Рассматривается задача, аналогичная задаче (2)–(3) с заменой в ней оператора $A_{-}^{(q)}$ на оператор $A_{-,p,\mu}^{(q)}$. Рассматривается также уравнение вида (4) с заменой в нем оператора $A_{+}^{(q)}$ на оператор $A_{+,p,\mu}^{(q)}$. Существование регуляризатора таких задач при $\mu = 0$ известно (см. [10]). Затем при всех $p = 1, 2, 3, \ldots$ и $\mu \in [0; 1]$ доказываются коэрцитивные априорные оценки, аналогичные оценкам (5) и (6). С помощью продолжения по параметру μ устанавливается существование регуляризатора для задач, аналогичных задачам (2)–(3) и (4) при $\mu = 1$. Затем с использованием коэрцитивных априорных оценок и предельного перехода при $p \to +\infty$ показывается существование регуляризатора задач (2)–(3) и (4).

Теорема 4 доказывается аналогично теореме 3.

Библиографический список

1. *Келдыш, М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М.В. Келдыш // Докл. АН. – 1951. – Т. 77, № 2. – С. 181–183.

2. *Олейник, О.А.* Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О.А. Олейник // Докл. АН. – 1952. – Т. 87, № 6. – С. 885–887.

3. *Смирнов, М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1966. – 292 с.

4. *Рукавишников, В.А.* О коэрцитивности R_ν-обобщенного решения первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных / В.А. Рукавишников, А.Г. Ереклинцев // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 12. – С. 1680–1689.

5. *Антонцев, С.Н.* О локализации решений эллиптических уравнений с неоднородным анизотропным вырождением / С.Н. Антонцев, С.И. Шмарёв // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46, № 5. – С. 963–984.

6. *Вишик, М.И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М.И. Вишик, В.В. Грушин // Мат. сб. – 1969. – Т. 80 (112), вып. 4. – С. 455–491.

7. *Глушко, В.П.* Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В.П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными: Тр. семинара акад. С.Л. Соболева. – Новосибирск, 1978. – № 2. – С. 49–68.

8. *Баев, А.Д.* Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А.Д. Баев // Докл. АН. – 1982. – Т. 265, № 5. – С. 1044–1046.

9. *Баев, А.Д.* Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев // Докл. АН. – 2008. – Т. 422, № 6. – С. 727–728.

10. *Баев А.Д.* Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А.Д. Баев. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2008. – 240 с.

УДК 517.917

ОСИ СИММЕТРИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо*, **Д.С. Ушхо**

Адыгейский государственный университет, Майкоп,
кафедра теоретической физики,
*кафедра информатики
E-mail: tlyachev@adygnet.ru

Вводится понятие оси симметрии N-типа. Доказывается, что векторное поле, определяемое системой дифференциальных уравнений с полиномами n-й степени в правых частях, не может иметь четного числа осей симметрии N-типа при $n = 2m, m \in \mathbb{N}$. Для случая $n = 2, 3$ проведено полное исследование данной системы на N-симметрию. В зависимости от числа осей симметрии N-типа найдены специальные формы записи квадратичных и кубичных систем, которые позволяют упростить качественное исследование таких систем.

Ключевые слова: полиномиальная система дифференциальных уравнений, ось симметрии, изоклины, центр, фокус.

Symmetry Axes of Planar Polynomial Differential Systems

V.B. Tlyachev, A.D. Ushkho*, **D.S. Ushkho**

Adyghe State University, Maykop,
Chair of Theoretical Physics,
*Chair of Informatics
E-mail: tlyachev@adygnet.ru

The notion of N-type axis of symmetry is introduced. It is proved that the vector field defined by system of the differential equations with n-order polynomials in a right hand, cannot have even number of axes of symmetry N-type at $n = 2m, m \in \mathbb{N}$. For $n = 2, 3$ full research of the given system on N-symmetry is carried out. Depending on the number of axes of N-type symmetry special forms of presenting of square and cubic systems, which allow to simplify qualitative research of such systems, are discovered.

Key words: polynomial differential systems, axis of symmetry, isoclines, center, focus.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] изучено дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}, \tag{1}$$

где $Y(x,y)$ и $X(x,y)$ — аналитические в окрестности начала координат функции, разложения которых в ряды

$$X(x,y) = P_n(x,y) + P_{n+1}(x,y) + \ldots,$$
$$Y(x,y) = Q_n(x,y) + Q_{n+1}(x,y) + \ldots$$

начинаются с членов не ниже первого порядка, при условии, что характеристическое уравнение

$$Q_n(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi + P_n(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi = 0 \tag{2}$$

не имеет действительных корней.

Отсутствие действительных корней уравнения (2), как известно [2], является достаточным условием того, что ни одна интегральная кривая уравнения (1) не входит в начало координат с определенным угловым коэффициентом, т.е. $O(0,0)$ — особая точка типа центра или фокуса. Именно в связи с проблемой различения центра и фокуса автором работы [1] исследуется вопрос о существовании осей симметрии поля направлений дифференциального уравнения (1), проходящих через начало координат. В [1] доказана теорема 1, которая утверждает, что существование проходящей через начало координат оси симметрии поля направлений дифференциального уравнения (1) гарантирует наличие центра в начале координат $O(0,0)$, разумеется, при выполнении условия отсутствия действительных корней уравнения (2). Очевидно, что это утверждение представляет собой не что иное, как принцип симметрии, примененный к уравнению (1). В качестве примера в работе [1] приводятся условия наличия осей симметрии у квадратичного дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2}{y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2}.$$

В предлагаемой статье изучаются условия существования осей симметрии системы двух дифференциальных уравнений, правые части которой являются многочленами второй или третьей степени. В дальнейшем будем называть такие системы квадратичными и кубичными, соответственно, так как это принято в качественной теории дифференциальных уравнений. При этом, в отличие от [1], мы не требуем, чтобы начало координат было только особой точкой второй группы, т.е. центром или фокусом.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P_n(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q_n(x,y), \tag{3}$$

где P_n и Q_n — взаимно простые многочлены степени $n (n \geq 2)$ с действительными коэффициентами.

Определение 1. Пусть преобразование

$$\bar{x} = x + ky, \qquad \bar{y} = -kx + y \tag{4}$$

переводит систему (3) в систему

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{P}_n(\bar{x},\bar{y}), \qquad \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{Q}_n(\bar{x},\bar{y}), \tag{5}$$

где $\bar{P}_n(\bar{x},\bar{y}) = P_n((\bar{x}-k\bar{y})/(k^2+1), (k\bar{x}+\bar{y})(k^2+1))$, $\bar{Q}_n(\bar{x},\bar{y}) = Q_n((\bar{x}-k\bar{y})/(k^2+1), (k\bar{x}+\bar{y})(k^2+1))$.

Тогда прямую $y = kx$ будем называть осью симметрии N-типа поля направлений системы (3), если имеют место одновременно следующие три тождества

$$\bar{P}_n(\bar{x},\bar{y}) \equiv \bar{y}\bar{P}_{n-1}(\bar{x},\bar{y}), \qquad \bar{Q}_n(\bar{x},-\bar{y}) \equiv \bar{Q}_n(\bar{x},\bar{y}), \qquad \bar{P}_{n-1}(\bar{x},-\bar{y}) \equiv \bar{P}_{n-1}(\bar{x},\bar{y}).$$

Теорема 1. *Если прямая $y = kx$ — ось симметрии N-типа векторного поля, определяемого системой* (3)*, то эта прямая является изоклиной системы* (3)*, причем*

$$\frac{Q_n(x,kx)}{P_n(x,kx)} \equiv -\frac{1}{k} \qquad (k \in \mathbb{R}).$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что в случае $k = 0$, согласно определению 1, $P_n(x,y) \equiv yP_{n-1}(x,y)$, где $P_{n-1}(x,y)$, — многочлен степени $n-1$ и прямая $y = 0$ — изоклина бесконечности.

Пусть $k \neq 0$. В результате преобразования (4) система (3) перейдет в систему (5), где

$$\bar{P}_n(\bar{x},\bar{y}) \equiv P_n(x,y) + kQ_n(x,y), \qquad \bar{Q}_n(\bar{x},\bar{y}) \equiv -kP_n(x,y) + Q_n(x,y), \tag{6}$$

а x и y следует заменить по формулам:

$$x = \frac{\bar{x} - k\bar{y}}{k^2+1}, \qquad y = \frac{k\bar{x} + \bar{y}}{k^2+1}.$$

Так как по условию прямая $y = kx$ — ось симметрии N-типа системы (3), то $\bar{P}_n(\bar{x},0) \equiv 0$. Поэтому из первого равенства (6) получим тождество

$$P_n(x,kx) + kQ_n(x,kx) \equiv 0,$$

из которого следует требуемое равенство $Q_n(x,kx)/P_n(x,kx) \equiv -1/k$. Теорема доказана. □

Замечание 1. Любую ось симметрии N-типа системы (3) пересекают траектории этой системы под прямым углом (разумеется, в точках, отличных от особых).

Следствие 1. Любая простая особая точка системы (3), расположенная на ее оси симметрии N-типа, является центром или седлом.

В самом деле, простая особая точка системы (3) может быть либо центром, либо фокусом, либо узлом, либо седлом [2]. Очевидно, случай фокуса исключается, так как спиралевидная траектория не может быть расположена симметрично относительно прямой, проходящей через особую точку типа «фокус». Исключается также случай особой точки типа «узел». Сошлемся на монографию [2], согласно которой всегда можно указать цикл без контакта такой, что он окружает узел и расположен в его достаточно малой окрестности, а все траектории, пересекающие цикл, стремятся к узлу при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$. Вместе с тем, согласно замечанию 1, в сколь угодно малой проколотой окрестности особой точки траектории пересекают ось симметрии N-типа под прямым углом, а значит, особая точка не может быть узлом.

Пусть далее система (3) имеет две оси симметрии N–типа $y = k_1x$, $y = k_2x$, $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Тогда согласно теореме 1 выполняются условия:

$$P_n(x,k_1x) + k_1Q_n(x,k_1x) \equiv 0, \tag{7}$$

$$P_n(x,k_2x) + k_2Q_n(x,k_2x) \equiv 0. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следуют тождества

$$P_n(x,y) + k_1Q_n(x,y) \equiv (y - k_1x)R_{n-1}(x,y), \tag{9}$$

$$P_n(x,y) + k_2Q_n(x,y) \equiv (y - k_2x)S_{n-1}(x,y), \tag{10}$$

где

$$R_{n-1}(x,y) = \sum_{i+j=0}^{n-1} r_{ij}x^iy^j, \qquad S_{n-1}(x,y) = \sum_{i+j=0}^{n-1} s_{ij}x^iy^j. \tag{11}$$

Разрешив систему (9), (10) относительно P_n и Q_n и переходя к новой переменной $d\tau = dt/(k_2-k_1)$ приведем систему (3) к виду

$$\frac{dx}{d\tau} = k_2(y - k_1x)R_{n-1}(x,y) - k_1(y - k_2x)S_{n-1}(x,y),$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -(y - k_1x)R_{n-1}(x,y) + (y - k_2x)S_{n-1}(x,y). \tag{12}$$

Рассмотрим случай, когда оси симметрии N-типа $y = k_1x$ и $y = k_2x$ взаимно перпендикулярны. Очевидно, что тогда $k_2k_1 = -1$ и, полагая $k_1 = k$, систему (12) перепишем в виде

$$\frac{dx}{d\mu} = (y - kx)R_{n-1}(x,y) + k(x + ky)S_{n-1}(x,y),$$

$$\frac{dy}{d\mu} = k(y - kx)R_{n-1}(x,y) - (x + ky)S_{n-1}(x,y). \tag{13}$$

Здесь $d\mu = -d\tau/k$, $k \neq 0$. Если к системе (13) применить преобразование (4) и замену времени $d\eta = (k^2 + 1)d\mu$, то она преобразуется в систему

$$\frac{d\bar{x}}{d\eta} = \bar{y}\bar{R}_{n-1}(\bar{x},\bar{y}), \qquad \frac{d\bar{y}}{d\eta} = -\bar{x}\bar{S}_{n-1}(\bar{x},\bar{y}), \tag{14}$$

где

$$\bar{R}_{n-1}(\bar{x},\bar{y}) = R_{n-1}(x,y), \qquad \bar{S}_{n-1}(\bar{x},\bar{y}) = S_{n-1}(x,y), \qquad x = \frac{\bar{x} - k\bar{y}}{k^2 + 1}, \qquad y = \frac{k\bar{x} + \bar{y}}{k^2 + 1}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Если система* (3) *имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии N-типа, то подходящим линейным преобразованием* (4) *эту систему можно привести к виду* (14), *где*

$$\bar{R}_{n-1}(\bar{x},-\bar{y}) = \bar{R}_{n-1}(\bar{x},\bar{y}), \qquad \bar{S}_{n-1}(\bar{x},-\bar{y}) = \bar{S}_{n-1}(\bar{x},\bar{y}),$$

$$\bar{R}_{n-1}(-\bar{x},\bar{y}) = \bar{R}_{n-1}(\bar{x},\bar{y}), \qquad \bar{S}_{n-1}(-\bar{x},\bar{y}) = \bar{S}_{n-1}(\bar{x},\bar{y}). \tag{15}$$

Воспользуемся системой (14) и условиями (15) для получения явного вида функций (11) в системе (13) при $n = 3$. Тогда

$$R_2(x,y) = r_{00} + r_{10}x + r_{01}y + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2, \tag{16}$$

$$S_2(x,y) = s_{00} + s_{10}x + s_{01}y + s_{20}x^2 + s_{11}xy + s_{02}y^2. \tag{17}$$

Заменяя в выражениях (16) и (17) x и y по формулам (4), а затем, используя условия (15), можно убедиться в выполнении ограничений на коэффициенты:

$$r_{10} = r_{01} = s_{01} = s_{10} = 0, \qquad r_{11}k^2 - 2(r_{02} - r_{20})k - r_{11} = 0, \qquad s_{11}k^2 - 2(s_{02} - s_{20})k - s_{11} = 0. \tag{18}$$

Исследуем систему (18).

Если $r_{11} = s_{11} = 0$ и $(r_{02} - r_{20})^2 + (s_{02} - s_{20})^2 > 0$, то координатные прямые $y = 0$ и $x = 0$ являются осями симметрии N-типа системы (3) при $n = 3$. При этом система (3) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = yR_{00}, \qquad \frac{dy}{dt} = -xS_{00},$$

где $R_{00} = r_{00} + r_{20}x^2 + r_{02}y^2$, $S_{00} = s_{00} + s_{20}x^2 + s_{02}y^2$.

Если $r_{11} \neq 0$ и $s_{11} = s_{02} - s_{20} = 0$, то осями симметрии N-типа системы (3) являются прямые $y = kx$ и $y = -x/k$, где k — корень уравнения $r_{11}k^2 - 2(r_{02} - r_{20})k - r_{11} = 0$. При этом система (3) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = (y - kx)(R_{00} + r_{11}xy) + k(x + ky)S_{00},$$

$$\frac{dy}{dt} = k(y - kx)(R_{00} + r_{11}xy) - (x + ky)S_{00}. \tag{19}$$

Если $s_{11} \neq 0$ и $r_{11} = r_{02} - r_{20} = 0$, то прямые $y = kx$ и $y = -x/k$ являются осями симметрии N-типа системы (3), где k — корень следующего уравнения:

$$s_{11}k^2 - 2(s_{02} - s_{20})k - s_{11} = 0. \tag{20}$$

При этом система (3) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = (y - kx)R_{00} + k(x + ky)(S_{00} + s_{11}xy),$$

$$\frac{dy}{dt} = k(y - kx)R_{00} - (x + ky)(S_{00} + s_{11}xy). \tag{21}$$

Если $r_{11}s_{11} \neq 0$ и $(r_{02} - r_{20})/r_{11} = (s_{02} - s_{20})/s_{11}$, то осями симметрии N-типа системы (3) при $n = 3$ являются прямые $y = kx$ и $y = -x/k$, где k — корень уравнения (20). При этом система (3) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = (y - kx)\tilde{R} + k(x + ky)(S_{00} + s_{11}xy),$$

$$\frac{dy}{dt} = k(y - kx)\tilde{R} - (x + ky)(S_{00} + s_{11}xy), \tag{22}$$

где

$$\tilde{R} = r_{00} + r_{20}x^2 + r_{11}xy + \Big(r_{20} + \frac{r_{11}(s_{02} - s_{20})}{s_{11}}\Big)y^2.$$

Если $r_{11} = s_{11} = 0$ и $r_{02} = r_{20} \neq 0$, $s_{02} = s_{20} \neq 0$, то осями симметрии N-типа системы (3) при $n = 3$ являются прямые $y = kx$ и $x = -ky, k \in \mathbb{R}$, а система (3) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = (y - kx)R_{00} + k(x + ky)S_{00},$$

$$\frac{dy}{dt} = k(y - kx)R_{00} - (x + ky)S_{00}. \tag{23}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Система дифференциальных уравнений* (3) *при* $n = 3$ *имеет две оси симметрии* N*-типа* $y = kx$ *и* $x = -ky$ *тогда и только тогда, когда она имеет вид одной из систем* (19), (20)–(23) *с соответствующими ограничениями на коэффициенты.*

Теорема 4. *Система дифференциальных уравнений* (3) *при* $n = 2m, m \in \mathbb{N}$ *и наличии в правых частях уравнений этой системы хотя бы одного одночлена размерности* $2m$ *не может иметь ровно двух осей симметрии* N*-типа.*

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы система (3) имеет ровно две оси симметрии N-типа. Не умаляя общности, рассмотрим систему

$$\frac{d\bar{x}}{d\eta} = \bar{y}\bar{R}_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}), \qquad \frac{d\bar{y}}{d\eta} = -\bar{x}\bar{S}_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}), \tag{24}$$

где

$$\bar{R}_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i+j=0}^{2m-1} \bar{r}_{ij}\bar{x}^i\bar{y}^j, \qquad \bar{S}_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i+j=0}^{2m-1} \bar{s}_{ij}\bar{x}^i\bar{y}^j. \tag{25}$$

В силу симметрии поля направлений системы (24) относительно прямых $\bar{x} = 0$ и $\bar{y} = 0$ при $n = 2m$ должны быть выполнены условия (15).

Каждое слагаемое степени $2m - 1$ в правых частях равенств (25) содержит $\bar{x}$ или $\bar{y}$ в нечетной степени. Поэтому согласно условиям (15) при $n = 2m$ все одночлены размерности $2m-1$ в правых частях равенств (25) отсутствуют. Пришли к противоречию с тем, что правые части уравнений системы (24) содержат хотя бы один одночлен размерности $2m$. Теорема доказана. □

Следствие 2. Если правые части уравнений квадратичной дифференциальной системы содержат хотя бы один квадратичный член, то эта система не может иметь в точности две оси симметрии N-типа.

Согласно работе [1] система (3) в случае $(P_n, Q_n) = 1$ имеет не более $n + 1$ осей симметрии N-типа. Поэтому справедливо

Утверждение 1. Если векторное поле системы (3) имеет более $n + 1$ осей симметрии N-типа, то число таких осей симметрии бесконечно много, а система (3) вырождается в систему $dx/dt = y$, $dy/dt = -x$.

Теорема 5. *Система дифференциальных уравнений* (3) *при* $n = 2m, m \in \mathbb{N}$ *не может иметь четного числа осей симметрии N-типа, если правые части уравнений этой системы содержат хотя бы один одночлен размерности* $2m$.

В самом деле, пусть число осей симметрии N-типа поля направлений системы (3) при $n = 2m, m \in \mathbb{N}$ равно $2l$, где $1 \le l \le [(n+1)/2]$. Не уменьшая общности, считаем, что осью симметрии N-типа является прямая $y = 0$ (этого всегда можно добиться с помощью преобразования (4)). Очевидно, любую из $2l$ осей симметрии N-типа можно получить поворотом прямой $y = 0$ на угол, кратный углу $\varphi = \pi/2l$ [1]. Следовательно, среди осей симметрии векторного поля системы (3) непременно находится и прямая $x = 0$. Это означает, что система (3) имеет вид системы (24). В остальном рассуждения совпадают с теми, которые проведены при доказательстве предыдущей теоремы 4.

Далее рассмотрим случай трех осей симметрии N-типа векторного поля системы (3) при $n = 3$.

Введем обозначения: $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$, $k_3 = \operatorname{tg}\varphi_3$, причем $0 \le \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \pi$. Тогда согласно работе [1] справедливо равенство $\varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/3$.

Воспользовавшись тригонометрическим равенством $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)/(1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)$ легко получить соотношения для k_2 и k_3:

$$k_2 = \frac{k_1 + \sqrt{3}}{1 - k_1\sqrt{3}}, \qquad k_3 = \frac{k_1 - \sqrt{3}}{1 + k_1\sqrt{3}}. \tag{26}$$

Так как $k_3 < 0$, то из (26) по необходимости следует, что $k_1 \in [0; 1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}; \sqrt{3})$, разумеется, при $k_1 \ge 0$.

Заметим, что при $k_1 = 1/\sqrt{3}(\varphi_1 = \pi/6)$ имеем $k_2 = \infty(\varphi_2 = \pi/2)$ и $k_3 = -1/\sqrt{3}(\varphi_3 = 5\pi/6)$.

Пусть система (12) при $n = 3$ имеет, наряду с прямыми $y = k_1x$ и $y = k_2x$, ось симметрии N-типа $y = k_3x$. Тогда по теореме 1 имеет место тождество

$$[R_2(x,y)(k_2 - k_3)(y - k_1x) + S_2(x,y)(k_3 - k_1)(y - k_2x)]\Big|_{y=k_3x} \equiv 0. \tag{27}$$

Из (27) получаем, что

$$S_2(x,y) = (y - k_3x)T_1(x,y) + R_2(x,y). \tag{28}$$

Здесь

$$R_2(x,y) = \sum_{i+j=0}^{2} r_{ij}x^iy^j, \qquad T_1(x,y) = t_{00} + t_{10}x + t_{01}y.$$

С учетом (28) система (12) при $n = 3$ запишется в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = (k_2 - k_1)yR_2(x,y) - k_1(y - k_2x)(y - k_3x)T_1(x,y),$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -(k_2 - k_1)xR_2(x,y) + (y - k_2x)(y - k_3x)T_1(x,y). \tag{29}$$

Последовательно применяя к системе (29) преобразования $\bar{x} = x + k_iy$, $\bar{y} = -k_ix + y (i = 1,2,3)$ и учитывая после каждого преобразования, что прямая $\bar{y} = 0$ — ось симметрии N-типа поля направлений, получаемых в результате указанных преобразований систем, убеждаемся в выполнении следующих условий на коэффициенты:

$$t_{10} = t_{01} = 0, \qquad r_{11} = 0, \qquad r_{02} = r_{20} \ne 0,$$

$$r_{10} = \frac{t_{00}(k_2k_3 + 1)}{k_2 - k_1}, \qquad r_{01} = \frac{t_{00}(k_2k_3 + 1)k_1}{k_2 - k_1}, \qquad t_{00} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \tag{30}$$

$$k_1 \in \Big[0; \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) \cap \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\Big).$$

С учетом (30) придадим системе (29) вид

$$\frac{dx}{d\tau} = (k_2 - k_1)yT - k_1(y - k_2x)(y - k_3x)t_{00},$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -(k_2 - k_1)xT + (y - k_2x)(y - k_3x)t_{00}, \tag{31}$$

где

$$T = \left[r_{00} + \frac{t_{00}(k_2k_3 + 1)}{k_2 - k_1}(x + k_1y) + r_{20}(x^2 + y^2)\right]$$

и k_2, k_3 задаются формулами (26). Таким образом, доказана

Теорема 6. *Система дифференциальных уравнений* (3) *при* $n = 3$ *имеет три оси симметрии* N*-типа* $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, *где* $k_1 \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cap \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right)$, k_2 *и* k_3 *определяются по формулам* (26), *тогда и только тогда, когда эта система имеет вид* (31).

Замечание 2. $t_{00} \neq 0$, так как в противном случае правые части уравнений системы (31) не будут взаимно простыми, а также $r_{20} \neq 0$ (в противном случае система (31) вырождается в квадратичную).

Рассмотрим теперь случай четырех осей симметрии N-типа системы (3) при $n = 3$.

Пусть $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, $y = k_4x$ — оси симметрии N-типа системы (3), причем $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$, $k_3 = \operatorname{tg}\varphi_3$, $k_4 = \operatorname{tg}\varphi_4$, $0 \le \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4 < \pi$.

Не уменьшая общности, считаем, что $0 \le \varphi_1 < \pi/4$, то есть $0 \le k_1 < 1$.

В силу работы [1] $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_4 - \varphi_3 = \pi/4$.

Полагая, что четыре указанные прямые являются осями симметрии N-типа системы (3), ее можно привести к виду

$$\frac{dx}{d\tau} = (k_2 - k_1)yR_{n-1}(x, y) - k_1K_{234}T_{n-3}(x, y),$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -(k_2 - k_1)xR_{n-1}(x, y) + K_{234}T_{n-3}(x, y), \tag{32}$$

где

$$K_{234} = (y - k_2x)(y - k_3x)(y - k_4x),$$

$$R_{n-1}(x, y) = \sum_{i+j=0}^{n-1} r_{ij}x^iy^j, \qquad T_{n-3}(x, y) = \sum_{i+j=0}^{n-3} t_{ij}x^iy^j.$$

Применяя к системе (32) последовательно преобразования $\bar{x} = x + k_iy$, $\bar{y} = -k_ix + y$, $i = 1, 2$, каждый раз учитывая, что векторное поле получаемых систем симметрично относительно прямых $\bar{x} = 0$ и $\bar{y} = 0$, убеждаемся, что при $n = 3$ и $k_1 \in (0; 1)$ имеют место ограничения на коэффициенты:

$$r_{10} = r_{01} = 0, \qquad 2(r_{02} - r_{20})k_1 + r_{11}(1 - k_1^2) = 0,$$

$$2(r_{02} - r_{20})k_2 + r_{11}(1 - k_2^2) + t_{00}(k_2 + k_3 + k_3k_2^2 - k_4) = 0,$$

где $t_{00} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Таким образом, имеет место

Теорема 7. *Система дифференциальных уравнений* (3) *при* $n = 3$ *имеет четыре оси симметрии* N*-типа* $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, $y = k_4x$ *тогда и только тогда, когда эта система имеет вид*

$$\frac{dx}{dt} = (k_2 - k_1)y(R_{00} + r_{11}xy) - k_1t_{00}K_{234},$$

$$\frac{dy}{dt} = -(k_2 - k_1)x(R_{00} + r_{11}xy) + t_{00}K_{234}, \tag{33}$$

где $k_1 \in (0; 1)$, $k_2 = (1 + k_1)/(1 - k_1)$, $k_3 = -1/k_1$, $k_4 = (k_1 - 1)/(1 + k_1)$,

$$2(r_{02} - r_{20})k_1 + r_{11}(1 - k_1^2) = 0, \tag{34}$$

$$2(r_{02} - r_{20})k_2 + r_{11}(1 - k_2^2) + t_{00}(k_2 + k_3 + k_2^2k_3 - k_4) = 0, \qquad t_{00} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{35}$$

Замечание 3. В системе (33) по необходимости выполняется условие $(r_{02} - r_{20})r_{11} \neq 0$, так как в противном случае из (34) и (35) следует равенство $t_{00} = 0$, и правые части уравнений этой системы не взаимно простые.

Теорема 8. *Система дифференциальных уравнений* (3) *при* $n = 3$ *имеет четыре оси симметрии* N*-типа* $y = 0$, $x = 0$, $y = x$, $y = -x$ *тогда и только тогда, когда эта система имеет вид*

$$\frac{dx}{dt} = yR_{00}, \qquad \frac{dy}{dt} = -x[R_{00} - t_{00}(y^2 - x^2)], \tag{36}$$

где $t_{00} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $r_{02} = r_{20} + t_{00}$.

Для системы (36) в силу неравенства $t_{00} \neq 0$ автоматически выполняется условие $r_{02} - r_{20} \neq 0$.

Далее, полагая, что прямая $y = kx$ — ось симметрии N-типа векторного поля системы (3) при $n = 3$, в соответствии с теоремой 1 придадим системе (3) вид

$$\frac{dx}{dt} = (y - kx)R_2(x, y) - kQ_3(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q_3(x, y), \tag{37}$$

где

$$R_2(x, y) = \sum_{i+j=0}^{2} r_{ij}x^iy^j, \qquad Q_3(x, y) = \sum_{i+j=0}^{3} b_{ij}x^iy^j.$$

Применив к системе (37) преобразование (4) и считая прямую $\bar{y} = 0$ осью симметрии N-типа для полученной системы, можно легко убедиться в выполнении следующих ограничений на коэффициенты:

$$r_{01} = r_{10}k, \qquad r_{11}k^2 - 2(r_{02} - r_{20})k - r_{11} = 0, \qquad b_{01} = (b_{10} + r_{00})k,$$
$$r_{10}k^3 + b_{11}k^2 + (2b_{20} - 2b_{02} + r_{10})k - b_{11} = 0,$$
$$(b_{12} + r_{02})k^3 + (r_{11} - 3b_{03} + 2b_{21})k^2 + (r_{20} - 2b_{12} + 3b_{30})k - b_{21} = 0,$$
$$(b_{30} + r_{20})k^3 - (r_{11} + b_{21})k^2 + (r_{02} + b_{12})k - b_{03} = 0. \tag{38}$$

Теорема 9. *Прямая* $y = kx$ *является осью симметрии* N*-типа системы дифференциальных уравнений* (3) *при* $n = 3$ *тогда и только тогда, когда эта система имеет вид*

$$\frac{dx}{dt} = (y - kx)(r_{00} + r_{10}x + r_{01}y + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2) - kB_1, \qquad \frac{dy}{dt} = B_1,$$

где $B_1 = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3$, $\quad k \in \mathbb{R}$ *и выполняются условия* (38).

Рассмотрим вопрос об осях симметрии N-типа квадратичной системы. Согласно теореме 5 и работе [1] квадратичная система может иметь либо одну ось симметрии, либо три оси симметрии N-типа.

Пусть система (3) при $n = 2$ имеет ось симметрии N-типа $y = kx$. Тогда согласно теореме 1 эта система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = (y - kx)R_1(x, y) - kQ_2(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q_2(x, y), \tag{39}$$

где $R_1(x, y) = r_{00} + r_{10}x + r_{01}y$, $Q_2(x, y) = \sum\limits_{i+j=0}^{2} b_{ij}x^iy^j$.

Применим к системе (39) преобразование (4) и, считая прямую $\bar{y} = 0$ осью симметрии N-типа векторного поля полученной системы, убедимся в выполнении следующих ограничений на коэффициенты:

$$r_{01} = r_{10}k, \; b_{01} = (r_{00} + b_{10})k, \qquad r_{10}k^3 + b_{11}k^2 + (2b_{20} - 2b_{02} + r_{10})k - b_{11} = 0. \tag{40}$$

Теорема 10. *Прямая* $y = kx$ *является осью симметрии* N*-типа поля направлений системы* (3) *при* $n = 2$ *тогда и только тогда, когда эта система имеет вид*

$$\frac{dx}{dt} = (y - kx)(r_{00} + r_{10}x + r_{01}y) - kB_2, \qquad \frac{dy}{dt} = B_2,$$

где $B_2 = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2$ *и коэффициенты удовлетворяют системе* (40).

Пусть далее система (3) при $n = 2$ имеет три оси симметрии N-типа: $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, где $k_1 \in [0; 1/\sqrt{3}) \bigcup (1/\sqrt{3}; \sqrt{3})$, k_2 и k_3 определены по формулам (26). Тогда система (12) при $n = 2$ по теореме 1 может быть приведена к виду

$$\frac{dx}{d\tau} = (k_2 - k_1)y(r_{00} + r_{10}x + r_{01}y) - k_1(y - k_2x)(y - k_3x)t_{00},$$
$$\frac{dy}{d\tau} = -(k_2 - k_1)x(r_{00} + r_{10}x + r_{01}y) + (y - k_2x)(y - k_3x)t_{00}, \tag{41}$$

где $t_{00} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Последовательно применяя к системе (41) преобразования $\bar{x} = x + k_iy$, $\bar{y} = -k_ix + y$ $(i = 1, 2, 3)$ и учитывая после каждого преобразования, что прямая $\bar{y} = 0$ — ось симметрии N-типа поля направлений получаемых в результате указанных преобразований систем, убеждаемся в выполнении следующих условий на коэффициенты системы (41):

$$r_{01} = r_{10}k_1, \quad r_{01} - r_{10}k_2 + t_{00}(1 + k_2k_3) = 0, \quad (k_2 - k_1)(r_{01} - r_{10}k_3) + t_{00}(k_3 - k_1)(1 + k_2k_3) = 0.$$

Учитывая полученные ограничения на коэффициенты, а также формулы (26), запишем систему (41) в виде

$$\frac{dx}{d\mu} = yK_1 - k_1K_2, \qquad \frac{dy}{d\mu} = -xK_1 - K_2, \tag{42}$$

где $d\mu = [(k_1^2 + 1)d\tau]/(1 - 3k_1^2)$, $K_1 = [(\sqrt{3} + 3k_1)r_{00} - 2t_{00}(x + k_1y)]$, $K_2 = t_{00}[(1 - k_1\sqrt{3})y - (k_1 + \sqrt{3})x][(1 + k_1\sqrt{3})y - (k_1 - \sqrt{3})x]/(k_1^2 + 1)$.

Теорема 11. *Система дифференциальных уравнений* (3) *при* $n = 2$ *имеет три оси симметрии* N*-типа:* $y = k_1x$, $y = k_2x$, $y = k_3x$, *где* k_2 *и* k_3 *определяются по формулам* (26), *тогда и только тогда, когда она имеет вид* (42), *причем* $k_1 \in [0; 1/\sqrt{3}) \bigcup (1/\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $t_{00} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

В заключение отметим, что в работе [3] проведено исследование на симметрию дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + \sum\limits_{i+j=2}^{3} c_{ij}x^iy^j}{y + \sum\limits_{i+j=2}^{3} b_{ij}x^iy^j}. \tag{43}$$

Как видно, начало координат уравнения (43) является особой точкой типа «центр» или «фокус». В целях их различения в точке $O(0; 0)$ в [3, 4] найдены условия симметрии. Отметим, что в работах [1, 3, 4] не используется термин «ось симметрии N-типа», введенный нами в настоящей работе и который позволяет записать в более удобной форме полиномиальные системы, что упрощает их последующее качественное исследование.

Библиографический список

1. *Сибирский, К. С.* Принцип симметрии и проблема центра / К. С. Сибирский // Учен. записки Кишинев. ун-та. – 1955. – Т. 17. – С. 27–34.

2. *Андронов, А. А.* Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

3. *Сибирский, К. С.* Условия симметрии поля направлений некоторого дифференциального уравнения / К. С. Сибирский, И. И. Плешкан // Учен. записки Кишинев. ун-та. – 1957. – Т. 29. – С. 11–14.

4. *Сибирский, К. С.* Центры с симметрией поля направлений дифференциального уравнения / К. С. Сибирский // Изв. АН Молд. ССР. – 1963. – № 1. – С. 79–83.