УДК 517.51

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

В. Г. Тимофеев

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: shprotby@gmail.com

Статья посвящена изучению специального отображения, связанного со структурой экстремальных функций в точных неравенствах Колмогорова на полуоси в равномерной метрике.

Ключевые слова: экстремальный сплайн, неравенства Колмогорова.

On One Special Mapping

V. G. Timofeev

Saratov State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: shprotby@gmail.com

The paper deals with the study of a special mapping in connection with the structure of extremal functions in exact Kolmogorov inequalities on the half-line in the uniform metrics.

Key words: extremal spline, Kolmogorov inequalities.

Пусть $C_n[0,\infty)$ — множество функций $x(t)$, непрерывных на $[0,\infty)$ вместе с производными $(n-1)$-го порядка включительно, таких что: 1) $\sup\limits_{0\le t<\infty}|x(t)|<\infty$; 2) $x^{(n-1)}(t)$ удовлетворяет на $[0,\infty)$ условию Липшица первого порядка.

Очевидно, что для всякой функции $x(t)\in C_n[0,\infty)$ существует почти всюду на $[0,\infty)$ производная n-го порядка, для которой $\sup\limits_{0\le t<\infty}|x^{(n)}(t)|<\infty$.

Положим $\sup\limits_{0\le t<\infty}|g(t)|=\|g\|$. Это обозначение сохраним и в том случае, когда $g(t)$ определена лишь почти всюду на $[0,\infty)$. Обозначим через $U_n=U_n[0,\infty)$ множество функций из $C_n[0,\infty)$, для которых $\|x\|\le 1$, $\|x^{(n)}\|\le n!$. Из [1] вытекает, что

$$\mu_{nk}=\sup_{x\in U_n}\|x^{(k)}\|<\infty,\qquad \|x^{(k)}\|\le\frac{\mu_{nk}}{\left(\sqrt[n]{n!}\right)^{k}}\|x\|^{\frac{n-k}{n}}\|x^{(n)}\|^{\frac{k}{n}},\qquad k=\overline{1,n-1}. \tag{1}$$

Отметим, что неравенства (1) точные.

Представляемая работа посвящена построению одного специального отображения, связанного со структурой экстремальных функций для неравенств (1), известных как неравенства типа Колмогорова об оценках норм промежуточных производных через норму функции и норму старших производных в равномерной метрике на полуоси.

Подобные вопросы часто возникают при решении экстремальных задач типа Ландау, Харди, Турана и т. п.

Отметим, что для $n=4$ задача о структуре экстремального сплайна в (1) полностью решена Н.П. Купцовым; для $n=5$ аналогичные исследования проведены автором в работе [2].

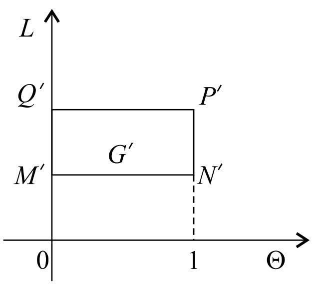

Рис. 1

При дальнейшем изложении считаем $n=6$. Пусть G' — открытый прямоугольник в плоскости координат Θ и L, определенный неравенствами $0<\Theta<1$, $1<L<2/\sqrt[6]{61}$ (рис. 1).

Рассмотрим отображение замкнутого прямоугольника $\overline{G}'$, задаваемое формулами

$$\begin{cases} x=\dfrac{L^6(2\Theta^6-6\Theta^5+10\Theta^3-3)+2}{L^5},\\[2mm] y=\dfrac{-10-L^6(10\Theta^6-30\Theta^5+30\Theta^3-5)}{2L^4}. \end{cases} \tag{2}$$

Открытая область G, являющаяся образом G' при указанном отображении, схематически изображена на рис. 2.

Убедимся, что отображение $\overline{G}'$ на $\overline{G}$ взаимнооднозначное. При $0 < \Theta < 1$ и $1 \le L \le 2/\sqrt[6]{61}$ определим знаки частных производных $\partial x/\partial\Theta$, $\partial x/\partial L$:

$$\frac{\partial x}{\partial \Theta} = L(12\Theta^5 - 30\Theta^4 + 30\Theta^2) = \\ = 6L\Theta^2(2\Theta^3 + 5(1-\Theta^2)) > 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial L} = 2\Theta^6 - 6\Theta^5 + 10\Theta^3 - 3 - \frac{10}{L^6} = \\ = 2\Theta^3(\Theta^3 + 2 + 3(1-\Theta^2)) - 3 - \frac{10}{L^6} < 0.$$

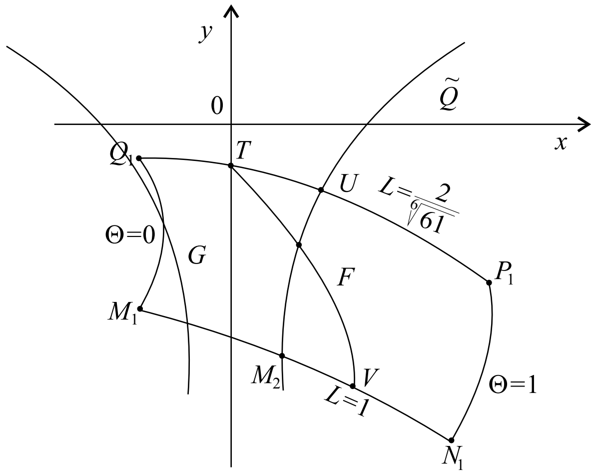

Рис. 2

Отсюда следует, что каждая из сторон прямоугольника $\overline{G}'$ отображается на соответствующие участки границы $\overline{G}$ взаимнооднозначно. Очевидно, что параметры L и Θ можно рассматривать как криволинейные координаты на поверхности, задаваемой формулами (2), поскольку Якобиан

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\Theta,L)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \Theta} & \dfrac{\partial x}{\partial L} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \Theta} & \dfrac{\partial y}{\partial L} \end{vmatrix} = 15L^2\Theta^2\Big(-4\Theta^9 + 22\Theta^8 - 30\Theta^7 - 18\Theta^6 + 52\Theta^5 - \\ -32\Theta^3 + 5\Theta^2 + 1 - \frac{4\Theta^3}{L^6} + \frac{10\Theta^2}{L^6} + \frac{10}{L^6}\Big) > 0$$

при $0 < \Theta < 1$ и $1 \le L \le 2/\sqrt[6]{61}$.

Рассмотрим в плоскости XOY криволинейный четырехугольник $M_1Q_1P_1N_1$. Укажем важные для дальнейшего линии и точки этого четырехугольника: TV — кривая, соответствующая $\Theta = 1/2$, кривая UM_2 симметрична относительно оси OY границе области M_1Q_1, U — точка пересечения кривых Q_1P_1 и $\tilde{Q}M_2$, F — точка пересечения кривых VT и UM_2.

Обозначим через K преобразование поверхности $\overline{G}$, ставящее в соответствие точке $a(\Theta, L)$ точку $Ka(1-\Theta, L)$, а через S — преобразование области $\overline{G}$, ставящее в соответствие точке $A(x,y)$ точку $SA(-x,y)$. Очевидно, что преобразование K не выводило точки за пределы области $\overline{G}$, а S — может вывести преобразуемую точку за ее пределы.

Сформулируем основные свойства рассматриваемых отображений K и S.

Теорема 1. *Найдется по крайней мере одна точка z_0, принадлежащая дуге UM_2, параметрическое уравнение которой имеет вид*

$$\begin{cases} x = \dfrac{3\alpha^6 - 2}{\alpha^5}, \\ y = \dfrac{5\alpha^6 - 10}{2\alpha^4}, \end{cases} \qquad \alpha \in \left[1, \frac{2}{\sqrt[6]{61}}\right], \tag{3}$$

обладающая свойством $(SK)^n z_0 \in G$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть J_1 и J_2 — два множества открытой дуги UM_2 таких, что J_1 (соответственно J_2) состоит из точек дуги, обладающих свойством: существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $(SK)^{n-1}z \in \overline{G}$, а $(SK)^n z \notin \overline{G}$, причем $(SK)^n z$ принадлежит левой (соответственно правой) полуплоскости. Множества J_1 и J_2 не пусты, поскольку J_1 содержит все точки дуги FM_2, а J_2 содержит все точки той же дуги, близкие к U.

Из непрерывности преобразований K и S вытекает, что J_1 и J_2 — открыты по отношению к дуге UM_2. Поскольку $J_1 \cap J_2 = \varnothing$, J_1 и J_2 не пусты, то они не могут исчерпать всю дугу UM_2. Отсюда следует нужное утверждение. □

Замечание. 1. В дальнейшем будем обозначать через α_0 значение параметра α, соответствующее точке z_0.

2. В области G точке z_0 будет соответствовать единственная точка с координатами:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3\alpha_0^6 - 2}{\alpha_0^5}, \\ y = \dfrac{-10 + 5\alpha_0^6}{2\alpha_0^4}. \end{cases}$$

3. Точка z_0 будет играть важную роль в теореме 5 при построении экстремальных функций для неравенств (1).

Теорема 2. *Для всякой точки $z \neq T$ замкнутого четырехугольника Q_1TVM_1, состоящего из точек области $\overline{G}$, криволинейные координаты Θ и L которых удовлетворяют неравенствам $0 \le \Theta \le 1/2$, $1 \le L \le 2/\sqrt[6]{61}$, существует $n \in \mathbb{N}$, что $(SK)^n z \notin \overline{G}$.*

Доказательство. От противного. Пусть существует $\tilde{z} \neq T \in Q_1TVM_1$ такая, что $(SK)^n \tilde{z} \in Q_1TVM_1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Обозначим криволинейные координаты точки $(SK)^n \tilde{z}$ через Θ_n и L_n. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{-2 - L_n^6(2(1-\Theta_n)^6 - 6(1-\Theta_n)^5 + 10(1-\Theta_n)^3 - 3)}{L_n^5} = \\ = \dfrac{L_{n+1}^6(2\Theta_{n+1}^6 - 6\Theta_{n+1}^5 + 10\Theta_{n+1}^3 - 3) + 2}{L_{n+1}^5}, \\ \dfrac{-10 - L_n^6(10(1-\Theta_n)^6 - 30(1-\Theta_n)^5 + 30(1-\Theta_n)^3 - 5)}{2L_n^4} = \\ = \dfrac{-10 - L_{n+1}^6(10\Theta_{n+1}^6 - 30\Theta_{n+1}^5 + 30\Theta_{n+1}^3 - 5)}{2L_{n+1}^4}. \end{cases} \tag{4}$$

Из построения отображений K и S (см. рис. 2) следует, что $L_{n+1} < L_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = L$. Выберем последовательность $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$, чтобы существовали пределы $\lim\limits_{k\to\infty} \Theta_{n_k} = \Theta_1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \Theta_{n_k+1} = \Theta_2$. Это всегда возможно сделать. Переходя в (4) к пределу, из второго соотношения получим равенство

$$10(1-\Theta_1)^6 - 30(1-\Theta_1)^5 + 30(1-\Theta_1)^3 = 10\Theta_2^6 - 30\Theta_2^5 + 30\Theta_2^3,$$

которое выполняется, если $1 - \Theta_1 = \Theta_2$. Поскольку $0 \le \Theta_i \le 1/2$, $i = 1, 2$, то $\Theta_1 = \Theta_2 = 1/2$. Тогда первое равенство дает $L^6 61/64 = 1$, откуда следует, что $L = 2/\sqrt[6]{61}$. Поскольку $L < L_1 \le 2/\sqrt[6]{61}$, то полученное противоречие завершает доказательство.

Теорема 3. *Единственной неподвижной точкой преобразования SK, принадлежащей области $\overline{G}$ является точка $T(1/2; 2/\sqrt[6]{61})$ (в декартовой системе координат $(0; -15/\sqrt[3]{61})$).*

Доказательство. Пусть $z_0(\Theta, L)$ — неподвижная точка преобразования SK. Тогда $z_0 = SKz_0$ и

$$\begin{cases} \dfrac{L^6(2\Theta^6 - 6\Theta^5 + 10\Theta^3 - 3) + 2}{L^5} = \dfrac{-2 - L^6(2(1-\Theta)^6 - 6(1-\Theta)^5 + 10(1-\Theta)^3 - 3)}{L^5}, \\ \dfrac{-10 - L^6(10\Theta^6 - 30\Theta^5 + 30\Theta^3 - 5)}{2L^4} = \dfrac{-10 - L^6(10(1-\Theta)^6 - 30(1-\Theta)^5 + 30(1-\Theta)^3 - 5)}{2L^4}. \end{cases} \tag{5}$$

Второе соотношение (5) дает $\Theta = 1/2$, а первое приводит к равенству $L = 2/\sqrt[6]{61}$. $\square$

Исследуем скорость сходимости последовательности точек $(SK)^n z_0$ к неподвижной точке отображения SK.

Теорема 4. *Пусть z_0 — точка кривой (3), существование которой установлено в теореме 1. Обозначим $z_n(\Theta_n, L_n) = (SK)^n z_0$. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\Theta_n = \frac{1}{2}(1 + \sigma_n), \qquad L_n = \frac{2}{\sqrt[6]{61}}(1 - \tau_n),$$

где $\sigma_n > 0$, $\tau_n > 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau_n < \infty$.

Доказательство. Следствием теоремы 2 является условие $1/2 \le \Theta_n \le 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $\sigma_n = 2\Theta_n - 1$, $\tau_n = 1 - \frac{\sqrt[6]{61}}{2} L_n$. Обозначим декартовы координаты точки z_n через (A_n, B_n). Тогда имеем

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{L_n^6(2\Theta_n^6 - 6\Theta_n^5 + 10\Theta_n^3 - 3) + 2}{L_n^5}, \\ B_n = \dfrac{-10 - L_n^6(10\Theta_n^6 - 30\Theta_n^5 + 30\Theta_n^3 - 5)}{2L_n^4}; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} A_{n+1} = \dfrac{-2 - L_n^6(2(1-\Theta_n)^6 - 6(1-\Theta_n)^5 + 10(1-\Theta_n)^3 - 3)}{L_n^5}, \\ B_{n+1} = \dfrac{-10 - L_n^6(10(1-\Theta_n)^6 - 30(1-\Theta_n)^5 + 30(1-\Theta_n)^3 - 5)}{2L_n^4}. \end{cases} \tag{7}$$

Отсюда при $\Theta_n \in (1/2; 1)$ и (6) и (7) следует $A_{n+1} - A_n \le 0$ и $B_{n+1} - B_n \ge 0$. Последовательности $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ — монотонны и ограничены. Поэтому существует $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Преобразование SK непрерывно. Тогда $SKa = a$. По теореме 3 точка $a = T$. Отсюда следует, что существуют $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = 0$.

Для декартовых координат z_{n+1} наряду с (7) справедливы соотношения

$$A_{n+1} = \frac{L_{n+1}^6(2\Theta_{n+1}^6 - 6\Theta_{n+1}^5 + 10\Theta_{n+1}^3 - 3) + 2}{L_{n+1}^5},$$
$$B_{n+1} = \frac{-10 - L_{n+1}^6(10\Theta_{n+1}^6 - 30\Theta_{n+1}^5 + 30\Theta_{n+1}^3 - 5)}{2L_{n+1}^4}.$$

Сравним две различные записи (7)

$$\frac{-\frac{64}{61}(1-\tau_n)^6\left(\frac{1}{32}(1-\sigma_n)^6 - \frac{3}{16}(1-\sigma_n)^5 + \frac{5}{4}(1-\sigma_n)^3 - 3\right) - 2}{(1-\tau_n)^5} =$$
$$= \frac{\frac{64}{61}(1-\tau_{n+1})^6\left(\frac{1}{32}(1+\sigma_{n+1})^6 - \frac{3}{16}(1+\sigma_{n+1})^5 + \frac{5}{4}(1+\sigma_{n+1})^3 - 3\right) + 2}{(1-\tau_{n+1})^5},$$
$$\frac{-10 - \frac{64}{61}(1-\tau_n)^6\left(\frac{5}{32}(1-\sigma_n)^6 - \frac{15}{16}(1-\sigma_n)^5 + \frac{15}{4}(1-\sigma_n)^3 - 5\right)}{(1-\tau_n)^4} =$$
$$= \frac{-10 - \frac{64}{61}(1-\tau_{n+1})^6\left(\frac{5}{32}(1+\sigma_{n+1})^6 - \frac{15}{16}(1+\sigma_{n+1})^5 + \frac{15}{4}(1+\sigma_{n+1})^3 - 5\right)}{(1-\tau_{n+1})^4}.$$

Учитывая только главные части разложений, имеем

$$\begin{cases} (61 + \varepsilon'_{11}(n))\tau_{n+1} + (16 + \varepsilon'_{12}(n))\sigma_{n+1} = (-61 + \varepsilon''_{11}(n))\tau_n + (16 + \varepsilon''_{12}(n))\sigma_n, \\ (-45 + \varepsilon'_{21}(n))\tau_{n+1} + (-8 + \varepsilon'_{22}(n))\sigma_{n+1} = (-45 + \varepsilon''_{21}(n))\tau_n + (8 + \varepsilon''_{22}(n))\sigma_n, \end{cases}$$

где $\varepsilon'_{\nu\mu}(n) \to 0$, $\varepsilon''_{\nu\mu}(n) \to 0$ при $n \to \infty$ $(\nu, \mu = 1, 2)$.

Откуда получаем

$$\begin{cases} \tau_{n+1} = \left(\dfrac{151}{29} + \varepsilon_{11}(n)\right)\tau_n + \left(-\dfrac{32}{29} + \varepsilon_{12}(n)\right)\sigma_n, \\ \sigma_{n+1} = \left(-\dfrac{2745}{116} + \varepsilon_{21}(n)\right)\tau_n + \left(\dfrac{151}{29} + \varepsilon_{22}(n)\right)\sigma_n, \end{cases} \tag{8}$$

где $\varepsilon_{\nu\mu}(n) \to 0$ при $n \to \infty$ $(\nu, \mu = 1, 2)$.

Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau_n$ сходится. От противного. Пусть существуют последовательности $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$, такие что $\sum\limits_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \tau_\nu \to +\infty$ при $k \to \infty$. Просуммируем первое соотношение (8) и получим:

$$\tau_{n_k+m_k+1} - \tau_{n_k} + \sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \tau_\nu = \frac{151}{29}\sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \tau_\nu + \sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \varepsilon_{11}(\nu)\tau_\nu - \frac{32}{29}\sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \sigma_\nu + \sum_{\nu=n_k}^{n_k+m_k} \varepsilon_{12}(\nu)\sigma_\nu.$$

Откуда

$$\frac{122}{29}=\frac{\tau_{n_k+m_k+1}-\tau_{n_k}}{\sum\limits_{\nu=n_k}^{n_k+m_k}\tau_\nu}-\frac{\sum\limits_{\nu=n_k}^{n_k+m_k}\varepsilon_{11}(\nu)\tau_\nu}{\sum\limits_{\nu=n_k}^{n_k+m_k}\tau_\nu}+\frac{\sum\limits_{\nu=n_k}^{n_k+m_k}\sigma_\nu}{\sum\limits_{\nu=n_k}^{n_k+m_k}\tau_\nu}\left(\frac{32}{29}-\frac{\sum\limits_{\nu=n_k}^{n_k+m_k}\varepsilon_{12}(\nu)\sigma_\nu}{\sum\limits_{\nu=n_k}^{n_k+m_k}\sigma_\nu}\right). \tag{9}$$

Первые два слагаемых справа в (9) при $k\to\infty$ стремятся к нулю. Если бы ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sigma_\nu$ сходился, то последнее слагаемое стремилось бы к нулю, что невозможно. Это значит, что $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sigma_\nu=+\infty$. Заметим,

$$\frac{\sum\limits_{\nu=n_k}^{n_k+m_k}\sigma_\nu}{\sum\limits_{\nu=n_k}^{n_k+m_k}\tau_\nu}\to\frac{61}{16}.$$

Второе соотношение (8) приводит к аналогичному результату

$$\frac{\sum\limits_{\nu=n_k}^{n_k+m_k}\sigma_\nu}{\sum\limits_{\nu=n_k}^{n_k+m_k}\tau_\nu}\to\frac{90}{16}.$$

Полученное противоречие завершает доказательство, а именно $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\tau_\nu<\infty$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sigma_\nu<\infty$.

Замечание. Справедливо более сильное утверждение:

$$\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}\to\frac{151-6\sqrt{610}}{29}\qquad\text{и}\qquad\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}\to\frac{151-6\sqrt{610}}{29}.$$

Изученное отображение (2) дает возможность построения функций, определенных на всей полуоси $[0,\infty)$ и обладающих «альтернансными» свойствами. Приведем пример такого построения.

Теорема 5. *Существует последовательность чисел*

$$0<a<b<c<x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<\ldots, \tag{10}$$

$x_k\to\infty$ *при* $k\to\infty$, *и функция* $\varphi(t)$ *такая, что*

1) $\varphi(t)\in U_6[0,\infty)$,

2) $\varphi^{VI}(t)=\begin{cases}(-1)^{n+1}6! & \text{для } t\in(x_n,x_{n+1}) \text{ при } n=\overline{1,\infty},\\ -6! & \text{для } t\in(0,x_1),\end{cases}$

3) $\varphi(0)=\varphi(b)=\varphi(\xi_{2k-1})=-1,\ \ \varphi(a)=\varphi(c)=\varphi(\xi_{2k})=+1,\ \ k=\overline{1,\infty}$,

4) *если положить*

$$\xi_k-x_k=\frac{1}{\sqrt[6]{61}}+\varkappa_k',\qquad x_k-\xi_{k-1}=\frac{1}{\sqrt[6]{61}}+\varkappa_k'', \tag{11}$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\varkappa_k'|<\infty,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}|\varkappa_k''|<\infty. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть x_0 — точка на дуге UM_2, существование одной из которых установлено в теореме 1. Положим $x_n=(SK)^n x_0$, A_n, B_n — декартовы координаты точки x_n. Имеем

$$\begin{cases}A_0=\dfrac{3\alpha_0^6-2}{\alpha_0^5},\\[2mm] B_0=\dfrac{5\alpha_0^6-10}{2\alpha_0^4}.\end{cases} \tag{13}$$

Криволинейные координаты точки x_n будем обозначать через Θ_n и L_n. В соответствии с определением криволинейных координат имеем

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{L_n^6(2\Theta_n^6 - 6\Theta_n^5 + 10\Theta_n^3 - 3) + 2}{L_n^5}, \\ B_n = \dfrac{-10 - L_n^6(10\Theta_n^6 - 30\Theta_n^5 + 30\Theta_n^3 - 5)}{2L_n^4}. \end{cases} \tag{14}$$

Из построения операторов K и S следует, что для координат точки $x_{k+1} = SKx_n$ справедливы соотношения

$$\begin{cases} A_{n+1} = \dfrac{-2 - L_n^6(2(1-\Theta_n)^6 - 6(1-\Theta_n)^5 + 10(1-\Theta_n)^3 - 3)}{L_n^5}, \\ B_{n+1} = \dfrac{-10 - L_n^6(10(1-\Theta_n)^6 - 30(1-\Theta_n)^5 + 30(1-\Theta_n)^3 - 5)}{2L_n^4}. \end{cases} \tag{15}$$

Построим для $n = \overline{1,\infty}$ алгебраические многочлены $p_n(t) = (-1)^{n+1}(t^6 + A_n t^5 + B_n t^4 + D_n t^2 - 1)$, где

$$\begin{gathered} D_n = \frac{L_n^6(10\Theta_n^6 - 18\Theta_n^5 + 10\Theta_n^3 - 1) + 10}{2L_n^2}, \\ D_{n+1} = \frac{L_n^6(10(1-\Theta_n)^6 - 18(1-\Theta_n)^5 + 10(1-\Theta_n)^3 - 1) + 10}{2L_n^2}. \end{gathered} \tag{16}$$

Определим последовательность (10) следующим образом:

$$x_1 - c = L_0(1-\Theta_0), \quad \xi_1 - x_1 = L_0\Theta_0, \quad x_n - \xi_{n-1} = L_{n-1}(1-\Theta_{n-1}),$$
$$\xi_n - x_n = L_{n-1}\Theta_{n-1}, \quad n = \overline{2,\infty}.$$

Положим

$$\varphi(t) = \begin{cases} p_0(t-c), & \text{если} \ \ 0 \le t < x_1, \\ p_n(t-\xi_n), & \text{если} \ \ x_n \le t < x_{n+1}, \quad n = \overline{1,\infty}. \end{cases} \tag{17}$$

Определим точки a, b и c из условий

$$p_0(-c) = -1, \quad b = c - \alpha_0, \quad a = b - \alpha_1 = c - \alpha_0 - \alpha_1, \quad p_0(a) = 1, \quad p_0'(a) = 0. \tag{18}$$

Имеем $\xi_n - \xi_{n-1} = L_{n-1}$ и $L_n \to 2/\sqrt[6]{61}$ (см. теорему 4). Отсюда следует, что $\xi_n \to +\infty$ и $x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. На основании теоремы 4 получаем, что для последовательности (10) выполнено требование 4) настоящей теоремы (см. (11), (12)).

Требование 2) очевидно выполнено (см. (16)). Имеем далее $\varphi(0) = \varphi(b) = \varphi(\xi_{2k-1}) = -1$, $\varphi(a) = \varphi(c) = \varphi(\xi_{2k}) = 1$, $k = \overline{1,\infty}$ (см. (17)–(18)). Отсюда следует, что требование 3) для $\varphi(t)$ выполнено.

Перейдем к проверке требования 1). Для удобства и универсальности записи полагаем с $= \xi_0$.

Чтобы установить непрерывность $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, $\varphi'''(t)$, $\varphi^{IV}(t)$, $\varphi^{V}(t)$ достаточно проверить равенства $p_n^{(j)}(x_{n+1} - \xi_n) = p_{n+1}^{(j)}(x_{n+1} - \xi_{n+1})$ для $j = \overline{0,5}$ и $n = 1, 2, 3, \ldots$

Справедливость этих соотношений проверяется непосредственной подстановкой A_n, B_n, D_n и A_{n+1}, B_{n+1}, D_{n+1} из формул (14)–(16).

Чтобы завершить доказательство теоремы 5, проверим соотношения $\|\varphi\| = 1$. На участке $[0, \xi_0]$ функция $\varphi(t)$ по определению равна $-(t-\xi_0)^6 - A_0(t-\xi_0)^5 - B_0(t-\xi_0)^4 - D_0(t-\xi_0)^2 + 1$, где A_0 и B_0 определены формулами (13), а $D_0 = \dfrac{10 - \alpha_0^6}{2\alpha_0^2}$.

Из равенств $\varphi(0) = \varphi(b) = -1$ и $\varphi(a) = \varphi(c) = +1$ следует, что

$$\max_{0 \le t \le \xi_0} |\varphi(t)| = 1.$$

Рассмотрим теперь $\varphi(t)$ на отрезках $[\xi_{2k}, \xi_{2k+1}]$. Имеем по определению

$$\varphi(t) = \begin{cases} -(t-\xi_{2k})^6 - A_{2k}(t-\xi_{2k})^5 - B_{2k}(t-\xi_{2k})^4 - D_{2k}(t-\xi_{2k})^2 + 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{для } \xi_{2k} < t < x_{2k+1}, \\ (t-\xi_{2k+1})^6 + A_{2k+1}(t-\xi_{2k+1})^5 + B_{2k+1}(t-\xi_{2k+1})^4 + D_{2k+1}(t-\xi_{2k+1})^2 - 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{для } x_{2k+1} < t < \xi_{2k+1}, \end{cases}$$

где $D_{2k} > 0$ и $D_{2k+1} > 0$. Многочлен $p_{2k}(t-\xi_{2k})$ (соответственно $p_{2k+1}(t-\xi_{2k+1})$) имеет в точке ξ_{2k} (соответственно в точке ξ_{2k+1}) локальный максимум (соответственно локальный минимум). Это означает, что правее (соответственно левее) точки ξ_{2k} (соответственно точки ξ_{2k+1}) имеется один и только один локальный минимум (соответственно максимум) в точке η_{2k} (соответственно η'_{2k}) (см. рис. 3, 4).

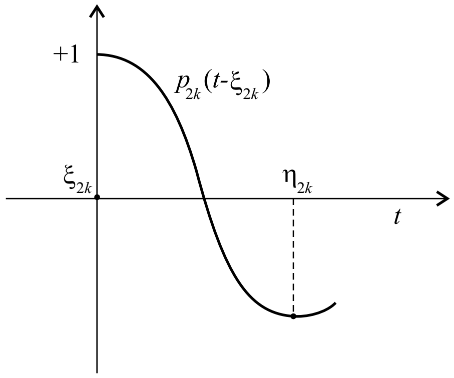

Рис. 3

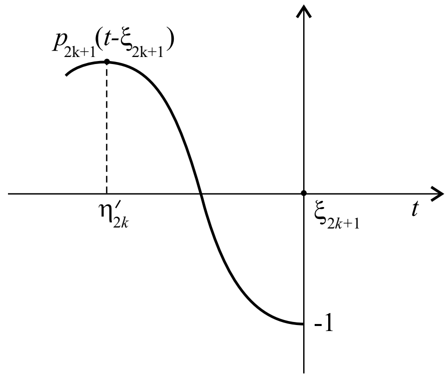

Рис. 4

Точка x_{2k+1} расположена на интервале (ξ_{2k}, ξ_{2k+1}). Эта точка не может лежать правее η_{2k}, поскольку в этом случае нарушается либо условие

$$p'_{2k}(x_{2k+1} - \xi_{2k}) = p'_{2k+1}(x_{2k+1} - \xi_{2k+1}),$$

либо условие

$$p''_{2k}(x_{2k+1} - \xi_{2k}) = p''_{2k+1}(x_{2k+1} - \xi_{2k+1}).$$

По той же причине x_{2k+1} не может располагаться левее точки η'_{2k}. Поэтому $x_{2k+1} < \eta_{2k}$ и $\eta'_{2k} < x_{2k+1}$. Последнее означает, что $\varphi(t)$ — функция, невозрастающая на $[\xi_{2k}, \xi_{2k+1}]$, а значит,

$$\max_{\xi_{2k} \le t \le \xi_{2k+1}} |\varphi(t)| = 1.$$

Такие же рассуждения пригодны и для $t \in [\xi_{2k-1}, \xi_{2k}]$. Теорема доказана. $\square$

Замечание. Отметим без доказательства, что всякая функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условиям 1)–3) теоремы 5, обязательно удовлетворяет условию 4).

Библиографический список

1. *Schoenberg I.J., Cavaretta A.* Solution of Landau's problem concerning higher derivatives on the halfline // Proc. Intern. Conf. Constructive Function Theory. Sofia: Bulgarian Acad. Sci., 1972. P. 297–308.

2. *Тимофеев В.Г.* Колмогоровские оценки в равномерной метрике на полуоси через функцию и ее пятую производную // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 119–122.