УДК 517.977

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА К ОПТИМИЗАЦИОННЫМ МОДЕЛЯМ ЭКОНОМИКИ

Н. Ю. Трошина, С. В. Трошина*

Саратовский государственный университет,
кафедра математической экономики;
*ООО «Хоум Кредит энд Финанс Банк», Москва
E-mail: troshina.n@gmail.com, svetatroshina@gmail.com

В данной работе рассматриваются три варианта модели работы сбытовой фирмы, представляющие собой дискретные задачи оптимального управления. На основе принципа максимума Понтрягина строится алгоритм решения этих задач. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: оптимальное управление, модель фирмы.

Applicathion the Pontryagin's Maximum Principle to Optimal Economics Models

N. Yu. Troshina, S. V. Troshina*

Saratov State University,
Chair of Mathematical Economics;
*Home Credit and Financ Bank Limited Liability Company, Moscow
E-mail: troshina.n@gmail.com, svetatroshina@gmail.com

In this paper three models of firm are considerd as the discrete optimal control problems. The algorithm for solution is based on Pontryagin's Maximum Principle. The paper contains numerical examples.

Key words: optimal control, model firm.

В статье метод, разработанный в [1–3] для решения дискретных линейно-квадратичных задач оптимального управления, применяется к задачам оптимизации деятельности торгового предприятия. Метод основан на применении принципа максимума Понтрягина и приводит задачу нахождения оптимального управления (цены товара) к решению конечного числа систем линейных алгебраических уравнений. Наиболее общие модели производственно-сбытовой деятельности фирмы описаны в [4], там же содержится обширный список литературы по этому вопросу. В настоящей статье строится модель, учитывающая затраты на хранение и продажу.

Будем рассматривать некоторый период времени T (например, дней). Обозначим объем товаров на складе в начале дня через $x(t)$ $(t = 0, \dots, T)$, причем, известно, что $x(0) = N$. Спрос на товар обозначим через $V(t)$ (это объем продажи за 1 день). Динамику продаж можно описать уравнением:

$$x(t+1) = x(t) - V(t) - kx(t), \qquad t = 0, \dots, T-1,$$

где k — коэффициент порчи. Обозначим затраты дня через $Y(t)$. Они складываются из затрат на продажу и хранение. Пусть n — затраты на продажу 1 единицы товара, m — затраты на хранение 1 единицы товара. Динамика изменения затрат:

$$Y(t+1) = Y(t) + nV(t) + mx(t), \qquad t = 0, \dots, T-1.$$

Пусть $u(t)$ — цена 1 единицы товара, назначенная продавцом на данный день. Тогда дневной доход от продажи составит $V(t)u(t)$. Будем рассматривать линейную функцию спроса, положим $V(t) = c_1u(t) + c_2$, где c_1, c_2 — заданные коэффициенты. Таким образом, деятельность торгового предприятия моделируется следующей системой уравнений:

$$x(t+1) = x(t) - c_1u(t) - c_2 - kx(t), \qquad t = 0, \dots, T-1, \quad x(0) = N, \tag{1}$$

$$Y(t+1) = Y(t) + n(c_1u(t) + c_2) + mx(t), \qquad t = 0, \dots, T-1, \quad Y(0) = 0. \tag{2}$$

Задача 1. Введем критерий оптимальности деятельности предприятия, учитывающий следующие показатели. Цена на товар должна определяться таким образом, чтобы общий доход был как можно больше, а ежедневные расходы приближались к запланированным (пусть они будут определяться величиной $a(t)$). Цена при этом должна колебаться в некоторых заданных границах, определяемых величиной $r(t)$.

Кроме того, будем предполагать, что в конце срока товар будет полностью продан, а на переменные $x(t)$, $Y(t)$ наложим ограничения неотрицательности. В результате придем к следующей задаче оптимального управления: требуется минимизировать квадратичный функционал

$$I = \alpha \sum_{t=0}^{T} (Y(t) - a(t))^2 - \beta_1 \sum_{t=0}^{T-1} V(t)u(t) + \beta_2 \sum_{t=0}^{T-1} (u(t) - r(t))^2 \to \min$$

(где α, β_1, β_2 — неотрицательные весовые коэффициенты) на траекториях системы (1), (2) при ограничениях:

$$x(0) = N, \quad Y(0) = 0, \quad x(T) = 0, \quad x(t) \geq 0, \quad Y(t) \geq 0, \quad t = 0, \ldots, T.$$

Преобразуем полученную задачу. Сделаем замену: $y(t) = Y(t) - a(t)$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$y(t+1) = mx(t) + y(t) + n(c_1 u(t) + c_2) + a(t) - a(t+1), \qquad t = 0, \ldots, T-1.$$

Учитывая вид функции спроса, получим:

$$I = \alpha \sum_{t=0}^{T} y^2(t) + \sum_{t=0}^{T-1} [cu^2(t) + d(t)u(t) + \beta_2 r^2(t)],$$

где $c = \beta_2 - \beta_1 c_1$, $d(t) = -\beta_1 c_2 - 2\beta_2 r(t)$.

Преобразуем задачу к векторной форме. Введем обозначения: $A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$, $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t = 0, \ldots T$, $b = \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_1 n \end{pmatrix}$, $\delta(t) = \begin{pmatrix} -c_2 \\ a(t) - a(t+1) + c_2 n \end{pmatrix}$, $t = 0, \ldots T-1$, $z_0 = \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -a(t) \end{pmatrix}$, $t = 1, \ldots T$, $a(0) = 0$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$.

В результате получим задачу оптимального управления в следующей постановке:

$$z(t+1) = Az(t) + bu(t) + \delta(t), \qquad t = 0, \ldots T-1, \tag{3}$$

$$z(0) = z_0, \qquad x(T) = 0, \tag{4}$$

$$z(t) \geq \bar{z}(t), \qquad t = 0, \ldots, T, \tag{5}$$

$$I(z, u) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T} \langle Mz(t), z(t) \rangle + \sum_{t=0}^{T-1} [cu^2(t) + d(t)u(t) + \beta_2 r^2(t)] \to \min, \tag{6}$$

где $x = \{x(0), x(1), \ldots, x(T)\}$ — дискретная траектория, $u = \{u(0), u(1), \ldots, u(T-1)\}$ — дискретное управление, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов.

Решение задачи (3)–(6) будем обозначать $(\hat{z}, \hat{u})$.

При предположении управляемости системы (3) и выполнении условия Слейтера (существует допустимая пара (z_0, u_0) такая, что для любого t $z_0(t) > \bar{z}(t)$) для полученной задачи справедлива

Теорема 1. *Если $(\hat{z}, \hat{u})$ — решение задачи (3)-(6) то существуют вектор $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))^* \geq 0$ $(t = 0, \ldots, T)$, вектор $\bar{\omega} = (\omega, 0)^*$ и вектор-функция $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))^*$ $(t = 0, \ldots, T)$, для которых выполняется сопряженное уравнение:*

$$\psi(t) = A^*(t)\psi(t+1) - M\hat{z}(t) + \gamma(t), \qquad t = 0, \ldots, T-1,$$

а также условие трансверсальности:

$$\psi(T) = -M\hat{z}(T) + \gamma(T) + \bar{\omega}$$

и условия дополняющей нежесткости:

$$\gamma_1(t)\hat{x}(t) = 0, \qquad \gamma_2(t)(\hat{y}(t) + a(t)) = 0, \qquad t = 0, \ldots, T.$$

При этом оптимальное управление определяется по формуле

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2c}(b^*\psi(t+1) - d(t)), \qquad t = 0, \ldots, T-1 \tag{7}$$

(здесь и в дальнейшем знак $*$ означает транспонирование).

Доказательство. Применим теорию Дубовицкого – Милютина [5]. В пространстве пар (z, u) рассмотрим конусы вариаций и их сопряженные, соответствующие функционалу (6) и ограничениям (3)–(5). Используя представления для сопряженных конусов (см. [3, 6]), запишем уравнение Эйлера для пары (z, u), удовлетворяющей уравнению $z(t+1) = Az(t)+bu(t)$ и условию $z(0) = 0$. Будем иметь:

$$-\lambda_o \sum_{t=0}^{T} \langle M\hat{z}(t), z(t)\rangle - \lambda_0 \sum_{t=0}^{T-1} (2c\hat{u}(t) + d(t))u(t) + \sum_{t=0}^{T} \langle \gamma(t), z(t)\rangle + \langle \bar{\omega}, z(T)\rangle = 0,$$

где $\lambda_o \geq 0$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\ \gamma_2(t))^* \geq 0$, причем, $\gamma_1(t)\hat{x}(t) = 0$, $\gamma_2(t)(\hat{y}(t) + a(t)) = 0$, $t = 0, \ldots, T$.

Для рассматриваемой пары (z, u) и для произвольной вектор-функции $\psi(t) \in R^2$ $(t = 0, \ldots, T)$ справедливо равенство

$$\sum_{t=0}^{T-1} \langle -\lambda_0 M\hat{z}(t) - \psi(t) + A^*\psi(t+1) + \gamma(t), z(t)\rangle + \langle -\lambda_0 M\hat{z}(T) + \bar{\omega} - \psi(T) + \gamma(T), z(T)\rangle +$$
$$+ \sum_{t=0}^{T-1} [-\lambda_0(2c\hat{u}(t) + d(t)) + \langle \psi(t+1), b\rangle] u(t) = 0.$$

Выберем $\psi(t)$ так, чтобы выполнялась сопряженная система и условие трансверсальности:

$$\psi(t) = A^*\psi(t+1) - \lambda_0 M\hat{z}(t) + \gamma(t), \qquad \psi(T) = -\lambda_0 M\hat{z}(T) + \gamma(T) + \bar{\omega}.$$

В силу произвольности $u(t)$ получим:

$$\lambda_0(2c\hat{u}(t) + d(t)) = <\psi(t+1), b>, \qquad t = 0, \ldots, T-1.$$

Так как выполняется условие Слейтера, то можно показать, что $\lambda_0 \neq 0$, т. е. можно положить $\lambda_0 = 1$. Поэтому для оптимального управления будем иметь формулу (7). Теорема доказана.

Можно доказать, что необходимые условия оптимальности, полученные в теореме 1, являются также и достаточными.

Запишем условие трансверсальности в координатах:

$$\psi_1(T) = \gamma_1(T) + \omega, \qquad \psi_2(T) = -2\alpha y(T) + \gamma_2(T).$$

Обозначим

$$B = \frac{1}{2c} bb^*, \qquad s(t) = \delta(t) - \frac{d(t)}{2c} b. \tag{8}$$

Для нахождения оптимального управления будем иметь следующую краевую задачу (краевая задача принципа максимума):

$$z(t+1) = Az(t) + B\psi(t+1) + s(t), \tag{9}$$
$$\psi(t) = A^*\psi(t+1) - Mz(t) + \gamma(t), \qquad t = 0, \ldots, T-1, \tag{10}$$
$$z(0) = z_0, \tag{11}$$
$$x(T) = 0, \tag{12}$$
$$\psi_2(T) = -2\alpha y(T) + \gamma_2(T). \tag{13}$$

Нужно найти решение этой задачи при условиях:

$$\gamma_1(t)x(t) = 0, \qquad \gamma_2(t)(y(t) + a(t)) = 0, \quad t = 0, \ldots, T,$$
$$x(t) \geq 0, \quad y(t) \geq -a(t), \quad \gamma_1(t), \quad \gamma_2(t) \geq 0, \quad t = 0, \ldots, T.$$

Построение алгоритма решения полученной краевой задачи основано на следующей теореме.

Теорема 2. *Если векторы $z(t)$, $\psi(t)$, удовлетворяют уравнениям (9), (10), то они выражаются через граничные значения $z(T)$, $\psi(T)$ по формулам:*

$$z(t) = A_t z(T) + B_t\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} R_t(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} P_t(\tau)s(\tau), \tag{14}$$

$$\psi(t) = C_t z(T) + D_t\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} N_t(\tau)s(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} Q_t(\tau)\gamma(\tau) + \gamma(t), \quad t = 0, \ldots, T-1, \tag{15}$$

где матричные коэффициенты A_t, B_t, C_t, D_t, $P_t(\tau)$, $Q_t(\tau)$, $N_t(\tau)$, $R_t(\tau)$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$A_{T-1} = A^{-1}, \qquad B_{T-1} = -A^{-1}B, \qquad P_{T-1}(T-1) = -A^{-1}, \qquad R_{T-1}(T-1) = 0,$$
$$C_{T-1} = -MA_{T-1}, \qquad D_{T-1} = A^* - MB_{T-1}, \qquad N_{T-1}(T-1) = -MP_{T-1}(T-1),$$
$$Q_{T-1}(T-1) = 0;$$

для $t = 0, \dots, T-2$:

$$A_t = A^{-1}(A_{t+1} - BC_{t+1}), \qquad B_t = A^{-1}(B_{t+1} - BD_{t+1}),$$
$$P_t(\tau) = A^{-1}(P_{t+1}(\tau) - BN_{t+1}(\tau)) \qquad (\tau = t+1, \dots, T-2), \qquad P_t(t) = -A^{-1},$$
$$R_t(\tau) = A^{-1}(R_{t+1}(\tau) - BQ_{t+1}(\tau)) \qquad (\tau = t+1, \dots, T-2),$$
$$R_{t+1}(t) = -A^{-1}B, \qquad R_t(t) = 0, \qquad C_t = A^*C_{t+1} - MA_t, \qquad D_t = A^*D_{t+1} - MB_t,$$
$$N_t(\tau) = A^*N_{t+1}(\tau) - MP_t(\tau) \qquad (\tau = t+1, \dots, T-2), \qquad N_t(t) = -MP_t(t),$$
$$Q_t(\tau) = A^*Q_{t+1}(\tau) - MR_t(\tau) \qquad (\tau = t+1, \dots, T-2),$$
$$Q_t(t+1) = A^* - MR_t(t), \qquad Q_t(t) = 0.$$

Доказательство этой теоремы проводится по индукции аналогично доказательству теоремы 3 из работы [3].

Используя граничные условия, исключим из формул (14), (15) переменные $z(T)$, $\psi(T)$. Для этого запишем формулу (14) для $t = 0$:

$$z(0) = A_0 z(T) + B_0\psi(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} R_0(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} P_0(\tau)s(\tau).$$

Предполагая, что B_0 — невырожденная матрица, и учитывая граничное условие (11), отсюда найдем:

$$\psi(T) = B_0^{-1}z_0 - B_0^{-1}[A_0 z(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} R_0(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} P_0(\tau)s(\tau)]. \tag{16}$$

Обозначим: $[W]_i$ — i-ая строка матрицы W; $[W]_{ij}$ — (ij)-й элемент матрицы W. Если запишем (16) в координатах, то, учитывая (12) и условие трансверсальности (13), найдем:

$$y(T) = h\{\gamma_2(T) - [B_0^{-1}]_{21}N + \sum_{\tau=0}^{T-1}[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2\gamma(\tau) + + \sum_{\tau=0}^{T-1}[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 s(\tau)\}, \tag{17}$$

$$\psi_1(T) = [B_0^{-1}]_{11}N + [-B_0^{-1}A_0]_{12}h\{\gamma_2(T) - [B_0^{-1}]_{21}N + \sum_{\tau=0}^{T-1}[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2\gamma(\tau) +$$
$$+ \sum_{\tau=0}^{T-1}[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 s(\tau)\} + \sum_{\tau=0}^{T-1}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1 s(\tau), \tag{18}$$

где $h = (2\alpha + [-B_0^{-1}A_0]_{22})^{-1}$, причем в случае, когда выражение в скобках равно нулю, можно изменить параметр α.

Подставим найденное значение $y(T)$ в (13):

$$\psi_2(T) = -2\alpha h\{\gamma_2(T) - [B_0^{-1}]_{21}N + \sum_{\tau=0}^{T-1}[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1}[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 s(\tau)\} + \gamma_2(T). \tag{19}$$

Запишем уравнения (14), (15) в координатах, а затем подставим в полученные равенства $x(T) = 0$, а также значения $y(T)$, $\psi_1(T)$, $\psi_2(T)$ согласно формулам (17)–(19). После соответствующих преобразований получим:

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} K_t(\tau)\gamma(\tau) + (q_t + [B_t]_{12})\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(\tau)s(\tau) -$$
$$-q_t[B_0^{-1}]_{21}N + [B_t]_{11}[B_0^{-1}]_{11}N, \quad t = 1, \dots, T-1, \tag{20}$$

где $q_t = ([A_t]_{12} + [B_t]_{11}[-B_0^{-1}A_0]_{12} - 2\alpha[B_t]_{12})h$, $t = 1, \ldots, T-1$, а строки $K_t(\tau)$, $L_t(\tau)$ определяются следующим образом:

$$K_t(\tau) = \begin{cases} q_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [B_t]_{11}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1, & \tau = 0, \ldots, t-1, \\ q_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [B_t]_{11}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1 + [R_t(\tau)]_1, & \tau = t, \ldots, T-1, \end{cases}$$

$$L_t(\tau) = \begin{cases} q_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 + [B_t]_{11}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1, & \tau = 0, \ldots, t-1, \\ q_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 + [B_t]_{11}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1 + [P_t(\tau)]_1, & \tau = t, \ldots, T-1; \end{cases}$$

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} G_t(\tau)\gamma(\tau) + (f_t + [B_t]_{22})\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H_t(\tau)s(\tau) - \\ - f_t[B_0^{-1}]_{21}N + [B_t]_{21}[B_0^{-1}]_{11}N, \qquad t = 1, \ldots, T-1, \tag{21}$$

где $f_t = ([A_t]_{22} + [B_t]_{21}[-B_0^{-1}A_0]_{12} - 2\alpha[B_t]_{22})h$, $t = 1, \ldots, T-1$, а строки $G_t(\tau)$, $H_t(\tau)$ определяются следующими формулами:

$$G_t(\tau) = \begin{cases} f_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [B_t]_{21}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1, & \tau = 0, \ldots, t-1, \\ f_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [B_t]_{21}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1 + [R_t(\tau)]_2, & \tau = t, \ldots, T-1, \end{cases}$$

$$H_t(\tau) = \begin{cases} f_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 + [B_t]_{21}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1, & \tau = 0, \ldots, t-1, \\ f_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 + [B_t]_{21}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1 + [P_t(\tau)]_2, & \tau = t, \ldots, T-1; \end{cases}$$

$$y(T) = \sum_{\tau=0}^{T-1} G(\tau)\gamma(\tau) + h\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H(\tau)s(\tau) - h[B_0^{-1}]_{21}N, \tag{22}$$

где $G(\tau) = h[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2$, $H(\tau) = [B_0^{-1}P_0(\tau)]_2$;

$$\psi_1(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} I_t(\tau)\gamma(\tau) + (\chi_t + [D_t]_{12})\gamma_2(T) + \gamma_1(t) + \\ + \sum_{\tau=0}^{T-1} J_t(\tau)s(\tau) - \chi_t[B_0^{-1}]_{21}N + [D_t]_{11}[B_0^{-1}]_{11}N, \qquad t = 0, \ldots, T-1, \tag{23}$$

где $\chi_t = ([C_t]_{12} + [D_t]_{11}[-B_0^{-1}A_0]_{12} - 2\alpha[D_t]_{12})h$, $t = 0, \ldots, T-1$, а строки $I_t(\tau)$, $J_t(\tau)$ определяются следующими формулами:

$$I_t(\tau) = \begin{cases} \chi_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [D_t]_{11}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1, & \tau = 0, \ldots, t-1, \\ \chi_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [D_t]_{11}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1 + [Q_t(\tau)]_1, & \tau = t, \ldots, T-1, \end{cases}$$

$$J_t(\tau) = \begin{cases} \chi_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 + [D_t]_{11}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1, & \tau = 0, \ldots, t-1, \\ q_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2 + [D_t]_{11}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1 + [N_t(\tau)]_1, & \tau = t, \ldots, T-1; \end{cases}$$

$$\psi_2(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} V_t(\tau)\gamma(\tau) + (\phi_t + [D_t]_{22})\gamma_2(T) + \gamma_2(t) + \sum_{\tau=0}^{T-1} F_t(\tau)s(\tau) - \\ - \phi_t[B_0^{-1}]_{21}N + [D_t]_{21}[B_0^{-1}]_{11}N, \tag{24}$$

где $\phi_t = ([C_t]_{22} + [D_t]_{21}[-B_0^{-1}A_0]_{12} - 2\alpha[D_t]_{22})h$, $t = 0, \ldots, T-1$, а строки $V_t(\tau)$, $F_t(\tau)$ определяются следующими формулами:

$$V_t(\tau) = \begin{cases} \phi_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [D_t]_{21}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1, & \tau = 0, \ldots, t-1, \\ V_t(\tau) = \varphi_t[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2 + [D_t]_{21}[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1 + [Q_t(\tau)]_2, & \tau = t, \ldots, T-1, \end{cases}$$

$$F_t(\tau)=\begin{cases}\varphi_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2+[D_t]_{21}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1, & \tau=0,\ldots,t-1,\\ \varphi_t[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2+[D_t]_{21}[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1+[N_t(\tau)]_2, & \tau=t,\ldots,T-1;\end{cases}$$

$$\psi_1(T)=\sum_{\tau=0}^{T-1}I_T(\tau)\gamma(\tau)+[-B_0^{-1}A_0]_{12}h\gamma_2(T)+\sum_{\tau=0}^{T-1}J_T(\tau)s(\tau)+$$
$$+[B_0^{-1}]_{11}N-[-B_0^{-1}A_0]_{12}h[B_0^{-1}]_{21}N, \tag{25}$$

где строки $I_T(\tau), J_T(\tau)$ определяются следующими формулами:

$$I_T(\tau)=[-B_0^{-1}A_0]_{12}h[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2+[-B_0^{-1}R_0(\tau)]_1,$$
$$J_T(\tau)=[-B_0^{-1}A_0]_{12}h[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2+[-B_0^{-1}P_0(\tau)]_1;$$

$$\psi_2(T)=\sum_{\tau=0}^{T-1}V_T(\tau)\gamma(\tau)+(1-2\alpha h)\gamma_2(T)+\sum_{\tau=0}^{T-1}F_T(\tau)s(\tau)+2\alpha h[B_0^{-1}]_{21}N, \tag{26}$$

где строки $V_T(\tau),\ F_T(\tau)$ определяются следующими формулами:

$$V_T(\tau)=-2\alpha h[B_0^{-1}R_0(\tau)]_2,\qquad F_T(\tau)=-2\alpha h[B_0^{-1}P_0(\tau)]_2.$$

Из условий дополняющей нежесткости получим уравнения для нахожления множителей $\gamma_1(t),\gamma_2(t)$:

$$\gamma_1(t)(\sum_{\tau=0}^{T-1}K_t(\tau)\gamma(\tau)+(q_t+[B_t]_{12})\gamma_2(T)+$$
$$+\sum_{\tau=0}^{T-1}L_t(\tau)s(\tau)-q_t[B_0^{-1}]_{21}N+[B_t]_{11}[B_0^{-1}]_{11}N)=0,\quad t=0,\ldots,T,$$
$$\gamma_2(t)(\sum_{\tau=0}^{T-1}G_t(\tau)\gamma(\tau)+(f_t+[B_t]_{22})\gamma_2(T)+\sum_{\tau=0}^{T-1}H_t(\tau)s(\tau)-$$
$$-f_t[B_0^{-1}]_{21}N+[B_t]_{21}[B_0^{-1}]_{11}N+a(t))=0,\quad t=0,\ldots,T-1,$$
$$\gamma_2(T)(\sum_{\tau=0}^{T-1}G(\tau)\gamma(\tau)+h\gamma_2(T)+\sum_{\tau=0}^{T-1}H(\tau)s(\tau)-h[B_0^{-1}]_{21}N+a(T))=0.$$

Существование решения полученных уравнений вытекает из существования решения исходной задачи.

Задача 2. В задаче 1 положим при всех t $a(t)=0$, $\beta_2=0$ и введем ограничение на цену $u(t)\geq p$, где p задано и $p>0$. Получим следующую оптимизационную модель:

$$x(t+1)=x(t)-c_1u(t)-c_2-kx(t),\quad t=0,\ldots,T-1,$$
$$Y(t+1)=Y(t)+n(c_1u(t)+c_2)+mx(t),\quad t=0,\ldots,T-1,$$
$$x(0)=N,\quad Y(0)=0,\quad x(T)=0,$$
$$x(t)\geq 0,\quad Y(t)\geq 0,\quad t=0,\ldots,T,\quad u(t)\geq p,\quad t=0,\ldots,T-1,$$
$$I(x,Y,u)=\alpha\sum_{t=0}^{T}(Y(t))^2-\beta_1\sum_{t=0}^{T-1}V(t)u(t)\to\min.$$

В векторной форме она будет иметь вид

$$z(t+1)=Az(t)+bu(t)+\delta,\quad t=0,\ldots,T-1, \tag{27}$$
$$z(0)=z_0,\quad x(T)=0,\quad z(t)\geq 0,\quad t=0,\ldots,T,\quad u(t)\geq p,\quad t=0,\ldots,T-1, \tag{28}$$
$$I(z,u)=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T}<Mz(t),z(t)>+\sum_{t=0}^{T-1}[cu^2(t)+du(t)]\to\min, \tag{29}$$

где $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$, $\delta = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_2 n \end{pmatrix}$, $c = -\beta_1 c_1$, $d = -\beta_1 c_2$. Остальные обозначения те же, что и в задаче 1.

При тех же условиях, что и раньше, справедлива

Теорема 3. *Если (z, u) — решение задачи (27)–(29), то существуют числа $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t) \geq 0$ $(t = 0, \ldots, T)$, $\mu(t) \geq 0$ $(t = 0, \ldots, T-1)$, вектор $\bar{\omega} = (\omega, 0)^*$ и вектор-функция $\psi(t) \in R^2$, для которых выполняется сопряженное уравнение:*

$$\psi(t) = A^*(t)\psi(t+1) - Mz(t) + \gamma(t), \quad t = 0, \ldots, T-1,$$

а также условие трансверсальности:

$$\psi(T) = -Mz(T) + \gamma(T) + \bar{\omega}$$

и условия дополняющей нежесткости:

$$\gamma_1(t)x(t) = 0, \quad \gamma_2(t)Y(t), \quad t = 0, \ldots, T, \qquad \mu(t)(u(t) - p) = 0, \quad t = 0, \ldots, T-1.$$

При этом оптимальное управление определяется по формуле

$$u(t) = \frac{1}{2c}(b^*\psi(t+1) - d + \mu(t)), \quad t = 0, \ldots, T-1. \tag{30}$$

Доказать эту теорему можно, используя доказательство теоремы 1 настоящей статьи и теоремы 1 из работы [1].

Обозначим:

$$S(t) = \delta(t) - \frac{d - \mu(t)}{2c}b = s(t) + \frac{\mu(t)}{2c}b. \tag{31}$$

Краевая задача принципа максимума в данном случае будет иметь вид

$$z(t+1) = Az(t) + B\psi(t+1) + S(t), \tag{32}$$
$$\psi(t) = A^*\psi(t+1) - Mz(t) + \gamma(t), \qquad t = 0, \ldots, T-1, \tag{33}$$
$$z(0) = z_0, \qquad x(T) = 0, \tag{34}$$
$$\psi_2(T) = -2\alpha Y(T) + \gamma_2(T), \tag{35}$$
$$\gamma_1(t)x(t) = 0, \quad \gamma_2(t)Y(t) = 0, \quad t = 0, \ldots, T, \tag{36}$$
$$\mu(t)[\frac{1}{2c}(b^*\psi(t+1) - d + \mu(t)) - p] = 0, \quad t = 0, \ldots, T-1, \tag{37}$$
$$x(t),\ Y(t),\ \gamma_1(t),\ \gamma_2(t) \geq 0, \quad t = 0, \ldots, T, \qquad \mu(t) \geq 0, \quad t = 0, \ldots, T-1.$$

Теорема 4. Если векторы $z(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют уравнениям (32), (33), то они выражаются через граничные значения $z(T), \psi(T)$ по формулам:

$$z(t) = A_t z(T) + B_t\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} R_t(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} P_t(\tau)S(\tau),$$

$$\psi(t) = C_t z(T) + D_t\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} N_t(\tau)S(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} Q_t(\tau)\gamma(\tau) + \gamma(t), \qquad t = 0, \ldots, T-1,$$

где матричные коэффициенты A_t, B_t, C_t, D_t, $P_t(\tau)$, $Q_t(\tau)$, $N_t(\tau)$, $R_t(\tau)$ определяются теми же рекуррентными соотношениями, что и в теореме 2.

Доказательство этой теоремы в точности совпадает с доказательством теоремы 2, так как уравнение (32) отличается от уравнения (9) лишь свободным членом $S(t)$.

Очевидно, что для задачи 2 будут иметь место формулы (20)–(26), если в них заменить $s(t)$ на $S(t)$.

Введем дополнительные обозначения:

$$k_t = q_t + [B_t]_{12}, \quad t = 1, \ldots T-1, \qquad g_t = f_t + [B_t]_{22}, \quad t = 1, \ldots T-1,$$

$$\sigma(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(\tau)s(\tau) - q_t[B_0^{-1}]_{21}N + [B_t]_{11}[B_0^{-1}]_{11}N, \quad t = 1, \dots T-1,$$

$$\rho(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} H_t(\tau)s(\tau) - f_t[B_0^{-1}]_{21}N + [B_t]_{21}[B_0^{-1}]_{11}N, \quad t = 1, \dots, T-1,$$

$$\rho(T) = \sum_{\tau=0}^{T-1} H(\tau)s(\tau) - h[B_0^{-1}]_{21}N,$$

$$I_t = \chi_t + [D_t]_{12}, \ r_t = 1, \quad t = 0, \dots, T-1, \qquad I_T = [-B_0^{-1}A_0]_{12}h, \ r_T = 0,$$

$$V_t = \varphi_t + [D_t]_{22}, \quad t = 0, \dots, T-1, \qquad V_T = 1 - 2\alpha(2\alpha + [-B_0^{-1}A_0]_{22})^{-1},$$

$$\nu(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} J_t(\tau)s(\tau) - \chi_t[B_0^{-1}]_{21}N + [D_t]_{11}[B_0^{-1}]_{11}N,$$

$$\nu(T) = \sum_{\tau=0}^{T-1} J_T(\tau)s(\tau) + [B_0^{-1}]_{11}N - [-B_0^{-1}A_0]_{12}h[B_0^{-1}]_{21}N,$$

$$\omega(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} F_t(\tau)s(\tau) - \varphi_t[B_0^{-1}]_{21}N + [D_t]_{21}[B_0^{-1}]_{11}N,$$

$$\omega(T) = \sum_{\tau=0}^{T-1} F_T(\tau)s(\tau) + 2\alpha(2\alpha + [-B_0^{-1}A_0]_{22})^{-1}[B_0^{-1}]_{21}N.$$

Тогда для переменных, удовлетворяющих равенствам (32)–(35), будем иметь:

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} K_t(\tau)\gamma(\tau) + k_t\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \sigma(t), \quad t = 1, \dots T-1,$$

$$Y(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} G_t(\tau)\gamma(\tau) + g_t\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \rho(t), \quad t = 1, \dots T-1,$$

$$Y(T) = \sum_{\tau=0}^{T-1} G(\tau)\gamma(\tau) + h\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \rho(T),$$

$$\psi_1(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} I_t(\tau)\gamma(\tau) + I_t\gamma_2(T) + r_t\gamma_1(t) + \sum_{\tau=0}^{T-1} J_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \nu(t), \quad t = 0, \dots T,$$

$$\psi_2(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} V_t(\tau)\gamma(\tau) + V_t\gamma_2(T) + r_t\gamma_2(t) + \sum_{\tau=0}^{T-1} F_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \omega(t), \quad t = 0, \dots T,$$

Согласно (30) для оптимального управления получим:

$$u(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} M_{t+1}(\tau)\gamma(\tau) + m_{t+1}\gamma_2(T) + \frac{b_1 r_{t+1}}{2c}\gamma_1(t+1) + \frac{b_2 r_{t+1}}{2c}\gamma_2(t+1) +$$

$$+ \sum_{\tau=0}^{T-1} E_{t+1}(\tau)\mu(\tau) + \frac{b_1}{2c}\nu(t+1) + \frac{b_2}{2c}\omega(t+1) - \frac{1}{2c}d + \frac{1}{2c}\mu(t),$$

где

$$M_t(\tau) = \frac{b_1}{2c}I_t(\tau) + \frac{b_2}{2c}V_t(\tau), \quad m_t = \frac{b_1}{2c}I_t + \frac{b_2}{2c}V_t, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

$$m_T = \frac{b_1}{2c}I_T + \frac{b_2}{2c}V_T, \quad E_t(\tau) = \frac{b_1}{2c}J_t(\tau)\frac{b}{2c} + \frac{b_2}{2c}F_t(\tau)\frac{b}{2c}.$$

Из условий дополняющей нежесткости (36)–(37) получим уравнения для нахождения множителей $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\mu(t)$:

$$\gamma_1(t)\left(\sum_{\tau=0}^{T-1} K_t(\tau)\gamma(\tau) + k_t\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \sigma(t)\right) = 0, \qquad t = 0,\ldots,T,$$

$$\gamma_2(t)\left(\sum_{\tau=0}^{T-1} G_t(\tau)\gamma(\tau) + g_t\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \rho(t)\right) = 0, \qquad t = 0,\ldots,T-1,$$

$$\gamma_2(T)\left(\sum_{\tau=0}^{T-1} G(\tau)\gamma(\tau) + h\gamma_2(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \rho(T)\right) = 0,$$

$$\mu(t)\left(\sum_{\tau=0}^{T-1} M_{t+1}(\tau)\gamma(\tau) + m_{t+1}\gamma_2(T) + \frac{b_1 r_{t+1}}{2c}\gamma_1(t+1) + \frac{b_2 r_{t+1}}{2c}\gamma_2(t+1) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\tau=0}^{T-1} E_{t+1}(\tau)\mu(\tau) + \frac{b_1}{2c}\nu(t+1) + \frac{b_2}{2c}\omega(t+1) - \frac{1}{2c}d + \frac{1}{2c}\mu(t) - p\right) = 0, \qquad t = 0,\ldots,T-1.$$

Задача 3. В задаче 2 отбросим ограничение на правом конце $x(T) = N$ и добавим в критерий качества слагаемое $\beta_3 x(T)$ $(\beta_3 \succ 0)$. Получим следующую оптимизационную модель:

$$x(t+1) = x(t) - c_1 u(t) - c_2 - kx(t), \qquad t = 0,\ldots,T-1,$$

$$Y(t+1) = Y(t) + n(c_1 u(t) + c_2) + mx(t), \qquad t = 0,\ldots,T-1,$$

$$x(0) = N, \qquad Y(0) = 0,$$

$$x(t) \ge 0, \qquad Y(t) \ge 0, \qquad t = 0,\ldots,T, \qquad u(t) \ge p, \qquad t = 0,\ldots T-1,$$

$$I(x,Y,u) = \alpha\sum_{t=0}^{T}(Y(t))^2 - \beta_1\sum_{t=0}^{T-1} V(t)u(t) + \beta_3 x(T) \to \min.$$

В векторной форме полученная модель запишется следующим образом:

$$z(t+1) = Az(t) + bu(t) + \delta, \qquad t = 0,\ldots,T-1,$$

$$z(0) = z_0, \quad z(t) \ge 0, \quad t = 0,\ldots,T, \qquad u(t) \ge p, \quad t = 0,\ldots,T-1,$$

$$I(z,u) = \frac{1}{2}\alpha\sum_{t=0}^{T}\langle Mz(t), z(t)\rangle + \langle l, z(T)\rangle + \sum_{t=0}^{T-1}[cu^2(t) + du(t)] \to \min,$$

где $l = (\beta_3, 0)^*$. Остальные обозначения те же, что и раньше.

Теорема 5. *Если (z,u) — решение задачи 3, то существуют числа $\gamma_1(t) \ge 0$, $\gamma_2(t) \ge 0$ $(t = 0,\ldots,T)$, $\mu(t) \ge 0$ $(t = 0,\ldots,T-1)$ и вектор-функция $\psi(t) \in R^2$, для которых выполняется сопряженное уравнение:*

$$\psi(t) = A^*(t)\psi(t+1) - Mz(t) + \gamma(t), \qquad t = 0,\ldots,T-1,$$

а также условие трансверсальности:

$$\psi(T) = -Mz(T) + \gamma(T) + l$$

и условия дополняющей нежесткости:

$$\gamma_1(t)x(t) = 0, \quad \gamma_2(t)Y(t) = 0, \quad t = 0,\ldots,T, \quad \mu(t)(u(t) - p) = 0, \quad t = 0,\ldots,T-1.$$

При этом оптимальное управление определяется по формуле

$$u(t) = \frac{1}{2c}(b^*\psi(t+1) - d + \mu(t)), \qquad t = 0,\ldots,T-1.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теорем 1, 3.

Выпишем краевую задачу принципа максимума:

$$z(t+1) = Az(t) + B\psi(t+1) + S(t),$$

$$\psi(t) = A^*\psi(t+1) - Mz(t) + \gamma(t), \quad t = 0, \dots, T-1, z(0) = z_0, \quad \psi(T) = -Mz(T) + \gamma(T) + l,$$

$$\gamma_1(t)x(t) = 0, \quad \gamma_2(t)Y(t) = 0, \quad t = 0, \dots, T,$$

$$\mu(t)\Big[\frac{1}{2c}(b^*\psi(t+1) - d + \mu(t)) - p\Big] = 0, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

$$x(t),\, Y(t),\, \gamma_1(t),\, \gamma_2(t) \geq 0, \qquad t = 0, \dots, T, \quad \mu(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Здесь через $S(t)$ обозначено то же, что и в задаче 2 (формула (31)).

Для построенной модели так же, как и в предыдущем случае, имеет место теорема 2, если в формулировке заменить $s(t)$ на $S(t)$

Как и в предыдущих задачах, с помощью этой теоремы найдем выражение переменных $z(t), \psi(t)$ через множители $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\mu(t)$:

$$z(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} K_t(\tau)\gamma(\tau) + k_t\gamma(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + \sigma_t, \qquad t = 1, \dots T,$$

$$\psi(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} V_t(\tau)\gamma(\tau) + \gamma(t) + v_t\gamma(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} F_t(\tau)\frac{b}{2c}\mu(\tau) + h_t, \qquad t = 0, \dots T. \tag{38}$$

В данной задаче использованы следующие обозначения. Для $t = 1, \dots, T-1$:

$$k_t = -n_t(n_0)^{-1}B_0 + B_t, \qquad n_0 = B_0M - A_0, \qquad n_t = -B_tM + A_t,$$

$$\sigma_t = \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(\tau)s(\tau) - n_t(n_0)^{-1}z_0 + (-n_t(n_0)^{-1}B_0 + B_t)l,$$

$$K_t(\tau) = -n_t(n_0)^{-1}R_0(\tau), \qquad L_t(\tau) = -n_t(n_0)^{-1}P_0(\tau), \qquad \tau = 0, \dots, t-1,$$

$$K_t(\tau) = -n_t(n_0)^{-1}R_0(\tau) + R_t(\tau), \qquad L_t(\tau) = -n_t(n_0)^{-1}P_0(\tau) + P_t(\tau) \qquad \tau = t, \dots, T-1.$$

Для $t = T$:

$$k_T = (n_0)^{-1}B_0, \qquad \sigma_T = \sum_{\tau=0}^{T-1} L_T(\tau)s(\tau) - (n_0)^{-1}(z_0 - B_0l),$$

$$K_T(\tau) = (n_0)^{-1}R_0(\tau), \qquad L_T(\tau) = (n_0)^{-1}P_0(\tau), \qquad \tau = 0, \dots, T-1,$$

Для $t = 0, \dots, T-1$: $v_t = r_t(n_0)^{-1}B_0 + D_t$, $r_t = C_t - D_tM$,

$$h_t = \sum_{\tau=0}^{T-1} F_t(\tau)s(\tau) - r_t(n_0)^{-1}z_0 + ((C_t - D_tM)(n_0)^{-1}B_0 + D_t)l,$$

$$V_t(\tau) = r_t(n_0)^{-1}R_0(\tau), \qquad F_t(\tau) = r_t(n_0)^{-1}P_0(\tau), \qquad \tau = 0, \dots, t-1,$$

$$V_t(\tau) = r_t(n_0)^{-1}R_0(\tau) + Q_t(\tau), \qquad F_t(\tau) = r_t(n_0)^{-1}P_0(\tau) + N_t(\tau), \qquad \tau = t, \dots, T-1.$$

Для $t = T$: $v_T = -M(n_0)^{-1}B_0$,

$$h_T = \sum_{\tau=0}^{T-1} F_T(\tau)s(\tau) + M(n_0)^{-1}(z_0 - B_0l) + l;$$

$$V_T(\tau) = -M(n_0)^{-1}R_0(\tau), \qquad F_T(\tau) = -M(n_0)^{-1}P_0(\tau), \qquad \tau = 0, \dots, T-1,$$

Если запишем формулу (38) в координатах, то для оптимального управления будем иметь:

$$u(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} M_{t+1}(\tau)\gamma(\tau) + m_{t+1}\gamma(T) + \frac{b_1}{2c}\gamma_1(t+1) + \frac{b_2}{2c}\gamma_2(t+1) +$$

$$+\sum_{\tau=0}^{T-1} E_{t+1}(\tau)\mu(\tau) + \frac{b_1}{2c}[h_{t+1}]_1 + \frac{b_2}{2c}[h_{t+1}]_2 - \frac{1}{2c}d + \frac{1}{2c}\mu(t),$$

где

$$M_t(\tau) = \frac{b_1}{2c}[V_t(\tau)]_1 + \frac{b_2}{2c}[V_t(\tau)]_2, \quad m_t = \frac{b_1}{2c}[v_t]_1 + \frac{b_2}{2c}[v_t]_2, \quad E_t(\tau) = \frac{b_1}{2c}[F_t(\tau)]_1\frac{b}{2c} + \frac{b_2}{2c}[F_t(\tau)]_2\frac{b}{2c}.$$

Из условий дополняющей нежесткости получим уравнения для нахождения множителей $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\mu(t)$:

$$\gamma_1(t)\left(\sum_{\tau=0}^{T-1}[K_t(\tau)]_1\gamma(\tau) + [k_t]_1\gamma(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1}[L_t(\tau)]_1\frac{b}{2c}\mu(\tau) + [\sigma_t]_1\right) = 0, \qquad t = 0,\dots,T,$$

$$\gamma_2(t)\left(\sum_{\tau=0}^{T-1}[K_t(\tau)]_2\gamma(\tau) + [k_t]_2\gamma(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1}[L_t(\tau)]_2\frac{b}{2c}\mu(\tau) + [\sigma_t]_2\right) = 0, \qquad t = 0,\dots,T,$$

$$\mu(t)\left(\sum_{\tau=0}^{T-1} M_{t+1}(\tau)\gamma(\tau) + m_{t+1}\gamma(T) + \frac{b_1}{2c}\gamma_1(t+1) + \frac{b_2}{2c}\gamma_2(t+1) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\tau=0}^{T-1} E_{t+1}(\tau)\mu(\tau) + \frac{b_1}{2c}[h_{t+1}]_1 + \frac{b_2}{2c}[h_{t+1}]_2 - \frac{1}{2c}d + \frac{1}{2c}\mu(t) - p\right) = 0, \qquad t = 0,\dots,T-1.$$

Численные примеры. Вычисления проведены в редакторе Mathcad для параметров $T = 4$, $c_1 = -0.8$, $c_2 = 15$, $k = 0.08$, $m = 0.3$, $n = 0.2$, $N = 50$, $\alpha = 0.2$, $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 0.8$, $a = (0, 17, 29, 38, 43)$, $r = (5, 5.1, 5.2, 5.3)$, $\beta_3 = 0.3$, $p = 3$. Результаты вычислений приведены в табл. 1–3.

Таблица 1

Модель 1

t	0	1	2	3	4	Общий доход	Общий расход
$u(t)$	6.08	6.134	6.138	6.117	–	247.32	130.54
$x(t)$	50	35.869	22.907	10.985	0		
$Y(t)$	0	17.026	29.808	38.695	45.012		

Таблица 2

Модель 2

t	0	1	2	3	4	Общий доход	Общий расход
$u(t)$	3	4.207	7.749	8.657	–	224.85	126.35
$x(t)$	50	33.4	19.106	8.777	0		
$Y(t)$	0	17.526	29.864	37.356	41.604		

Таблица 3

Модель 3

t	0	1	2	3	4	Общий доход	Общий расход
$u(t)$	3	6.489	10.245	11.41	–	238.16	126.21
$x(t)$	50	33.4	20.919	12.441	5.574		
$Y(t)$	0	17.526	29.502	37.138	42.045		

Библиографический список

1. *Трошина Н. Ю.* О решении дискретной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4. С.52–60.

2. *Трошина Н. Ю.* О дискретной линейно-квадратичной задаче оптимального управления со связанными краевыми условиями // Докл. Академии воен. наук. 2007. Т. 25, № 1. С. 101–104.

3. *Трошина Н. Ю.* Минимизация потерь прибыли в одной микромодели производства // Вестн. Сарат. гос. соц.-эконом. ун-та. 2007. № 18(4). С. 117–121.

4. *Ширяев В. И., Баев И. А., Ширяев Е. В.* Экономико-

математическое моделирование фирмы. М.: КомКнига, 2006. 224 с.
5. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. № 3. С. 395–453.
6. *Трошина Н. Ю.* Принцип максимума для дискретной задачи оптимального управления со связанными краевыми условиями // Математика. Механика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2002. Вып. 4. С.137–140.

УДК 517.51:517.91/.93

ПРИБЛИЖАЮЩИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

А. А. Хромов, Г. В. Хромова*

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики,
*кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

На базе решений дифференциального уравнения первого порядка строятся приближения к непрерывным функциям с интегральными граничными условиями.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, приближение функций, интегральные условия, резольвента.

Approximating Properties of Solutions of the Differential Equation with Integral Boundary Condition

A. A. Khromov, G. V. Khromova*

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics,
*Chair of Mathematical Physics and Calculating Mathematics
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

With the use of the solution of the first-order differential equation the approximations to the continuous functions with integral boundary conditions are constructed.

Key words: differential equation, approximation of functions, resolvent.

Данная работа основана на приближающих свойствах резольвент обыкновенных дифференциальных операторов.

В работе [1] эти свойства были исследованы для произвольного линейного дифференциального оператора с регулярными краевыми условиями. В работе [2] такие свойства исследовались уже для простейших дифференциальных операторов с нерегулярными краевыми условиями.

В данной работе показано, что использование резольвент дифференциальных операторов позволяет учесть краевые условия, наложенные на приближаемую функцию (в данном случае — интегральные) и получать приближения, удовлетворяющие этим же краевым условиям, что бывает важным при решении как теоретических, так и прикладных задач.

1. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L: \quad y', \quad U(y) \equiv \int\limits_0^1 p(t)y(t)\,dt = 0, \tag{1}$$

где $y(x) \in C^1[0,1]$, $p(x) \in C^1[0,1]$.

Найдём резольвенту $R_\lambda(L)$, полагая $\lambda = -r > 0$. Обозначим её через R_{-r}.

Лемма 1. *Справедливо представление*

$$R_{-r}u = g_{-r}u - \frac{1}{\Delta(-r)}e^{-rx}U(g_{-r}u), \tag{2}$$

где $r > 0$, $g_{-r}u = \int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)\,dt$, $\Delta(-r) = U(e^{-rx})$.

Доказательство. Легко видеть, что $g_r(u)$ есть решение уравнения $y' + ry = u$, а общее решение этого уравнения имеет вид $y = g_r u + Ce^{-rx}$, откуда получаем (2). □

Пусть $u(x) \in C_0[0,1] \equiv \{u(x) \in C[0,1]: \ U(u) = 0\}$.