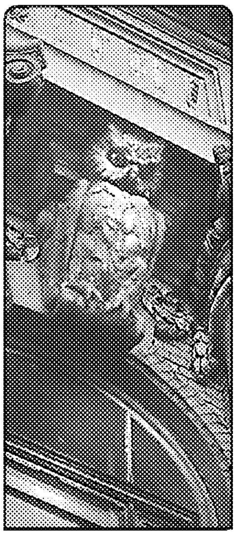

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ИНФОРМАТИКА

УДК 62-50

ЭКСПЕРИМЕНТЫ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ БИЛИНЕЙНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ

Д.В. Сперанский

Саратовский государственный университет,
кафедра математической кибернетики и компьютерных наук
E-mail: SperanskiyDV@info.sgu.ru

Получены условия существования синхронизирующих, установочных и диагностических последовательностей для нестационарных билинейных систем. Предложены методы синтеза упомянутых последовательностей.

Experiments with Non-Stationary Bilinear Discrete Systems

D.V. Speranskiy

The existence conditions of synchronizing, homing and diagnostic sequences for the non-stationary bilinear systems are found. Methods for synthesis of mentioned sequences are suggested.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая статья посвящена исследованию некоторых задач теории экспериментов с автоматами [1]. Эта теория, как известно, представляет собой фундаментальную математическую основу для разработки средств и методов контроля и диагностирования дискретных систем. Кроме того, она имеет самостоятельное значение как важный раздел общей теории автоматов при исследовании ее собственных внутренних задач. Из всех типов экспериментов ниже будут рассмотрены установочные (и их вырожденный случай — синхронизирующие) и диагностические. Интерес к ним связан с возможностью их применения при диагностике дискретных систем с целью определения их начального или конечного состояния, что существенно упрощает процесс их тестирования.

Отметим, что в настоящее время теория экспериментов с автоматами Мили, самой общей моделью автомата, развита достаточно хорошо. Известные в этой области результаты свидетельствуют о значительной трудоемкости методов синтеза упомянутых экспериментов и довольно больших их длинах. Вместе с тем среди дискретных систем и процессов, широко используемых на практике, имеется много таких, специфика которых позволяет существенно упростить процедуры синтеза экспериментов и сократить их длину.

К числу таких систем относятся, в частности, линейные и билинейные дискретные системы. Последние являются адекватными математическими моделями нейронных сетей, процессов роста популяций в биологии, устройств для умножения и деления полиномов, применяемых в криптографии, и т.п. Возможность упрощения процедур синтеза экспериментов для них подтверждена результатами, полученными для стационарных линейных и билинейных систем в [2, 3]. Ниже будет показано, что такие же упрощения имеют место и для нестационарных билинейных дискретных систем (НБС).

1. ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предварительно напомним некоторые определения. Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ — автомат Мили, где S, X, Y — конечные множества состояний, входной и выходной алфавиты соответственно, а $\delta: S \times X \to S$ и $\lambda: S \times X \to Y$ — отображения, представляющие собой функции перехода и выхода.

Определение 1. Входная последовательность $p = x_1, x_2, \dots, x_k$ называется *синхронизирующей* (СП) для автомата A, если $\forall\ s_1, s_2 \in S\ \delta(s_1, p) = \delta(s_2, p)$.

Определение 2. Входная последовательность $p = x_1, x_2, \dots, x_k$ называется *установочной* (УП) для автомата A, если $\forall\ s_1, s_2 \in S\ \lambda(s_1, p) = \lambda(s_2, p) \to \delta(s_1, p) = \delta(s_2, p)$.

Определение 3. Входная последовательность $p = x_1, x_2, \dots, x_k$ называется *диагностической* (ДП) для автомата A, если $\forall\ s_1, s_2 \in S\ \lambda(s_1, p) = \lambda(s_2, p) \to s_1 = s_2$.

В этих определениях функции δ и λ расширены на входные последовательности так, как это традиционно делается в теории автоматов. Содержательно приведенные определения означают, что независимо от начального состояния автомата в случае подачи на его вход СП он оказывается в одном и том же состоянии независимо от выходной реакции, а в случае подачи на вход УП (ДП) по наблюдаемой реакции однозначно определяется конечное (начальное состояние).

Очевидно, что СП является вырожденным случаем УП, а ДП одновременно является и УП, однако обратное неверно.

Перейдем теперь к описанию объекта исследования. Условимся далее считать, что НБС задана над полем $GF(p) = \{0, 1, \dots, p-1\}$, где p — простое число, а ее входным, выходным и вектором-состоянием являются соответственно вектора-столбцы

$$\overline{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_l(t)]', \quad \overline{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]', \quad \overline{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_n(t)]'.$$

Пространством состояний НБС является множество векторов $\overline{s}(t)$, которые обозначим через S_n, где $|S_n| = p^n$. Функционирование НБС задается системами уравнений состояний и выходов

$$\overline{s}(t+1) = A(t)\overline{s}(t) + \left(\sum_{i=1}^{l} F_i(t)u_i(t)\right)\overline{s}(t) + B(t)\overline{u}(t), \tag{1}$$

$$\overline{y}(t) = C(t)\overline{s}(t) + \left(\sum_{i=1}^{l} G_i(t)u_i(t)\right)\overline{s}(t) + D(t)\overline{u}(t), \tag{2}$$

где $A(t)$, $F_i(t)$ — матрицы размерности $n \times n$; $B(t)$ — размерности $n \times l$; $C(t)$, $G_i(t)$ — размерности $m \times n$; D — размерности $m \times l$. Эти матрицы далее именуются характеристическими, а матрица $A(t)$ — главной характеристической. Элементами всех этих матриц являются элементы поля $GF(p)$. Величину n назовем размерностью НБС.

Введем следующие обозначения:

$$I(\overline{u}(t)) = \sum_{i=1}^{l} F_i(t)u_i(t), \qquad J(\overline{u}(t)) = \sum_{i=1}^{l} G_i(t)u_i(t).$$

Пусть задана входная последовательность $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \dots, \overline{u}(t)$ и пусть $\overline{s}(0)$ есть начальное состояние НБС. Тогда конечное состояние НБС и ее реакция на эту последовательность вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\overline{s}(t+1) = \left\{\prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\right\}\overline{s}(0) + \left\{\prod_{i=0}^{t-1} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\right\} B(0)\overline{u}(0) + \\ + \left\{\prod_{i=0}^{t-2} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\right\} B(1)\overline{u}(1) + \ldots + B(t)\overline{u}(t),\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\overline{y}(t) = [C(t) + J(\overline{u}(t))] \left\{\prod_{i=0}^{t-1} [A(t-i-1) + I(\overline{u}(t-i-1))]\right\}\overline{s}(0) + \\ + [C(t) + J(\overline{u}(t))] \left\{\prod_{i=0}^{t-2} [A(t-i-1) + I(\overline{u}(t-i-1))]\right\} B(0)\overline{u}(0) + \ldots \\ \ldots + [C(t) + J(\overline{u}(t))]\, B(t-1)\overline{u}(t-1) + D(t)\overline{u}(t)\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Справедливость формул (3) и (4) можно доказать методом математической индукции.

В работе рассматриваются задачи нахождения необходимых и достаточных условий существования у нестационарной билинейной дискретной системы, заданной над полем $GF(p)$, синхронизирующих, установочных и диагностических последовательностей, а также предлагаются методы их построения.

2. СИНХРОНИЗИРУЮЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Запишем определение 1 для СП $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ в терминах характеристических матриц НБС:

$$\begin{aligned} \forall\ \overline{s}_1,\ \overline{s}_2 \in S_n \qquad & \left\{\prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\right\} \overline{s}_1 + \ldots + B(t)\overline{u}(t) = \\ & = \left\{\prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\right\} \overline{s}_2 + \ldots + B(t)\overline{u}(t)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Перенеся в левую часть равенства (5) все выражения его правой части и проведя тривиальные преобразования, в результате получим

$$\forall\ \overline{s}_1,\ \overline{s}_2 \in S_n \quad \left\{\prod_{i=0}^{t}[A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\right\} (\overline{s}_1 - \overline{s}_2) = [0]\,.$$

Поскольку $\overline{s}_1$ и $\overline{s}_2$ — произвольные состояния, то и $(\overline{s}_1 - \overline{s}_2)$ может быть любым состоянием из S_n. Тогда предыдущее высказывание эквивалентно следующему:

$$\forall\ \overline{s} \in S_n \quad \left\{\prod_{i=0}^{t}[A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\right\} \overline{s} = [0]\,, \tag{6}$$

где [0] — нулевая матрица (в частном случае, вектор).

Используя (6), докажем справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Для того, чтобы входная последовательность $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ была СП для НБС, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\prod_{i=0}^{t}[A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))] = [0]\,. \tag{7}$$

Докажем необходимость равенства (7), поскольку достаточность его очевидна. Обозначим через $H = [h_{ij}]$ матрицу, представляющую собой левую часть в (7). Поскольку $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ есть СП, то для нее должно по определению выполняться (6). В силу произвольности состояния $\overline{s}$ в (6) положим его равным вектору $[1, 0, \ldots, 0]$, тогда (6) трансформируется в равенство $[h_{11}, h_{21}, \ldots, h_{nn}]' = [0]$. Из этого равенства следует, что все элементы первого столбца матрицы H являются нулевыми. Полагая далее $\overline{s}$ равным векторам $[0, 1, \ldots, 0]', \ldots, [0, 0, \ldots, 1]'$, путем аналогичных рассуждений приходим к выводу, что и все остальные столбцы матрицы H также нулевые. Таким образом, из равенства (6) следует справедливость (7).

Следующее утверждение дает простое и конструктивно проверяемое достаточное условие существования СП небольшой длины.

Предварительно введем следующее определение. Квадратная матрица именуется верхней (нижней) супертреугольной, если все ее элементы, лежащие на главной диагонали и ниже (выше), нулевые.

Теорема 2. *Если характеристические матрицы $A(t)$ и $F_i(t)$ НБС являются верхними (нижними) супертреугольными, то для этой НБС существует СП, длина которой не превышает n, где n — размерность НБС.*

Доказательство. Пусть $A(t)$ и $F_i(t)$, $i = 1, \ldots, l$ являются верхними супертреугольными. Тогда каждый сомножитель в (7) представляет собой матрицу того же типа. Условимся нумеровать диагонали этих матриц, лежащие выше главной диагонали и параллельные ей, числами $1, 2, \ldots, n-1$. Непосредственными вычислениями легко убедиться, что все элементы первой диагонали матрицы — произведения двух супертреугольных матриц равны нулю. Если эту матрицу вновь умножить на верхнюю супертреугольную матрицу, т.е. вычислить произведение трех сомножителей в (7), то в результате получится матрица, у которой нулевыми будут элементы первой и второй диагоналей. Отсюда методом индукции можно доказать, что произведение n штук верхних супертреугольных матриц даст нулевую матрицу. Тогда на основании теоремы 1 рассматриваемая НБС имеет СП, длина которой не превосходит n.

Для нижних супертреугольных матриц соответствующее утверждение доказывается аналогично.

Поскольку НБС являются частными видами автоматов Мили, для построения для них СП, УП и ДП применимы известные методы, описанные в [1], которые весьма трудоемки, поскольку базируются на использовании громоздкой конструкции дерева преемников. Ниже описываются аналитические методы построения различных типов последовательностей для НБС, менее трудоемкие, чем методы из [1].

Опишем метод построения СП. Обратимся к равенству (7) и на его основе организуем пошаговый процесс построения СП, последовательно для $t = 1, 2, \ldots$ При изменении величины t равенства (7) будут принимать следующий вид:

$$\begin{aligned} & A(0) + I(\overline{u}(t)) = [0]\,, \\ & [A(1) + I(\overline{u}(1))]\,[A(0) + I(\overline{u}(0))] = [0]\,, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & [A(t) + I(\overline{u}(t))]\,[A(t-1) + I(\overline{u}(t-1))] \cdot \ldots \cdot [A(0) + I(\overline{u}(0))] = [0]\ . \end{aligned} \tag{8}$$

Для построения СП длины 1 сформируем на основе первого матричного равенства из (8)

$$\sum_{i=1}^{l} F_i(0) u_i(0) = -A(0) \tag{9}$$

систему линейных неоднородных уравнений относительно неизвестных, являющихся координатами вектора $\overline{u}(0)$. Пусть L есть матрица, представляющая левую часть в (9). Приравнивая каждый элемент этой матрицы соответствующим элементам матрицы $-A(0)$, получим систему из n^2 уравнений относительно неизвестных $u_1(0), \ldots, u_l(0)$. Обозначим матрицу сформированной линейной системы через M.

В случае совместности этой системы возможны два случая:

$$1)\ \operatorname{rank} M = l\,; \qquad 2)\ \operatorname{rank} M < l\,.$$

В первом случае система имеет единственное решение, которое дает искомую СП. Во втором случае система имеет конечное множество решений, каждому из которых соответствует своя СП.

Если построенная система линейных уравнений окажется несовместной, то перейдем к формированию следующей системы на базе второго матричного равенства в (8). Процесс ее формирования аналогичен только что описанному.

В случае совместности системы ее решения будут давать СП длины 2. При отрицательном исходе делается попытка построения СП длины 3 и т.д.

Заметим, что в общем случае верхняя оценка длины минимальной СП равна величине $v(v-1)/2$, где v — число состояний НБС. В действительности такая оценка установлена в [1] для минимальной УП, но поскольку СП есть ее частный случай, то справедливость ее имеет место и для СП.

Заметим также, что каждому матричному равенству в (8), начиная со второго, используемому для построения СП, будет соответствовать нелинейная система уравнений. Известно, что для таких систем общих методов их решения не существует, однако в силу конечности поля $GF(p)$, над которым рассматриваются НБС, решение может быть найдено по крайней мере перебором.

Задачи синхронизации и установки автоматов — это разновидности задачи управления автоматом, которая в общем виде формулируется следующим образом: для рассматриваемого автомата найти такую входную последовательность, которая переводит его из заданного состояния $\overline{s}_1$ в заданное состояние $\overline{s}_2$. Если автомат задан графом переходов, то решение этой задачи сводится к поиску путей на графе между двумя заданными вершинами, методы решения которой известны. Однако для автоматов с большим числом состояний проблема построения графа переходов сама по себе является трудоемкой. Покажем, что для НБС может быть предложен аналитический метод решения задачи управления, не требующей наличия графа переходов.

Поиск требуемой входной последовательности осуществим следующим образом. Положим в (1) $t = 0$ и вместо $\overline{s}(0)$ подставим состояние $\overline{s}_1$, а вместо $\overline{s}(1)$ — состояние $\overline{s}_2$. Полученное матричное равенство будем рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $u_1(0), \dots, u_l(0)$. Очевидно, что если эта система совместна, то ее решению соответствует искомая входная последовательность. Если таких решений будет несколько, то это говорит о существовании нескольких путей перехода из $\overline{s}_1$ в $\overline{s}_2$, а отсутствие решений — невозможность осуществления требуемого перехода с помощью входной последовательности длины 1. В последнем случае сделаем попытку найти соответствующую последовательность длины 2, положив в (3) $t = 1$ и заменив $\overline{s}(0)$ и $\overline{s}(t+1)$ соответственно на $\overline{s}_1$ и $\overline{s}_2$. Если полученная система вновь окажется несовместной, то продолжим описанный процесс далее аналогичным образом. Если до значения $t = v - 1$ включительно, где v — число состояний НБС, все последовательно получаемые системы линейных уравнений окажутся несовместными, то это означает, что переход из $\overline{s}_1$ в $\overline{s}_2$ невозможен, поскольку, если соответствующий путь существует, то его длина не может превосходить величины $v - 1$.

3. УСТАНОВОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Условия существования таких последовательностей даются следующей теоремой.

Теорема 3. *Для того, чтобы входная последовательность $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \dots, \overline{u}(t)$ была УП для НБС, необходимо и достаточно, чтобы для каждого ненулевого состояния $\overline{s} \in S_n$ выполнялось одно из условий:*

1) $\bigvee\limits_{d=0}^{t} [C(t) + J(\overline{u}(t))] \prod\limits_{i=0}^{d-1} [A(t-i-1) + I(\overline{u}(t-i-1))]\overline{s} \neq [0]$;

2) $\prod\limits_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))] = [0]$.

Здесь и далее знак $\bigwedge\limits_{d=0}^{t}$ $\left(\bigvee\limits_{d=0}^{t}\right)$ означает дизъюнкцию (конъюнкцию) выражений, стоящих за этим знаком и полученных при изменении индекса d от 0 до t.

Условимся также в следующем: если при вычислении $I(\overline{u}(v))$ и $J(\overline{u}(v))$ окажется, что $v < 0$ при некоторых значениях i и d, то в соответствующем выражении сомножители $[A(v) + I(\overline{u}(v))]$ и $[C(v) + J(\overline{u}(v))]$ полагаются равными единичной матрице соответствующей размерности.

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

Запишем определение 2 УП $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \dots, \overline{u}(t)$ в терминах характеристических матриц НБС, используя формулы (3) и (4):

$$\forall\ s_1, \overline{s}_2 \in S_n \quad \bigwedge_{d=0}^{t} \Big\{ [C(t) + J(\overline{u}(d))] \prod_{i=0}^{d-1} [A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))]\, \overline{s}_1 + \dots$$
$$\dots + [C(t) + J(\overline{u}(d))]\, B(d-1)\overline{u}(d-1) + D\overline{u}(d) =$$
$$= [C(t) + J(\overline{u}(d))] \prod_{i=0}^{d-1} [A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))]\, \overline{s}_2 + \dots$$
$$\dots + [C(t) + J(\overline{u}(d))]\, B(d-1)\overline{u}(d-1) + D\overline{u}(d) \Big\} \to \Big\{ \prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\, \overline{s}_1 +$$
$$+ \prod_{i=0}^{t-1} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\, B(0)\overline{u}(0) + \dots + B(t)\overline{u}(t) =$$
$$= \prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\, \overline{s}_2 + \prod_{i=0}^{t-1} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\, B(0)\overline{u}(0) + \dots + B(t)\overline{u}(t) \Big\}.$$

Преобразуем каждое в отдельности равенство, стоящее до и после операции импликации, перенеся все в левые их части и осуществив соответствующие сокращения, в результате чего получим высказывание

$$\forall\ s_1, \overline{s}_2 \in S_n \quad \left[\bigwedge_{d=0}^{t} [C(t) + J(\overline{u}(d))] \prod_{i=0}^{d-1} [A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))]\, (\overline{s}_1 - \overline{s}_2) = [0] \right] \to$$
$$\to \prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\, (\overline{s}_1 - \overline{s}_2) = [0]\ .$$

Поскольку $\overline{s}_1, \overline{s}_2$ — произвольные состояния из S_n, то и $\overline{s} = \overline{s}_1 - \overline{s}_2$ также может быть любым состоянием из S_n. Отсюда следует, что последнее высказывание эквивалентно следующему:

$$\forall\ s \in S_n \quad \left[\bigwedge_{d=0}^{t} [C(t) + J(\overline{u}(d))] \prod_{i=0}^{d-1} [A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))]\, \overline{s} = [0] \right] \rightarrow$$
$$\rightarrow \prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\, \overline{s} = [0]\ .$$

Поскольку $x \rightarrow y$ эквивалентно $\overline{x} \vee y$, то последнее высказывание можно представить в виде

$$\forall\ s \in S_n \quad \left[\bigvee_{d=0}^{t} [C(t) + J(\overline{u}(d))] \prod_{i=0}^{d-1} [A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))]\, \overline{s} \neq [0] \right] \vee$$
$$\vee \prod_{i=0}^{t} [A(t-i) + I(\overline{u}(t-i))]\, \overline{s} = [0]\ .$$

Из этого высказывания и следует справедливость теоремы.

Заметим, что условие 2 в теореме 3 означает, что входная последовательность $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ является СП, представляющая собой частный случай УП. Метод построения СП был описан в предыдущем разделе.

Теперь перейдем к описанию метода построения УП при выполнении условия 1 теоремы 3. Организуем его в виде пошагового процесса, делая попытки построить УП сначала длины 1, затем длины 2 и т.д. С этой целью на основе условия 1 теоремы будем при очередном значении параметра d $(d = 0, 1, \ldots)$ выписывать однородную нелинейную систему уравнений относительно неизвестных, являющихся координатами векторов $\overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(d), \overline{s}$, полученную путем замены в упомянутом условии знака $\neq$ на знак $=$.

Поскольку для нелинейных систем общие методы их решения отсутствуют, то сведем задачу к решению некоторого конечного множества систем линейных уравнений. Это множество будет получено из исходной системы нелинейных уравнений путем подстановки в нее вместо координат неизвестных векторов $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(d)$, координат всевозможных комбинаций конкретных входных векторов от $[0, 0, \ldots, 0]$ до $[1, 1, \ldots, 1]$. Каждый раз в результате указанной подстановки будет получена система линейных однородных уравнений относительно неизвестных $s_1, \ldots, s_n$, где n — размерность рассматриваемой НБС. Если такая система имеет не единственное решение, то это означает, что для конкретной комбинации входных векторов, породивших эту систему, условие 1 теоремы не выполняется. Если же система имеет единственное решение, то это означает, что условие 1 для рассматриваемой входной последовательности выполняется и она является искомой УП.

Если очередная система, порожденная некоторой входной последовательностью, имеет только нулевое решение, то переходим к проверке для этой последовательности условия 2 теоремы.

Указанный процесс продолжается далее до тех пор, пока не будет найдена УП, либо параметр d не достигнет значения $v(v-2)/2$, где v — число состояний НБС. Если и при этом значении d (это верхняя граница длины минимальной УП) УП не найдена, то для рассматриваемой НБС ее не существует.

4. ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Условия существования такой последовательности даются следующей теоремой.

Теорема 4. *Для того, чтобы последовательность $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ была ДП для НБС, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} C(0) + J(\overline{u}(0)) \\ [C(1) + J(\overline{u}(1))]\, [A(0) + I(\overline{u}(0))] \\ \ldots \\ [C(t) + J(\overline{u}(t))] \prod_{i=0}^{t-1} [A(t-i-1) + I(\overline{u}(t-i-1))] \end{bmatrix} = n\,,$$

где n — размерность НБС.

Доказательство. Запишем определение 3 ДП $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ в терминах характеристических матриц НБС, используя формулы (3) и (4):

$$\forall\ s_1, \overline{s}_2 \in S_n \quad \bigwedge_{d=0}^{t} \Big\{ \left[C(t) + J(\overline{u}(d))\right] \prod_{i=0}^{d-1} \left[A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))\right] \overline{s}_1 + \ldots$$
$$\ldots + \left[C(t) + J(\overline{u}(d))\right] B(d-1)\overline{u}(d-1) + D(d)\overline{u}(d) =$$
$$= \left[C(t) + J(\overline{u}(d))\right] \prod_{i=0}^{d-1} \left[A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))\right] \overline{s}_2 + \ldots$$
$$\ldots + \left[C(t) + J(\overline{u}(d))\right] B(d-1)\overline{u}(d-1) + D(d)\overline{u}(d) \Big\} \to \overline{s}_1 = \overline{s}_2\,.$$

Выполнив преобразование этого выражения так же, как это было сделано в теореме 3, получим высказывание

$$\forall\ s_1, \overline{s}_2 \in S_n \quad \left[\bigwedge_{d=0}^{t} \Big\{ [C(t) + J(\overline{u}(d))\right] \prod_{i=0}^{d-1} [A(d-i-1) + I(\overline{u}(d-i-1))(\overline{s}_1 - \overline{s}_2) \to \overline{s}_1 = \overline{s}_2\,.$$

Если последовательность $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ является для НБС диагностической, то это означает, что знание реакции НБС на нее позволяет однозначно найти ее начальное состояние. Реакции НБС, используя (4), можно представить в следующем виде:

$$\overline{y}(0) = \left[C(0) + J(\overline{u}(0))\right] \overline{s}(0) + D(0)\overline{u}(0),$$
$$\overline{y}(1) = \left[C(1) + J(\overline{u}(1))\right] \left[A(0) + I(\overline{u}(0))\right] \overline{s}(0) + \left[C(1) + J(\overline{u}(1))\right] B(0)\overline{u}(0) + D(1)\overline{u}(1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{y}(t) = \left[C(t) + J(\overline{u}(t))\right] \prod_{i=0}^{t-1} \left[A(t-i-1) + I(\overline{u}(t-i-1))\right] \overline{s}(0) + \ldots + D(t)\overline{u}(t)\,.$$

Поскольку входная последовательность $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ и реакция НБС на нее известны, то выписанные равенства можно представить так:

$$\left[C(0) + J(\overline{u}(0))\right] \overline{s}(0) = \Phi_0(\overline{u}(0))\,,$$
$$\left[C(1) + J(\overline{u}(1))\right] \left[A(0) + I(\overline{u}(0))\right] \overline{s}(0) = \Phi_1(\overline{u}(0), \overline{u}(1))\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left[C(t) + J(\overline{u}(t))\right] \prod_{i=0}^{t-1} \left[A(t-i-1) + I(\overline{u}(t-i-1))\right] \overline{s}(0) = \Phi_t(\overline{u}(0), \ldots, \overline{u}(t))\,,$$

где $\Phi_i(\overline{u}(0), \ldots, \overline{u}(i))$, $i = 0, 1, \ldots, t$, — некоторые значения из поля $GF(p)$. Выписанные равенства будем интерпретировать как системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $s_1(0), \ldots, s_n(0)$, являющихся координатами вектора-состояния $\overline{s}(0)$. Однозначность восстановления начального состояния $\overline{s}(0)$ по наблюдаемым реакциям $\overline{y}(0), \overline{y}(1), \ldots, \overline{y}(t)$ при известной входной последовательности $\overline{u}(0), \overline{u}(1), \ldots, \overline{u}(t)$ означает, что представленная система должна иметь единственное решение. Из [4] известно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы ранг этой системы был равен числу ее неизвестных. Отсюда и следует справедливость теоремы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из изложенного, специфика НБС, во-первых, дает возможность получить легко проверяемые критерии существования рассматриваемых выше типов последовательностей для реализации соответствующих экспериментов и, во-вторых, предложить эффективные методы их построения, сводящиеся к решению систем линейных алгебраических уравнений.

Библиографический список

1. *Гилл А.* Введение в теорию конечных автоматов. М.: Наука, 1966.

2. *Сперанский Д.В.* Установочные и диагностические последовательности для линейных автоматов// Автоматика и телемеханика. 1997. №5. С. 133–141.

3. *Сперанский Д.В., Сперанский И.Д.* Эксперименты с билинейными дискретными системами// Автоматика и телемеханика. 2000. № 6. С. 176–189.

4. *Курош А.А.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1976.