beta = 0.8$ , 2 —  $\beta = 0.5$ , 3 —  $\beta = 0.11$ )



На рис. 5, а показана зависимость  $h_f$  от числа  $We$  при неизотермической экструзии для ступенчатой формирующей насадки с размером выходной части  $L = 0$  в зависимости от температурного напора между стенкой и потоком полимера. На рис. 5, б показана аналогичная зависимость для насадки с размером  $L = 2h$ . Видно, что нагрев стенки на  $\Delta T = 30\text{K}$  (кривая 3) на обоих графиках приводит к уменьшению диаметра выходной струи. Отметим при этом, что для более длинной насадки с ростом числа  $We$  и температурного напора наблюдается немонотонный характер увеличения  $h_f$ . При небольших числах  $We$  ( $We < 1$ ) происходит уменьшение степени разбухания.

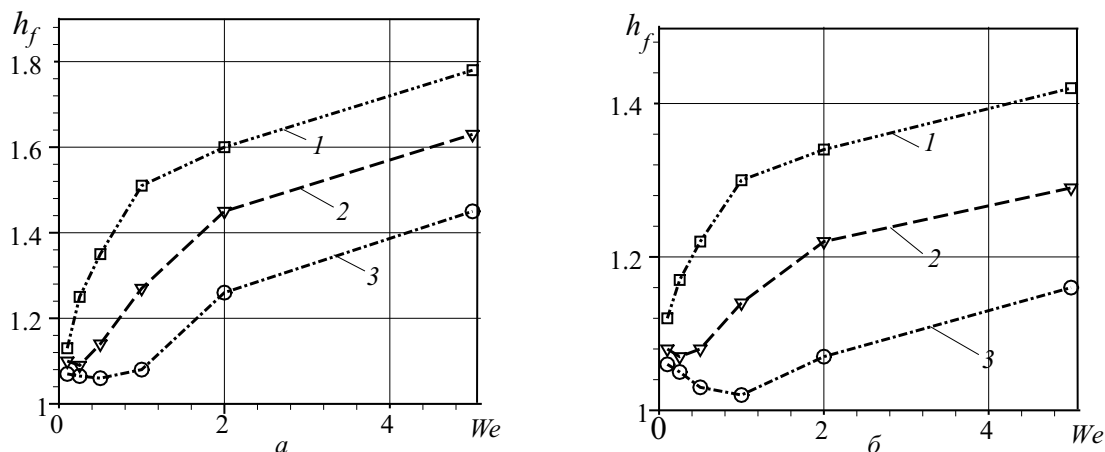


Рис. 5. Степень разбухания выходной струи  $h_f$  для неизотермической экструзии в зависимости от значения числа  $We$  при увеличении температуры стенки  $S_3$  (1 —  $\Delta T = 0\text{ K}$ , 2 —  $\Delta T = 15\text{ K}$ , 3 —  $\Delta T = 30\text{ K}$ ) насадки с длиной  $L = 0$  (а) и  $L = 2h$  (б)

Приведенные результаты расчетов процесса экструзии упруговязкой жидкости из ступенчатых формирующих насадок с разной длиной выходной части показали, что степень разбухания выходной струи увеличивается для коротких насадок. Данные результаты подтверждают вывод о том, что одним из факторов влияющих на степень разбухания для наследственных вязкоупругих сред является время релаксации напряжений. Неизотермичность потока полимерной массы, определяющаяся разностью температур стенки и основного потока, приводит к уменьшению диаметра выходной струи. Выявлено, что при увеличении температурного напора наблюдается уменьшение диаметра выходной струи с ростом числа  $We$  на начальном этапе. Данный характер немонотонного поведения степени разбухания свидетельствует о том, что температурная аномалия вязкости оказывает существенное влияние на форму выходящей струи.

#### Библиографический список

1. Торнер Р. В. Теоретические основы переработки полимеров. М.: Химия, 1977. 467 с.
2. Раувендаль К. Экструзия полимеров. СПб.: Профессия, 2008. 768 с.
3. Giesekus H. A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation dependent tensorial mobility // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1982. Vol. 11. P. 69–109.
4. Bird R. B., Armstrong R. C., Hassager O. Dynamics of Polymeric Liquids. vol. I. Fluid Mechanics. 2nd ed. N.Y.: John Wiley and Sons, 1987. 565 с.
5. Назмеев Ю. Г. Гидродинамика и теплообмен закрученных потоков реологически сложных жидкостей. М.: Энергоатомиздат, 1996. 304 с.
6. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье – Стокса / В. И. Полежаев, А. В. Бунэ, Н. А. Везуб и др. М.: Наука, 1987. 271 с.
7. Снигирев Б. А., Тазюков Ф. Х., Кутузов А. Г., Амераль Раваши. Течение упруговязкой жидкости со свободной поверхностью // Вестн. Казан. техн. ун-та. 2007. № 1. С. 86–93.