где $D_0 = [0, 1/(p+1)]^r$. С учетом теоремы 1 имеем

$$\inf_{L_n\in\mathcal{L}_n(V)}\ \sup_{f\in B_2[0,1]^r}\|f-L_nf\|\ge\sup_{\zeta\in D_0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\zeta\left(\frac{1}{p-1}-\zeta\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{2(p-1)}\right)^2=\frac{r}{8(p-1)^2}=\frac{r}{8n^{2/r}}.$$

Таким образом, нижняя оценка в (5) установлена. Линейный алгоритм, который дает верхнюю оценку, приведен в работе [6]. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167-а) *и гранта для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект* НШ-2970.2008.1).

Библиографический список

1. *Gal S. G.* Shape-Preserving Approximation by Real and Complex Polynomials. Springer, 2008.
2. *DeVore R. A.* The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1972.
3. *Сидоров С.П.* Оценка относительных линейных поперечников единичого шара для класса положительных операторов // Сиб. журн. индустриальной математики. 2007. Т. 10, № 4. С. 122–128.
4. *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Optimal estimation in approximation theory // A survey of optimal recovery. N.Y.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
5. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.
6. *Васильев Р.К.* О порядке приближения функций многих переменных линейными положительными операторами конечного ранга // Мат. заметки. 1993. Т. 53, вып. 1. С. 3–15.

УДК 517.977

О РЕШЕНИИ ДИСКРЕТНОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Н.Ю. Трошина

Саратовский государственный университет,
кафедра математической экономики
E-mail: troshina.n@gmail.com

В статье рассматривается дискретная линейно-квадратичная задача оптимального управления с закреплёнными концами и ограничениями на управление. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности типа принципа максимума и предлагается метод точного решения краевой зачи, который сводится к решению конечного числа систем линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: дискретное оптимальное управление.

About Solution of Discrete Linear-Quadratic Optimal Control Problem

N.Yu. Troshina

Saratov State University, Chair of Mathematical Economics
E-mail: troshina.n@gmail.com

This paper is focuses on development of the method for exact solution of the optimal control problem for discrete linear system with quadratic criteria, with boundary conditions and constraints on control. This method gives a solution of finite number of systems of linear algebraic equations.

Key words: discrete optimal control.

Как известно, линейно-квадратичные задачи оптимального управления достаточно хорошо изучены, однако интерес к этим задачам не ослабевает [1–3]. В первую очередь это объясняется тем, что к задаче оптимизации квадратичного функционала на линейных системах приводит построение моделей многих технических и экономических процессов управления [4, 5].

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия оптимальности для линейной дискретной системы с закрепленными концами и квадратичным критерием качества при ограничениях на управление, которые дают в явном виде выражение оптимального управления через сопряженные переменные. Предлагается метод решения полученной краевой задачи, который сводится к последовательному решению конечного числа систем линейных алгебраических уравнений. В одном частном случае сопряженные переменные удаётся полностью исключить, что значительно упрощает процедуру вычислений. При этом получены формулы, показывающие зависимость оптимального управления и оптимальной траектории от заданных граничных условий.

Рассмотрим следующую дискретную задачу оптимального управления:

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t), \qquad t = 0, \dots, T-1, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \qquad x(T) = x_T, \tag{2}$$

$$a \le u(t) \le c, \qquad t = 0, \dots, T-1, \tag{3}$$

$$I(x,u) = \sum_{t=0}^{T-1} [\langle Mx(t), x(t)\rangle + u^2(t)] + \langle Mx(T), x(T)\rangle \to \min, \tag{4}$$

где A, M — матрицы размерности $n \times n$, b — вектор размерности n, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^1$, $x = \{x(0), x(1), \dots, x(T)\}$ — дискретная траектория, $u = \{u(0), u(1), \dots, u(T-1)\}$ — дискретное управление, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов.

Будем предполагать: 1) M — неотрицательно определенная матрица, 2) система (1) управляема, 3) выполняется условие Слейтера, т.е. существует допустимая пара $(\bar{x}, \bar{u})$, такая что $\forall t \ a < \bar{u}(t) < c$, 4) существует A^{-1}.

Сформулированную задачу можно рассматривать как экстремальную задачу, состоящую в минимизации функционала (4), заданного в пространстве пар (x,u)(обозначим это пространство через Z). Это векторное пространство размерности $n(T+1)+T$, в котором можно определить скалярное произведение и норму:

$$\langle (x,u), (y,v) \rangle = \sum_{t=0}^{T} \langle x(t), y(t) \rangle + \sum_{t=0}^{T-1} u(t)v(t), \qquad \| (x,u) \| = \left(\sum_{t=0}^{T} \| x(t) \|^2 + \sum_{t=0}^{T-1} | u(t) |^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Решение задачи (1)–(4) будем обозначать $(\hat{x}, \hat{u})$. Для получения необходимых условий оптимальности применим теорию Дубовицкого – Милютина [6].

В пространстве Z рассмотрим конусы вариаций, соответствующие функционалу (4) и ограничениям, а также сопряженные к ним. Имеем следующие представления рассматриваемых конусов [7].

Конус запрещенных вариаций для функционала (4) с вершиной в точке $(\hat{x}, \hat{u})$:

$$K_0 = \{(x,u) : \sum_{t=0}^{T-1} [\langle M\hat{x}(t), x(t) \rangle + \hat{u}(t)u(t)] + \langle M\hat{x}(T), x(T) \rangle < 0\}.$$

Сопряженный конус к конусу K_0 состоит из функционалов вида

$$f_0(x,u) = -\lambda_o \Big[\sum_{t=0}^{T-1} [\langle M\hat{x}(t), x(t) \rangle + \hat{u}(t)u(t)] + \langle M\hat{x}(T), x(T) \rangle \Big], \qquad \lambda_0 \ge 0. \tag{5}$$

Конус касательных направлений, соответствующий ограничениям (1), (2), имеет вид

$$K_1 = \{(x,u) : x(t+1) = Ax(t) + bu(t), \ x(0) = 0, \ x(T) = 0\}.$$

Функционалы f_1 из сопряженного конуса K_1^* обладают следующими свойствами: 1) $f_1(x,u) = 0$, если $(x,u) \in K_1$, 2) если пара (x,u) удовлетворяет (1) и начальному условию $x(0) = 0$, то существует вектор $\omega \in R^n$, такой что $f_1(x,u) = \langle \omega, x(T) \rangle$.

Конус допустимых вариаций, соответствующий ограничению $u(t) \le c$, имеет вид

$$K_2 = \{(x,u) : \max_{t \in \Omega} u(t) < 0\}, \ \Omega = \{t : \hat{u}(t) = c\},$$

причем конус K_2 совпадает со всем пространством пар Z, если $\Omega = \emptyset$. Сопряженный конус K_2^* состоит из функционалов $f_2(x,u) = -\lambda \sum\limits_{t \in \Omega} \alpha(t)u(t)$, где $\lambda \ge 0$, $\alpha(t) \ge 0$, $\sum\limits_{t \in \Omega} \alpha(t) = 1$. Положим $\alpha(t) = 0$, если $t \notin \Omega$. Тогда

$$f_2(x,u) = -\sum_{t=0}^{T-1} \gamma(t)u(t), \tag{6}$$

где $\gamma(t) = \lambda\alpha(t) \ge 0$, причем

$$\gamma(t)(\hat{u}(t) - c) = 0, \qquad t = 0, \dots, T-1. \tag{7}$$

Если $\Omega = \emptyset$, то $f_2(x,u) = 0$.

Конус допустимых вариаций, соответствующий ограничению $u(t) \geq a$, имеет вид

$$K_3 = \{(x,u) : \max_{t \in W}(-u(t)) < 0\}, \qquad W = \{t : \hat{u}(t) = a\},$$

причем конус K_3 совпадает со всем пространством пар Z, если $W = \emptyset$. Сопряженный конус K_3^* состоит из функционалов $f_3(x,u) = -\bar{\lambda} \sum\limits_{t \in W} \beta(t)(-u(t))$, где $\bar{\lambda} \geq 0$, $\beta(t) \geq 0$, $\sum\limits_{t \in W} \beta(t) = 1$. Положим $\beta(t) = 0$, если $t \notin W$. Тогда

$$f_3(x,u) = \sum_{t=0}^{T-1} \mu(t) u(t), \tag{8}$$

где $\mu(t) = \bar{\lambda}\beta(t) \geq 0$, причем

$$\mu(t)(\hat{u}(t) - a) = 0, \qquad t = 0, \ldots, T-1. \tag{9}$$

Если $W = \emptyset$, то $f_3(x,u) = 0$.

Теорема 1 (необходимые условия оптимальности). *Если* $(\hat{x}, \hat{u})$ *— решение задачи* (1)–(4)*, то существуют неотрицательные числа* $\gamma(t)$, $\mu(t)$ $(t = 0, \ldots, T-1)$*, существует вектор* $\omega \in R^n$ *и вектор-функция* $\psi(t) \in R^n$*, для которых выполняется сопряженное уравнение*

$$\psi(t) = A^* \psi(t+1) - M\hat{x}(t),$$

условие трансверсальности

$$\psi(T) = -M\hat{x}(T) + \omega \tag{10}$$

и условия дополняющей нежесткости (7), (9). *При этом оптимальное управление определяется по формуле*

$$\hat{u}(t) = \langle \psi(t+1), b \rangle + \mu(t) - \gamma(t), \qquad t = 0, \ldots, T-1.$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что выполняются все условия теоремы Дубовицкого – Милютина о пересечении выпуклых конусов. Следовательно, существуют не равные одновременно нулю линейные функционалы f_0, f_1, f_2, f_3, заданные на множестве пар Z и принадлежащие сопряженным конусам, для которых имеет место уравнение Эйлера: $f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = 0$. Возьмем пару (x,u), удовлетворяющую уравнению (1) и условию $x(0) = 0$. Тогда $f_1(x,u) = \langle \omega, x(T) \rangle$. Запишем уравнение Эйлера, используя формулы (5), (6),(8):

$$-\lambda_0 \sum_{t=0}^{T} \langle M\hat{x}(t), x(t) \rangle - \lambda_0 \sum_{t=0}^{T-1} \hat{u}(t) u(t) + \langle \omega, x(T) \rangle - \sum_{t=0}^{T-1} \gamma(t) u(t) + \sum_{t=0}^{T-1} \mu(t) u(t) = 0. \tag{11}$$

Так как пара (x,u) удовлетворяет (1), то для произвольной вектор-функции $\psi(t) \in R^n$ $(t = 0, \ldots, T)$ имеем тождество $\sum\limits_{t=0}^{T-1} \langle \psi(t+1), -x(t+1) + Ax(t) + bu(t) \rangle \equiv 0$, что равносильно следующему:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \langle \psi(t), -x(t) \rangle - \langle \psi(0), -x(0) \rangle + \langle \psi(T), -x(T) \rangle + \sum_{t=0}^{T-1} \langle A^* \psi(t+1), x(t) \rangle + \sum_{t=0}^{T-1} \langle \psi(t+1), b \rangle u(t) = 0, \tag{12}$$

где знак $*$ означает транспонирование. Сложим (11) и (12), учитывая, что $x(0) = 0$:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \langle -\lambda_0 M\hat{x}(t) - \psi(t) + A^* \psi(t+1), x(t) \rangle + \langle -\lambda_0 M\hat{x}(T) + \omega - \psi(T), x(T) \rangle +$$

$$+ \sum_{t=0}^{T-1} [-\lambda_0 \hat{u}(t) + \mu(t) - \gamma(t) + \langle \psi(t+1), b \rangle] u(t) = 0.$$

Выберем $\psi(t)$ так, чтобы выполнялась сопряженная система и условие трансверсальности:

$$\psi(t) = A^* \psi(t+1) - \lambda_0 M\hat{x}(t), \quad t = 0, \ldots, T-1, \qquad \psi(T) = -\lambda_0 M\hat{x}(T) + \omega.$$

Тогда будем иметь равенство $\sum\limits_{t=0}^{T-1}[-\lambda_0\hat{u}(t)+\mu(t)-\gamma(t)+\langle\psi(t+1),b\rangle]u(t)=0$, которое верно при любых $u(t)$. В силу произвольности $u(t)$ отсюда следует $-\lambda_0\hat{u}(t)+\mu(t)-\gamma(t)+\langle\psi(t+1),b\rangle=0$, $t=0,\dots,T-1$, или

$$\lambda_0\hat{u}(t)=\langle\psi(t+1),b\rangle+\mu(t)-\gamma(t),\qquad t=0,\dots,T-1. \tag{13}$$

Покажем, что $\lambda_0\neq 0$. Для $\mu(t),\gamma(t)\geq 0$, удовлетворяющих (7), (9), образуем функционал

$$L(x,u,\lambda_0,\mu,\gamma)=\lambda_0\sum_{t=0}^{T}\langle Mx(t),x(t)\rangle+\lambda_0\sum_{t=0}^{T-1}u^2(t)+2\sum_{t=0}^{T-1}\gamma(t)u(t)-2\sum_{t=0}^{T-1}\mu(t)u(t).$$

Подсчитаем разность

$$L(x,u,\lambda_0,\mu,\gamma)-L(\hat{x},\hat{u},\lambda_0,\mu,\gamma)=\lambda_0\sum_{t=0}^{T}[\langle Mx(t),x(t)\rangle-\langle M\hat{x}(t),\hat{x}(t)\rangle]+\lambda_0\sum_{t=0}^{T-1}[u^2(t)-\hat{u}^2(t)]+$$
$$+2\sum_{t=0}^{T-1}\gamma(t)(u(t)-\hat{u}(t))-2\sum_{t=0}^{T-1}\mu(t)(u(t)-\hat{u}(t)).$$

После преобразований получим:

$$L(x,u,\lambda_0,\mu,\gamma)-L(\hat{x},\hat{u},\lambda_0,\mu,\gamma)=\lambda_0\sum_{t=0}^{T}[2\langle M\hat{x}(t),\Delta x(t)\rangle+\langle M\Delta x(t),\Delta x(t)\rangle]+$$
$$+\lambda_0\sum_{t=0}^{T-1}[2\hat{u}(t)\Delta u(t)+(\Delta u(t))^2]+\sum_{t=0}^{T-1}2\gamma(t)\Delta u(t)-\sum_{t=0}^{T-1}2\mu(t)\Delta u(t), \tag{14}$$

где $\Delta x(t)=x(t)-\hat{x}(t),\Delta u(t)=u(t)-\hat{u}(t)$

Пусть (x,u) — допустимая пара. Согласно (12), имеем

$$\sum_{t=0}^{T-1}\langle\psi(t),\Delta x(t)\rangle-\sum_{t=0}^{T-1}\langle A^*\psi(t+1),\Delta x(t)\rangle-\sum_{t=0}^{T-1}\langle\psi(t+1),b\rangle\Delta u(t)=0. \tag{15}$$

. Умножим (15) на 2 и сложим с (14). Получим

$$\Delta L=L(x,u,\lambda_0,\mu,\gamma)-L(\hat{x},\hat{u},\lambda_0,\mu,\gamma)=\lambda_0\sum_{t=0}^{T-1}\langle M\Delta x(t),\Delta x(t)\rangle+\lambda_0\sum_{t=0}^{T-1}(\Delta u(t))^2+$$
$$+\sum_{t=0}^{T-1}\langle 2\lambda_0M\hat{x}(t)+2\psi(t)-2A^*\psi(t+1),\Delta x(t)\rangle+\sum_{t=0}^{T-1}(2\lambda_0\hat{u}(t)+2\gamma(t)-2\mu(t)-2\langle\psi(t+1),b\rangle)\Delta u(t)+$$
$$+\lambda_0\langle M\Delta x(T),\Delta x(T)\rangle+\langle 2\lambda_0M\hat{x}(T),\Delta x(T)\rangle.$$

При выбранных $\gamma(t)$, $\mu(t)$, $\psi(t)$ управление $\hat{u}(t)$ удовлетворяет (13), поэтому

$$\Delta L=\lambda_0\sum_{t=0}^{T-1}2\langle M\Delta x(t),\Delta x(t)\rangle+\lambda_0\sum_{t=0}^{T-1}(\Delta u(t))^2.$$

Так как $\lambda_0\geq 0$ и M — неотрицательно определенная матрица, то $\Delta L\geq 0$ при всех допустимых (x,u). Предположим, что $\lambda_0=0$. В этом случае все $\gamma(t)$, $\mu(t)$ одновременно в ноль не обращаются, иначе из уравнения Эйлера будет следовать, что $f_1=\langle\omega,T\rangle=0$, то есть все функционалы в уравнении Эйлера равны нулю, что невозможно. Предполагая, что $\lambda_0=0$, из (14) будем иметь

$$\Delta L=\sum_{t=0}^{T-1}2\gamma(t)\Delta u(t)-\sum_{t=0}^{T-1}2\mu(t)\Delta u(t).$$

Так как выполняется условие Слейтера, то существует допустимая пара $(\bar{x}, \bar{u})$, для которой при всех t $\bar{u}(t) - a > 0$, $\bar{u}(t) - c < 0$. Пусть $\gamma(t) \neq 0$. Тогда из условия (7) будет следовать неравенство

$$\gamma(t)\Delta\bar{u}(t) < 0, \qquad t = 0, \dots, T-1, \tag{16}$$

так как $\gamma(t)\Delta\bar{u}(t) = \gamma(t)[\bar{u}(t) - \hat{u}(t) + c - c] = \gamma(t)[\bar{u}(t) - c] - \gamma(t)[\hat{u}(t) - c] < 0$.

Аналогично, пусть $\mu(t) \neq 0$. Тогда из условия (9) будет следовать неравенство

$$\mu(t)\Delta\bar{u}(t) > 0, \qquad t = 0, \dots, T-1. \tag{17}$$

Из (16), (17) вытекает, что существует пара $(\bar{x}, \bar{u})$, для которой $\Delta L < 0$. Получили противоречие, следовательно, $\lambda_0 \neq 0$. Из (13) для оптимального управления $\hat{u}(t)$ получим

$$\hat{u}(t) = \langle \psi(t+1), b\rangle + \mu(t) - \gamma(t), \qquad t = 0, \dots, T-1.$$

Теорема доказана.

Теорема 2 (достаточные условия оптимальности). *Пусть $(\hat{x}, \hat{u})$ — допустимая пара и пусть существуют числа $\gamma(t)$, $\mu(t)$ $(t = 0, \dots, T-1)$, вектор $\omega \in R^n$ и вектор-функция $\psi(t) \in R^n$, которые удовлетворяют условиям:*

$$\psi(t) = A^*\psi(t+1) - M\hat{x}(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \qquad \psi(T) = -M\hat{x}(T) + \omega, \tag{18}$$

$$\gamma(t)(\hat{u}(t) - c) = 0, \qquad \gamma(t) \geq 0, \qquad t = 0, \dots, T-1, \tag{19}$$

$$\mu(t)(\hat{u}(t) - a) = 0, \qquad \mu(t) \geq 0, \qquad t = 0, \dots, T-1, \tag{20}$$

а управление $\hat{u}(t)$ определяется по формуле

$$\hat{u}(t) = \langle \psi(t+1), b\rangle + \mu(t) - \gamma(t), \qquad t = 0, \dots, T-1. \tag{21}$$

Тогда $(\hat{x}, \hat{u})$ является оптимальной парой для задачи (1)–(4).

Доказательство. Возьмем произвольную допустимую пару (x, u) и подсчитаем

$$\Delta I = I(x,u) - I(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{t=0}^{T}[\langle Mx(t), x(t)\rangle - \langle M\hat{x}(t), \hat{x}(t)\rangle] + \sum_{t=0}^{T-1}[u^2(t) - \hat{u}^2(t)] =$$
$$= \sum_{t=0}^{T}[2\langle M\hat{x}(t), \Delta x(t)\rangle + \langle M\Delta x(t), \Delta x(t)\rangle] + \sum_{t=0}^{T-1}[2\hat{u}(t)\Delta u(t) + (\Delta u(t))^2],$$

где $\Delta x(t) = x(t) - \hat{x}(t), \Delta u(t) = u(t) - \hat{u}(t)$.

Так как $(x, u), (\hat{x}, \hat{u})$ — допустимые пары, то, согласно (12), для $(\Delta x, \Delta u)$ имеем

$$2\sum_{t=0}^{T-1}\langle \psi(t), \Delta x(t)\rangle - 2\sum_{t=0}^{T-1}\langle A^*\psi(t+1), \Delta x(t)\rangle - 2\sum_{t=0}^{T-1}\langle \psi(t+1), b\rangle\Delta u(t) = 0.$$

Используя это равенство, для ΔI можно получить

$$\Delta I = \sum_{t=0}^{T}\langle M\Delta x(t), \Delta x(t)\rangle + \sum_{t=0}^{T-1}(\Delta\hat{u}(t))^2 + 2\sum_{t=0}^{T}\langle M\hat{x}(t) + \psi(t) - A^*\psi(t+1), \Delta x(t)\rangle +$$
$$+2\sum_{t=0}^{T-1}[\hat{u}(t) - \langle \psi(t+1), b\rangle]\Delta u(t).$$

Учитывая (18), (21), получим

$$\Delta I = \sum_{t=0}^{T}\langle M\Delta x(t), \Delta x(t)\rangle + \sum_{t=0}^{T-1}(\Delta u(t))^2 + 2\sum_{t=0}^{T-1}(-\gamma(t)\Delta u(t)) + 2\sum_{t=0}^{T-1}\mu(t)\Delta u(t).$$

Очевидно, при всех $t = 0, \dots, T-1$ имеет место равенство

$$\gamma(t)\Delta u(t) = \gamma(t)[u(t) - \hat{u}(t) + c - c] = \gamma(t)[u(t) - c] - \gamma(t)[\hat{u}(t) - c].$$

Используя условие (19), получим $\gamma(t)\Delta u(t) \le 0$, $t = 0, \dots, T-1$. Аналогично можно показать, что $\mu(t)\Delta u(t) \ge 0$, $t = 0, \dots, T-1$. Так как M — неотрицательно определенная матрица, отсюда будет следовать, что $\Delta I \ge 0$ для любой допустимой пары. Поэтому $(\hat{x}, \hat{u})$ — оптимальна. Теорема доказана.

Доказанные теоремы позволяют свести решение задачи оптимального управления (1)–(4) к решению следующей краевой задачи:

$$x(t+1) = Ax(t) + bb^*\psi(t+1) - b\gamma(t) + b\mu(t), \qquad t = 0, \dots, T-1 \tag{22}$$

$$\psi(t) = A^*\psi(t+1) - Mx(t), \qquad t = 0, \dots, T-1 \tag{23}$$

$$x(0) = x_0, \qquad x(T) = x_T, \tag{24}$$

$$\gamma(t)[b^*\psi(t+1) - \gamma(t) + \mu(t) - c] = 0, \qquad t = 0, \dots, T-1, \tag{25}$$

$$\mu(t)[b^*\psi(t+1) - \gamma(t) + \mu(t) - a] = 0, \qquad t = 0, \dots, T-1, \tag{26}$$

$$\gamma(t) \ge 0, \qquad \mu(t) \ge 0, \qquad t = 0, \dots, T-1. \tag{27}$$

Теорема 3. *Если векторы $x(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют уравнениям* (22), (23), *то они выражаются через граничные значения $x(T)$, $\psi(T)$ по формулам*

$$x(t) = A_t x(T) + B_t\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} P_t(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} Q_t(\tau)\mu(\tau), \tag{28}$$

$$\psi(t) = C_t x(T) + D_t\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} N_t(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} R_t(\tau)\mu(\tau), \quad t = 0, \dots, T-1, \tag{29}$$

где матричные коэффициенты A_t, B_t, C_t, D_t, $P_t(\tau)$, $Q_t(\tau)$, $N_t(\tau)$, $R_t(\tau)$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{gathered} A_{T-1} = A^{-1}, \quad B_{T-1} = -A^{-1}bb^*, \quad P_{T-1}(T-1) = A^{-1}b, \quad Q_{T-1}(T-1) = -A^{-1}b, \\ C_{T-1} = -MA_{T-1}, \quad D_{T-1} = A^* - B_{T-1}, \quad N_{T-1}(T-1) = -MP_{T-1}(T-1), \\ R_{T-1}(T-1) = -MQ_{T-1}(T-1); \end{gathered}$$

для $t = 0, \dots, T-2$:

$$\begin{gathered} A_t = A^{-1}(A_{t+1} - bb^*C_{t+1}), \quad B_t = A^{-1}(B_{t+1} - bb^*D_{t+1}), \\ P_t(\tau) = A^{-1}(P_{t+1}(\tau) - bb^*N_{t+1}(\tau)) \quad (\tau = t+1, \dots, T-1), \quad P_t(t) = A^{-1}b, \\ Q_t(\tau) = A^{-1}(Q_{t+1}(\tau) - bb^*R_{t+1}(\tau)) \quad (\tau = t+1, \dots, T-1), \quad Q_t(t) = -A^{-1}b; \end{gathered} \tag{30}$$

$$\begin{gathered} C_t = A^*C_{t+1} - MA_t, \quad D_t = A^*D_{t+1} - MB_t, \\ N_t(\tau) = A^*N_{t+1}(\tau) - MP_t(\tau) \quad (\tau = t+1, \dots, T-1), \quad N_t(t) = -MP_t(t), \\ R_t(\tau) = A^*R_{t+1}(\tau) - MQ_t(\tau) \quad (\tau = t+1, \dots, T-1), \quad R_t(t) = -MQ_t(t). \end{gathered} \tag{31}$$

Доказательство. Из уравнения (22) при $t = T-1$ имеем

$$\begin{gathered} x(T-1) = A^{-1}[x(T) - bb^*\psi(T) + b\gamma(T-1) - b\mu(T-1)] = A^{-1}x(T) - A^{-1}bb^*\psi(T) + \\ + A^{-1}b\gamma(T-1) - A^{-1}b\mu(T-1) = A_{T-1}x(T) + B_{T-1}\psi(T) + P_{T-1}(T-1)\gamma(T-1) - Q_{T-1}\mu(T-1). \end{gathered}$$

Следовательно, формула (28) верна для $t = T-1$. Аналогично из уравнения (23):

$$\begin{gathered} \psi(T-1) = A^*\psi(T) - M[A_{T-1}x(T) + B_{T-1}\psi(T) + P_{T-1}(T-1)\gamma(T-1) + Q_{T-1}(T-1)\mu(T-1)] = \\ = -MA_{T-1}x(T) + (A^* - MB_{T-1})\psi(T) - MP_{T-1}(T-1)\gamma(T-1) - MQ_{T-1}(T-1)\mu(T-1) = \\ = C_{T-1}x(T) + D_{T-1}\psi(T) + N_{T-1}(T-1)\gamma(T-1) + R_{T-1}(T-1)\mu(T-1). \end{gathered}$$

Отсюда следует, что формула (29) верна для $t = T - 1$. Пусть утверждение теорема выполняется для некоторого момента времени t. Покажем, что оно справедливо для момента $t - 1$. Согласно (22), имеем

$$x(t-1) = A^{-1}[x(t) - bb^*\psi(t) + b\gamma(t-1) - b\mu(t-1)] =$$
$$= A^{-1}\Big[A_t x(T) + B_t\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} P_t(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} Q_t(\tau)\mu(\tau)\Big] -$$
$$-A^{-1}bb^*\Big[C_t x(T) + D_t\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} N_t(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} R_t(\tau)\mu(\tau)\Big] + A^{-1}b\gamma(t-1) - A^{-1}b\mu(t-1) =$$
$$= A^{-1}[A_t - bb^*C_t]x(T) + A^{-1}[B_t - bb^*D_t]\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} A^{-1}[P_t(\tau) - bb^*N_t(\tau)]\gamma(\tau) + A^{-1}b\gamma(t-1) +$$
$$+ \sum_{\tau=t}^{T-1} A^{-1}[Q_t(\tau) - bb^*R_t(\tau)]\mu(\tau) - A^{-1}b\mu(t-1) = A_{t-1}x(T) + B_{t-1}\psi(T) +$$
$$+ \sum_{\tau=t}^{T-1} P_{t-1}(\tau)\gamma(\tau) + P_{t-1}(t-1)\gamma(t-1) + \sum_{\tau=t}^{T-1} Q_{t-1}(\tau)\mu(\tau) + Q_{t-1}(t-1)\mu(t-1).$$

Таким образом, получили

$$x(t-1) = A_{t-1}x(T) + B_{t-1}\psi(T) + \sum_{\tau=t-1}^{T-1} P_{t-1}(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t-1}^{T-1} Q_{t-1}(\tau)\mu(\tau),$$

т. е. формула (28) верна для $t-1$, причем коэффициенты A_{t-1}, B_{t-1}, $P_{t-1}(\tau)$, $Q_{t-1}(\tau)$ удовлетворяют формулам (30) для момента $t - 1$. Аналогично из (23) имеем

$$\psi(t-1) = A^*\psi(t) - Mx(t-1) = A^*[C_t x(T) + D_t\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1} N_t(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} R_t(\tau)\mu(\tau)] -$$
$$-M[A_{t-1}x(T) + B_{t-1}\psi(T) + \sum_{\tau=t-1}^{T-1} P_{t-1}(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t-1}^{T-1} Q_{t-1}(\tau)\mu(\tau)] = (A^*C_t - MA_{t-1})x(T) +$$
$$+(A^*D_t - MB_{t-1})\psi(T) + \sum_{\tau=t}^{T-1}[A^*N_t(\tau) - MP_{t-1}(\tau)]\gamma(\tau) - MP_{t-1}(t-1)\gamma(t-1) +$$
$$+ \sum_{\tau=t}^{T-1}[A^*R_t(\tau) - MQ_{t-1}(\tau)]\mu(\tau) - MQ_{t-1}(t-1)\mu(t-1).$$

Отсюда получим

$$\psi(t-1) = C_{t-1}x(T) + D_{t-1}\psi(T) + \sum_{\tau=t-1}^{T-1} N_{t-1}(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t-1}^{T-1} R_{t-1}(\tau)\mu(\tau),$$

где коэффициенты $C_{t-1}, D_{t-1}, N_{t-1}(\tau), R_{t-1}(\tau)$ удовлетворяют соотношениям (31) для $t - 1$.

Теорема доказана.

Рассмотрим возможные пути решения краевой задачи (22)–(27). Запишем формулу (28) для $t = 0$:

$$x(0) = A_0x(T) + B_0\psi(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} P_0(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} Q_0(\tau)\mu(\tau). \tag{32}$$

С учетом граничных условий (2) из (29), (32) получим систему уравнений, в которой отсутствуют переменные состояния:

$$B_0\psi(T) + \sum_{\tau=0}^{T-1} P_0(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} Q_0(\tau)\mu(\tau) = x_0 - A_0x_T, \tag{33}$$

$$D_t\psi(T) - \psi(t) + \sum_{\tau=t}^{T-1} N_t(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} R_t(\tau)\mu(\tau) = -C_t x_T, \qquad t = 0,\dots,T-1. \tag{34}$$

Для нахождения сопряженных переменных $\psi(t)$ и множителей $\gamma(t)$, $\mu(t)$ будем иметь систему (33), (34), (25)–(27), которая разрешима, поскольку задача (1)–(4) имеет решение. Левые части уравнений (25)–(26) представляют собой произведение двух сомножителей: $\gamma(t)$ (или $\mu(t)$) и выражений в квадратных скобках. Приравнивая один из них к нулю, вместе с (33)–(34) будем получать системы линейных алгебраических уравнений относительно $\psi(t)$, $\gamma(t)$, $\mu(t)$. Таким образом, решение краевой задачи сводится к последовательному решению конечного числа систем линейных алгебраическмх уравнений. Решение, для которого будет выполняться условие (27), будет искомым. По формуле (28) мы сможем вычислить оптимальную траекторию, а по формуле (26) — оптимальное управление.

Рассмотрим случай, когда матрица B_0 в форомуле (32) невырожденная. В этом случае оптимальное управление и оптимальную траекторию можно в явном виде выразить через заданные граничные условия и множители $\gamma(t)$, $\mu(t)$. Для этого из (34) найдем

$$\psi(T) = B_0^{-1}\Big[x_0 - A_0 x_T - \sum_{\tau=0}^{T-1} P_0(\tau)\gamma(\tau) - \sum_{\tau=0}^{T-1} Q_0(\tau)\mu(\tau)\Big].$$

Подставим найденное $\psi(T)$ в (28). Получим

$$\begin{aligned} x(t) = A_t x(T) + B_t B_0^{-1}\Big[x_0 - A_0 x_T - \sum_{\tau=0}^{T-1} P_0(\tau)\gamma(\tau) - \sum_{\tau=0}^{T-1} Q_0(\tau)\mu(\tau)\Big] + \sum_{\tau=t}^{T-1} P_t(\tau)\gamma(\tau) + \\ + \sum_{\tau=t}^{T-1} Q_t(\tau)\mu(\tau) = A_t x(T) + B_t B_0^{-1} x_0 - B_t B_0^{-1} A_0 x_T - \sum_{\tau=0}^{T-1} B_t B_0^{-1} P_0(\tau)\gamma(\tau) + \\ + \sum_{\tau=t}^{T-1} P_t(\tau)\gamma(\tau) - \sum_{\tau=0}^{T-1} B_t B_0^{-1} Q_0(\tau)\mu(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T-1} Q_t(\tau)\mu(\tau), \end{aligned}$$

или

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} K_t(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} L_t(\tau)\mu(\tau) + K_t x_0 + L_t x_T, \qquad t = 1,\dots,T-1,$$

где $K_t(\tau) = -B_t B_0^{-1} P_0(\tau)$, если $\tau = 0,\dots,t-1$, $K_t(\tau) = -B_t B_0^{-1} P_0(\tau) + P_t(\tau)$, если $\tau = t,\dots,T-1$; $K_t = B_t B_0^{-1}$; $L_t(\tau) = -B_t B_0^{-1} Q_0(\tau)$, если $\tau = 0,\dots,t-1$; $L_t(\tau) = -B_t B_0^{-1} Q_0(\tau) + Q_t(\tau)$, если $\tau = t,\dots,T-1$; $L_t = A_t - B_t B_0^{-1} A_0$.

Аналогично, подставив найденное $\psi(T)$ в (29), получим выражение сопряженного вектора $\psi(t)$ через граничные условия:

$$\psi(t) = \sum_{\tau=0}^{T-1} G_t(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H_t(\tau)\mu(\tau) + G_t x_0 + H_t x_T,$$

где коэффициенты $G_t(\tau), G_t, H_t(\tau), H_t$ удовлетворяют формулам: $G_t(\tau) = -D_t B_0^{-1} P_0(\tau)$, если $\tau = 0,\dots,t-1$; $G_t(\tau) = -D_t B_0^{-1} P_0(\tau) + N_t(\tau)$, если $\tau = t,\dots,T-1$; $G_t = D_t B_0^{-1}$; $H_t(\tau) = -D_t B_0^{-1} Q_0(\tau)$, если $\tau = 0,\dots,t-1$; $H_t(\tau) = -D_t B_0^{-1} Q_0(\tau) + R_t(\tau)$, если $\tau = t,\dots,T-1$; $H_t = C_t - D_t B_0^{-1} A_0$.

Для оптимального управления, согласно (26), будем иметь

$$\hat{u}(t) = \Big\langle \sum_{\tau=0}^{T-1} G_{t+1}(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H_{t+1}(\tau)\mu(\tau) + G_{t+1}x_0 + H_{t+1}x_T, b\Big\rangle + \mu(t) - \gamma(t), \quad t = 0,\dots,T-1.$$

Теперь подставим найденное $\psi(t)$ в (25), (26) и получим уравнения для нахождения $\gamma(t)$, $\mu(t)$:

$$\gamma(t)\Big[b^*\Big(\sum_{\tau=0}^{T-1} G_{t+1}(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H_{t+1}(\tau)\mu(\tau) + G_{t+1}x_0 + H_{t+1}x_T\Big) - \gamma(t) + \mu(t) - c\Big] = 0, \tag{35}$$

$$\mu(t)\Big[b^*\Big(\sum_{\tau=0}^{T-1} G_{t+1}(\tau)\gamma(\tau) + \sum_{\tau=0}^{T-1} H_{t+1}(\tau)\mu(\tau) + G_{t+1}x_0 + H_{t+1}x_T\Big) - \gamma(t) + \mu(t) - a\Big] = 0, \qquad (36)$$

где $t = 0, \ldots, T-1$.

Как и в предыдущем случае, приравнивая один из сомножителей в (35)–(36) к нулю, будем решать полученные системы линейнах алгебраических уравнений. Решение с неотрицательными $\gamma(t)$, $\mu(t)$ будет искомым. Его существование следует из существования решения зачи (1)–(4).

Таким образом, в случае, когда матрица B_0 невырожденная, чтобы решить поставленную задачу, нужно найти неотрицательные коэффициенты $\gamma(t)$, $\mu(t)$, удовлетворяющие системе уравнений (35)–(36).

Библиографический список

1. *Киселев Ю.Н.* Линейно-квадратичная задача оптимального управления: анализ с помощью принципа максимума // Проблемы динамического управления: Сб. науч. тр. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005. Вып. 1. С. 166–182.

2. *Киселева О.Н.* Минимизация основных показателей качества в линейных дискретных системах // АиТ. 2005. № 3. С. 65–73.

3. *Czornir A.* О неавтономный линейно-квадратичной задаче с дискретным управлением // Intern. J. Appl. Math. and Comput. Sci. 2002. V. 12, № 2. P. 78–85.

4. *Ширяев В.И., Баев И.А., Ширяев Е.В.* Экономико-математическое моделирование управления фирмой. М.: КомКнига, 2006.

5. *Лагоша Б.А., Апалькова Т.Г.* Оптимальное управление в экономике: теория и приложение. М.: Финансы и статистика, 2008.

6. *Дубовицкий А.Я. Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. № 3. С. 395–453.

7. *Трошина Н.Ю.* Принцип максимума и задача синтеза для линейных дискретных систем: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1997.