Шаг 4. Повторяя рассуждения, аналогичные рассуждениям в пункте В) шага 2 и в шаге 3, получаем при $q > l$

$$\left|S_{K_{q+1}}(g)\right| = \left|\sum_{k=0}^{K_{q+1}} X_k(g)\right| = \begin{cases} 2^{K_{q+1}-K_l-(m_l+\ldots+m_q)}|a|, & \text{если } \ g \in V_{K_{q+1}} \ \text{ и } \ V_{K_{q+1}} \bigcap E \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \ g \in V_{K_{q+1}} \ \text{ и } \ V_{K_{q+1}} \bigcap E = \emptyset. \end{cases}$$

Видно, что полученный таким образом ряд вида (7) сходится к нулю всюду на $\mathbb{Z}_2$ вне E и расходится во всех точках множества E.

В случае конечного множества I, когда все k_l исчерпаны, дальнейшие шаги описываются следующим образом.

Пусть $k_l \in I$ и для любого $j \in \mathbb{N} \quad k_l + j \notin I$, тогда полагаем

$$X_{k_l+j+1}(g) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ S_{k_l+j}(g) = 0, \\ -S_{k_l+j}(g), & \text{если } \ g \in V_{k_l+j+1} \ \text{ и } \ V_{k_l+j+1} \bigcap E = \emptyset, \\ S_{k_l+j}(g), & \text{если } \ g \in V_{k_l+j+1} \ \text{ и } \ V_{k_l+j+1} \bigcap E \neq \emptyset. \end{cases}$$

При этом $$|S_{k_l+j+1}(g)| = \left|\sum_{k=0}^{k_l+j+1} X_k(g)\right| = \begin{cases} 2^j \left|S_{k_l}\right|, & \text{если } \ g \in V_{k_l+j+1} \ \text{ и } \ V_{k_l+j+1} \bigcap E \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \ g \in V_{k_l+j+1} \ \text{ и } \ V_{k_l+j+1} \bigcap E = \emptyset. \end{cases}$$

Аналогично 2) доказывается 3).

Работа поддержана грантом Президента РФ для государственной поддержки коллективов ведущих научных школ (*проект* НШ-2970.2008.1).

Библиографический список

1. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.

2. *Морева Н.С.* О единственности кратных рядов Уолша для сходимости по двоичным кубам // Мат. заметки. 2007. Т. 81(4). С. 586–598.

УДК 517.5

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

Э.Ш. Султанов

Дагестанский научный центр РАН, Махачкала
Отдел математики и информатики
E-mail: math.dag@mail.ru

В настоящей работе исследуются асимптотические свойства полиномов Чебышева $T_n(x, N)$ $(0 \leq n \leq N - 1)$, ортогональных на равномерной сетке $\Omega_N = \{0, 1, \ldots, N - 1\}$ с постоянным весом $\mu(x) = \frac{2}{N}$ (дискретный аналог полиномов Лежандра) при $n = O(N^{\frac{1}{2}})$, $N \to \infty$. Установлена асимптотическая формула, связывающая полиномы $T_n(x, N)$ с полиномами Лежандра $P_n(t)$ для $x = \frac{N}{2}(1 + t) - \frac{1}{2}$, для остаточного члена которой получена равномерная относительно $t \in [-1, 1]$ оценка, которая, в свою очередь, позволяет доказать неулучшаемую весовую оценку для полиномов Чебышева $T_n(x, N)$.

Ключевые слова: ортогональные многочлены, асимптотика.

About Asymptotics of Chebyshev Polynomials Orthogonal on an Uniform Net

E.Sh. Sultanov

Dagestan Center of Science RAN,
Department of Mathematics and Informatics
E-mail: math.dag@mail.ru

In this article asymptotic properties of the Chebyshev polynomials $T_n(x, N)$ $(0 \leq n \leq N - 1)$ orthogonal on an uniform net $\Omega_N = \{0, 1, \ldots, N - 1\}$ with the constant weight $\mu(x) = \frac{2}{N}$ (discrete analog of the Legendre polynomials) by $n = O(N^{\frac{1}{2}})$, $N \to \infty$ were researched. The asymptotic formula that is relating polynomials $T_n(x, N)$ with Legendre polynomials $P_n(t)$ for $x = \frac{N}{2}(1 + t) - \frac{1}{2}$ was determined. The uniform estimation of remainder term of the formula relative to $t \in [-1, 1]$, that in turn allows to prove unimprovable estimation of Chebyshev polynomials $T_n(x, N)$, was obtained.

Key words: orthogonal polynomials, asymptotics.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть N — натуральное число, $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$,

$$T_n(x) = T_n(x,N) = \frac{1}{n!(N-1)^{[n]}}\Delta^n\left\{(x-N)^{[n]}x^{[n]}\right\} \qquad (0 \le n \le N-1), \tag{1}$$

где здесь и далее $a^{[0]} = 1, a^{[n]} = a(a-1)\dots(a-n+1)$, Δ^n — оператор конечной разности порядка n с единичным шагом. Как было показано впервые П.Л. Чебышевым в работе [1] (см. также [2, 3]), равенство (1) определяет для каждого $n\,(0 \le n \le N-1)$ алгебраический многочлен $T_n(x)$ степени n, а в совокупности $T_0(x), \dots, T_{N-1}(x)$ образуют ортогональную систему на Ω_N, точнее,

$$\frac{2}{N}\sum_{x\in\Omega_N} T_n(x,N)T_m(x,N) = h_{n,N}\delta_{nm}, \tag{2}$$

где

$$h_{n,N} = \frac{2}{2n+1}\frac{(N+n)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}}. \tag{3}$$

Многочлены (1) представляют собой дискретный аналог классических полиномов Лежандра

$$P_n(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left\{(1-t^2)^n\right\}^{(n)},$$

образующих ортогональную систему в следующем смысле [2]: $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)\,dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$.

Ставится задача об исследовании асимптотической связи между полиномами Чебышева $T_n(x,N)$ и полиномами Лежандра $P_n(t)$ при $n, N \to \infty$. Нам будет удобно рассмотреть поставленную задачу для ортонормированных полиномов Чебышева

$$\tau_n(x,N) = T_n(x,N)\left\{h_{n,N}\right\}^{-1/2}, \tag{4}$$

сопоставляя их с ортонормированными полиномами Лежандра

$$\hat{P}_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(t). \tag{5}$$

Для

$$x = \frac{N-1}{2}(1+t) \tag{6}$$

в работах И.И.Шарапудинова [4–6], в частности, была установлена следующая асимптотическая формула

$$\tau_{n,N}(t) = \tau_n\left(\frac{N-1}{2}(1+t), N\right) = \hat{P}_n(t) + v_{n,N}(t), \tag{7}$$

в которой для остаточного члена $v_{n,N}(t)$ при $1 \le n \le aN^{1/2}$ получена оценка

$$|v_{n,N}(t)| \le c(a)\frac{n}{\sqrt{N}}\left[(1-t^2)^{1/2} + \frac{1}{n}\right]^{-1/2},$$

где здесь и далее через $c, c(\alpha), c(\alpha,\beta), \dots, c(\alpha,\beta,\dots,\gamma)$ обозначаются положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах. Если мы введем замену переменной $t = \cos\theta$, то эта оценка приобретает следующий вид:

$$|v_{n,N}(\cos\theta)| \le c(a)\frac{n}{\sqrt{N}}\left[\sin\theta + \frac{1}{n}\right]^{-1/2} \le c(a)\frac{n}{\sqrt{N}}\begin{cases}\theta^{-1/2}, & \text{если } n^{-1} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\\ n^{1/2}, & \text{если } 0 \le \theta \le n^{-1}.\end{cases} \tag{8}$$

Следует также отметить, что при соблюдении условий $-1 < t < 1$ и $0 \le n \le N-1$ была установлена следующая асимптотическая формула [3, гл. 3, § 3.8, теорема 3.8.2]:

$$\frac{(N-1)^{[n]}}{N^n}T_n\left(\frac{N}{2}(1+t), N\right) = P_n\left(t + \frac{1}{N}\right) + w_{n,N}(t), \tag{9}$$

для остаточного члена $w_{n,N}(t)$ которой справедлива оценка

$$|w_{n,N}(t)| \le \frac{(6+2\sqrt{2})^2 e^{2/3}}{(n+1)^{1/2}} \left(\frac{n}{N}\right)^2 (1-t)^{-5/4} \exp\left(\frac{n(6+2\sqrt{2})e^{1/3}}{N(1-t^2)^{1/2}}\right) +$$

$$+\frac{n^4 e(6+2\sqrt{2})}{N^2(n+1)^{1/2}}(1-t^2)^{-1/4}\lambda^2 \exp(\lambda \frac{n^2}{N}\sqrt{e}(2+\sqrt{2})), \tag{10}$$

где $\lambda = (1+t)^{-1/2} + (1-t)^{-1/2} + \frac{2(2+\sqrt{2})}{(1-t^2)^{1/2}\ln 2}$.

Заметим, что в асимптотической формуле (9) переменные t и x связаны между собой равенством

$$x = \frac{N}{2}(1+t) - \frac{1}{2}, \tag{11}$$

при этом оценка (10) для ее остаточного члена $w_{n,N}(t)$ ухудшается при стремлении переменной t к 1 и -1. Вопрос о получении оценки остаточного члена формулы (9), справедливой на всем отрезке $[-1,1]$, оставался открытым. В настоящей работе предпринята попытка восполнить этот пробел. При этом будет удобно вести изложение в терминах соответствующих ортонормированных полиномов. С этой целью положим

$$\tilde{\tau}_{n,N}(t) = \tau_n(x,N), \tag{12}$$

где связь между x и t определяется равенством (11).

Для формулировки и доказательства основного результата настоящей работы нам понадобится интегральный аналог известного неравенства типа Маркова об оценке производной алгебраического полинома, который имеет следующий вид. Для произвольного целого $m \ge 1$ найдется положительное число $c = c(m)$, зависящее лишь от m, что для произвольного алгебраического полинома $q_n(x)$ степени n справедливо следующее неравенство:

$$\int_{-1}^{1} |q_n^{(m)}(t)|\,dt \le c(m)n^{2m} \int_{-1}^{1} |q_n(t)|\,dt. \tag{13}$$

Обозначим через $\varkappa(m)$ нижнюю грань чисел $c(m)$, для которых справедливо неравенство (13). Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Пусть $b = 8\varkappa(2)$, $0 < a < b^{-\frac{1}{4}}$. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\tilde{\tau}_{n,N}(t) = \hat{P}_n(t) + r_{n,N}(t), \tag{14}$$

в которой для остаточного члена $r_{n,N}(t)$ при $1 \le n \le aN^{1/2}$, $q > 0$ справедлива оценка

$$|r_{n,N}(\cos\theta)| \le c(q)\frac{n^{\frac{5}{2}}}{N}\left(\frac{1}{1-\frac{bn^4}{N^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \begin{cases} \theta^{-1/2}, & \text{если } qn^{-1} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \\ n^{\frac{1}{2}}, & \text{если } 0 \le \theta \le qn^{-1}. \end{cases} \tag{15}$$

Замечание. Сопоставляя (8) и (15), нетрудно заметить, что если $\frac{n^3}{N} \to 0$, то правая часть оценки (15) стремится к нулю в $\sqrt{\frac{n^3}{N}}$ раз быстрее, чем правая часть оценки (8), в то время как при $\frac{n^3}{N} \to \infty$ максимальное по $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ значение правой части оценки (15) стремится к бесконечности в $\sqrt{\frac{n^3}{N}}$ раз быстрее, чем аналогичное значение правой части оценки (8).

При доказательстве этой теоремы нам понадобятся некоторые результаты из теории полиномов Лежандра $P_n(t)$ и Чебышева $T_n(x,N)$.

1. НЕКОТОРЫЕ ДАЛЬНЕЙШИЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ ЧЕБЫШЕВА $T_n(x,N)$ И ЛЕЖАНДРА $P_n(t)$

Следующие свойства полиномов Чебышева $T_n(x,N)$ и Лежандра $P_n(t)$ хорошо известны [2, 3]:
явный вид

$$T_n(x,N) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n^{[k]}(n+1)_k x^{[k]}}{(k!)^2(N-1)^{[k]}}, \tag{16}$$

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (n+1)_k}{(k!)^2} \left(\frac{1-t}{2} \right)^k, \tag{17}$$

где $(z)_l$ — символ Похгаммера,

симметрия

$$T_n(x, N) = (-1)^n T_n(N-1-x, N), \quad P_n(t) = (-1)^n P_n(-t).$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Начнем с оценки интеграла

$$\int_{-1}^{1} (r_{n,N}(t))^2\, dt = \int_{-1}^{1} (\tilde{\tau}_{n,N}(t))^2\, dt + \int_{-1}^{1} (\hat{P}_n(t))^2 dt - 2 \int_{-1}^{1} \tilde{\tau}_{n,N}(t) \hat{P}_n(t)\, dt = I_1 + I_2 - I_3. \tag{18}$$

Очевидно, что $I_2 = 1$, поэтому остановимся на оценках для I_1 и I_3. Рассмотрим сначала

$$I_3 = 2 \int_{-1}^{1} \tilde{\tau}_{n,N}(t) \hat{P}_n(t)\, dt. \tag{19}$$

Если мы воспользуемся свойством ортонормированности полиномов Лежандра $\hat{P}_n(t)$, то из (19) выводим

$$I_3 = 2 \frac{\tilde{k}_{n,N}}{\hat{k}_n}, \tag{20}$$

где $\tilde{k}_{n,N}$ и $\hat{k}_n$ — старшие коэффициенты полиномов $\tilde{\tau}_{n,N}(t)$ и $\hat{P}_n(t)$ соответственно. Найдем явные выражения для $\tilde{k}_{n,N}$ и $\hat{k}_n$. С этой целью обратимся к явным видам полиномов Чебышева $T_n(x, N)$ и Лежандра $P_n(t)$. Из явного вида (16) и равенств (4), (11) и (12) можем записать

$$\tilde{\tau}_{n,N}(t) = \{h_{n,N}\}^{-1/2}\, T_n \left[\frac{N}{2}(1+t) - \frac{1}{2}, N \right] = \{h_{n,N}\}^{-1/2} \frac{(n+1)_n N^n}{n!(N-1)^{[n]} 2^n} t^n + \ldots$$

Отсюда мы замечаем, что старший коэффициент $\tilde{k}_{n,N}$ полинома $\tilde{\tau}_{n,N}(t)$ равен

$$\tilde{k}_{n,N} = \{h_{n,N}\}^{-1/2} \frac{(n+1)_n N^n}{n!(N-1)^{[n]} 2^n}. \tag{21}$$

Аналогично, из (17) и (5) находим старший коэффициент полинома $\hat{P}_n(t)$:

$$\hat{k}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(n+1)_n}{n! 2^n}. \tag{22}$$

Из (20)–(22) получим значение интеграла $I_3 = 2 \left\{ \frac{2}{(2n+1) h_{n,N}} \right\}^{1/2} \frac{N^n}{(N-1)^{[n]}}$. Отсюда и из (3) имеем:

$$I_3 = 2 \frac{N^n}{\left\{ (N+n)^{[n]} (N-1)^{[n]} \right\}^{1/2}} = 2 \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{N^2}{(N+k)(N-k)} \right]^{1/2}. \tag{23}$$

Рассмотрим общий член произведения в правой части равенства (23):

$$\frac{N^2}{(N+k)(N-k)} = \frac{N^2}{N^2 - k^2} = 1 + \frac{k^2}{N^2 - k^2} > 1. \tag{24}$$

Из (23) и (24) получим оценку снизу для интеграла I_3: $I_3 > 2$.

Теперь оценим интеграл I_1. Разобьем отрезок $[-1, 1]$ на части точками $t_j = -1 + \frac{2j}{N}$, $j = 0, \ldots, N$. Тогда точки $\tilde{t}_j = -1 + \frac{2j+1}{N}$ будут серединами отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ при $j = 0, \ldots, N-1$. Формула Тейлора для функции $f(t) = \{\tilde{\tau}_{n,N}(t)\}^2$ относительно точек $\tilde{t}_j$ с остаточным членом в интегральной форме имеет следующий вид:

$$f(t) = f(\tilde{t}_j) + f'(\tilde{t}_j)(t - \tilde{t}_j) + \int\limits_{\tilde{t}_j}^{t} f''(x)(t - x)\, dx. \tag{25}$$

Проинтегрировав обе части равенства (25) по отрезку $[t_j, t_{j+1}]$, получим

$$J_j = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)\, dt = f(\tilde{t}_j)(t_{j+1} - t_j) + f'(\tilde{t}_j) \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (t - \tilde{t}_j)\, dt + \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} dt \int\limits_{\tilde{t}_j}^{t} f''(x)(t - x)\, dx.$$

Первый из интегралов в правой части этого равенства обращается в ноль, поэтому

$$J_j = f(\tilde{t}_j)(t_{j+1} - t_j) + \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} dt \int\limits_{\tilde{t}_j}^{t} f''(x)(t - x)\, dx =$$

$$= f(\tilde{t}_j)(t_{j+1} - t_j) + \int\limits_{t_j}^{\tilde{t}_j} dt \int\limits_{\tilde{t}_j}^{t} f''(x)(t - x)\, dx + \int\limits_{\tilde{t}_j}^{t_{j+1}} dt \int\limits_{\tilde{t}_j}^{t} f''(x)(t - x)\, dx =$$

$$= f(\tilde{t}_j)(t_{j+1} - t_j) - \int\limits_{t_j}^{\tilde{t}_j} dt \int\limits_{t}^{\tilde{t}_j} f''(x)(t - x)\, dx + \int\limits_{\tilde{t}_j}^{t_{j+1}} dt \int\limits_{\tilde{t}_j}^{t} f''(x)(t - x)\, dx =$$

$$= f(\tilde{t}_j)(t_{j+1} - t_j) - \int\limits_{t_j}^{\tilde{t}_j} f''(x)\, dx \int\limits_{t_j}^{x} (t - x)\, dt + \int\limits_{\tilde{t}_j}^{t_{j+1}} f''(x)\, dx \int\limits_{x}^{t_{j+1}} (t - x)\, dt = f(\tilde{t}_j)(t_{j+1} - t_j) + r_j(f), \tag{26}$$

где

$$r_j(f) = \frac{1}{2} \left[\int\limits_{t_j}^{\tilde{t}_j} f''(x)(x - t_j)^2 dx + \int\limits_{\tilde{t}_j}^{t_{j+1}} f''(x)(t_{j+1} - x)^2 dx \right]. \tag{27}$$

Тогда, поскольку $t_{j+1} - t_j = \frac{2}{N}$ для любого $j = 0, \ldots, N-1$, то из (26) и (27) выводим

$$J_j = \frac{2}{N} f(\tilde{t}_j) + r_j(f), \qquad |r_j(f)| \le \frac{1}{2N^2} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} |f''(x)|\, dx.$$

Отсюда

$$\int\limits_{-1}^{1} f(t)\, dt = \sum_{j=0}^{N-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)\, dt = \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{2}{N} f(\tilde{t}_j) + r_j(f) \right] = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(\tilde{t}_j) + r(f),$$

где $|r(f)| = \left| \sum\limits_{j=0}^{N-1} r_j(f) \right| \le \frac{1}{2N^2} \int\limits_{-1}^{1} |f''(t)|\, dt$. Таким образом,

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} \{\tilde{\tau}_{n,N}(t)\}^2\, dt = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{\tilde{\tau}_{n,N}(\tilde{t}_j)\right\}^2 + r(n, N), \tag{28}$$

причем

$$|r(n, N)| \le \frac{1}{2N^2} \int\limits_{-1}^{1} \left| \left[\{\tilde{\tau}_{n,N}(t)\}^2 \right]'' \right| dt. \tag{29}$$

Из (2), (11) и (12) имеем $\frac{2}{N}\sum\limits_{j=0}^{N-1}\left\{\tilde{\tau}_{n,N}(\tilde{t}_j)\right\}^2 = 1$. Поэтому равенство (18) можно переписать в следующем виде:

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} \{\tilde{\tau}_{n,N}(t)\}^2\, dt = 1 + r(n,N). \tag{30}$$

Чтобы оценить сверху остаточный член $r(n,N)$, мы обратимся к неравенству (13) типа Маркова [7] об оценке интеграла от производных алгебраического полинома $q_n(x)$. Воспользуемся неравенством (13) при $m=2$. Тогда, учитывая (13) и (29), находим

$$r(n,N) \le \frac{1}{2N^2}\int\limits_{-1}^{1}\left|\left[\{\tilde{\tau}_{n,N}(t)\}^2\right]''\right| dt \le \frac{bn^4}{N^2}\int\limits_{-1}^{1}\{\tilde{\tau}_{n,N}(t)\}^2\, dt = \frac{bn^4}{N^2} I_1, \tag{31}$$

где $b = 8\varkappa(2)$. Из (30) и (31) имеем $I_1 \le \dfrac{1}{1-\frac{bn^4}{N^2}} = 1 + \dfrac{\frac{bn^4}{N^2}}{1-\frac{bn^4}{N^2}}$. В результате, оценка интеграла (18) примет следующий вид:

$$\int\limits_{-1}^{1}(r_{n,N}(t))^2\, dt \le 1 + \frac{\frac{bn^4}{N^2}}{1-\frac{bn^4}{N^2}} + 1 - 2 = b\frac{n^4}{N^2}\frac{1}{1-\frac{bn^4}{N^2}}. \tag{32}$$

Как известно [2, гл. 7, § 7.71, теорема 7.71.2], для произвольного алгебраического многочлена $q_n(x)$, удовлетворяющего условию $\int\limits_{-1}^{1}|q_n(x)|^2dx \le A$, имеет место следующее неравенство:

$$|q_n(\cos\theta)| \le c(q)A^{1/2}\begin{cases}\theta^{-1/2}n^{1/2}, & \text{если}\ \ qn^{-1}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\\ n, & \text{если}\ \ 0\le\theta\le qn^{-1},\end{cases} \tag{33}$$

где $q>0$. Тогда из (32) и (33) получим

$$|\tilde{\tau}_{n,N}(\cos\theta) - \hat{P}_n(\cos\theta)| \le c(q)\frac{n^2}{N}\left(\frac{1}{1-\frac{bn^4}{N^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\begin{cases}\theta^{-1/2}n^{1/2}, & \text{если}\ \ qn^{-1}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\\ n, & \text{если}\ \ 0\le\theta\le qn^{-1},\end{cases}$$

где $q>0$. Теорема доказана.

Выражаю благодарность научному руководителю И.И. Шарапудинову за поставленную задачу и помощь в работе, а также рецензенту за полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 07-01-00143а).

Библиографический список

1. *Чебышев П.Л.* Об интерполировании величин равноотстоящих (1875) // Полн. собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1948. Т. 3. С. 66–87.

2. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

3. *Шарапудинов И.И.* Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения. Махачкала: Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997.

4. *Шарапудинов И.И.* Асимптотические свойства ортогональных многочленов Хана дискретной переменной // Мат. сб. 1989. Т. 180, вып. 9. С. 1259–1277.

5. *Шарапудинов И.И.* Некоторые вопросы теории ортогональных систем. Докторская диссертация. М.: МИ им. В.А.Стеклова АН, 1991.

6. *Шарапудинов И.И.* Об асимптотике многочленов Чебышева, ортогональных на конечной системе точек // Вестн. Моск. ун-та. 1992. Сер. 1, вып. 1. С. 29–35.

7. *Даугавет И.К., Рафальсон С.З.* Некоторые неравенства типа Маркова – Никольского для алгебраических многочленов // Вестн. Ленингр. ун-та. 1972. № 19, вып. 4. С. 18–24.