$$\left(\forall\, y \in X_{N\setminus i}\right) \quad F(x_i^0, y) \overset{\rho_i}{>} a_i^*. \tag{9}$$

Таким образом, в ситуации $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ все соотношения (9) будут выполнены одновременно, т.е. для каждого $i \in N$ выполняется $F(x^0) \overset{\rho_i}{>} a_i^*$. Так как при любом $i \in N$ элемент a_i^* является максимальным в подмножестве $U_i^*(G)$, то из последнего соотношения следует, что $F(x^0) \notin U_i^*(G)$, т.е. исход $F(x^0)$ является допустимым для всех игроков $i \in N$. Таким образом, $C_\alpha(G) \neq \varnothing$.

2 случай. Предположим, что для некоторого $i \in N$ имеет место $U_i^*(G) = \varnothing$. Положим $K = \{i \in N \colon U_i^*(G) = \varnothing\}$. В каждом непустом подмножестве $U_j^*(G)$ $(j \in N \setminus K)$ множества A существует максимальный элемент a_j^*. Так как $a_j^* \in U_j^*(G)$, то по определению множества $U_j^*(G)$ существует такая стратегия $x_j^0 \in X_j$, что для любой стратегии $y \in X_{N\setminus j}$ имеет место $F(x_j^0, y) \overset{\rho_j}{>} a_j^*$, $j \in N \setminus K$.

Для каждого $j \in K$ зафиксируем произвольно стратегию $x_j^0 \in X_j$. Тогда в ситуации $x^0 = (x_i^0)_{i\in N}$ будет выполнено

$$F(x^0) \overset{\rho_j}{>} a_j^*, \qquad j \in N \setminus K. \tag{10}$$

Так как a_j^* — максимальный элемент непустого подмножества $U_j^*\,(G)$, то согласно (10) получаем $F(x^0) \notin U_i^*\,(G)$ для $j \in N \setminus K$, т.е. $F(x^0)$ допустим для всех игроков $j \in N \setminus K$. Так как для любого $j \in K$ имеет место $U_j^*\,(G) = \varnothing$, то любой исход игры G будет допустимым для игрока $j \in K$. Таким образом, исход $F(x^0)$ будет допустимым для всех игроков $i \in N$ в игре G, т.е. $C_\alpha(G) \neq \varnothing$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим игру G_0, которая является ограничением игры G на множестве $pr_2\, F$ ее реализуемых исходов. В силу предположений теоремы $pr_2\, F$ является конечным множеством и ограничения отношений ρ_i на этом множестве являются ацикличными. В силу леммы существует исход a^*, допустимый для всех игроков в G_0. Очевидно, что a^* также будет допустимым в игре G. Теорема 3 доказана.

Библиографический список

1. *Розен В.В.* Равновесие в играх с упорядоченными исходами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 61–66.

2. *Савина Т.Ф.* Ковариантные и контравариантные гомоморфизмы игр с отношениями предпочтения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3 С. 66–70

УДК 517.956

ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ ДЛЯ ОДНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Е.А. Уткина

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, Казань,
кафедра информационных технологий в образовании
E-mail: eutkina1@yandex.ru

В характеристическом прямоугольнике на плоскости рассматривается задача об отыскании решения уравнения со старшей частной производной шестого порядка с данными на всей границе. Выводятся достаточные условия единственности решения этой задачи. Эти условия записываются в терминах коэффициентов уравнения, а проводимые рассуждения основаны на методе априорных оценок.

Ключевые слова: задача с условиями на всей границе, метод априорных оценок.

Problem with Conditions on all Boundary for One 6-th Order Pseudoparabolic Equation

E.A. Utkina

Tatar State Humanitarian-Pedagogical University, Kazan,
Chair of Information Technology in Education
E-mail: eutkina1@yandex.ru

Here consider characteristic problem with conditions, setting on all boundary, in two order space for 6th order equation with 3-times taken old particular derivative. The existence and uniqueness of the solution are proved.

Key words: problem with conditions on all boundary, preliminary evaluate method.

В области $D = \{0 < x < x_1,\ 0 < y < y_1\}$ изучается уравнение

$$L(u) = D_x^3 D_y^3 u(x,y) + \sum_{\substack{i=0\\ i+j<6}}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij}(x,y) D_x^i D_y^j u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

являющееся обобщением уравнения изгиба тонкой сферической оболочки [1, с. 258]. При этом $D_t^k \varphi \equiv \partial^k \varphi / \partial t^k$ при $k = 1, 2, \ldots$, $D_t^k \varphi \equiv \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{-k-1} \varphi(\tau)}{(-k-1)!} d\tau$, если $k = -1, -2, \ldots$, D_t^0 — оператор тождественного преобразования, $a_{ij} \in C^{i,j}(\overline{D})$, $f \in C^{0,0}(\overline{D})$.

Задача: *Найти функцию* $u(x,y) \in C^{3,3}(D) \cap C^{2,0}(D \cup p) \cap C^{0,2}(D \cup q) \cap C^{0,0}(\overline{D})$, *являющуюся в* D *решением уравнения* (1) *и удовлетворяющую условиям*

$$u(0,y) = \varphi_0(y), \quad u(x,0) = \psi_0(x), \quad u_x(0,y) = \varphi_1(y), \quad u_y(x,0) = \psi_1(x), \tag{2}$$

$$u(x_1, y) = \varphi_{01}(y), \qquad u(x, y_1) = \psi_{01}(x). \tag{3}$$

Из принадлежности $u(x,y)$ классу $C(\overline{D})$ следуют соотношения:

$$\varphi_0(y_1) = \psi_{01}(0), \qquad \varphi_0(0) = \psi_0(0), \qquad \psi_0(x_1) = \varphi_{01}(0), \qquad \varphi_{01}(y_1) = \psi_{01}(x_1).$$

Очевидно, соотношения (2), (3) близки к граничным условиям задач Дирихле из работ [2–6]. Задачи с другими условиями для уравнений типа (1), в том числе и более высокого порядка, изучались в работах [7–9].

Здесь предлагается способ получения условий, обеспечивающих однозначную разрешимость сформулированной выше задачи. При этом используется ее редукция к уравнениям Фредгольма, однозначная разрешимость которых выводится из доказываемой на основе априорных оценок теоремы единственности.

1. Сначала запишем решение задачи с условиями (2) и

$$u_{xx}(0,y) = \varphi_2(y), \qquad u_{yy}(x,0) = \psi_2(x). \tag{4}$$

Соотношения (2), (4) представляют собой граничные значения задачи Гурса, решение которой дается формулой (9) из [8]:

$$u(x,y) = I(x,y) + D_x^{-3} D_y^{-3}(Rf) + (A_1\varphi_2)(x,y) + (A_2\psi_2)(x,y) - D_x^2 D_y^2 u(0,0) D_x^{-2} D_y^{-2} R(0,0,x,y), \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered}(A_1\varphi_2)(x,y) = -D_y^{-3}\varphi_2 D_x^{-2} Q_{30}(0,y,x,y) + D_y^{-2}\varphi_2 D_x^{-2} Q_{31}(0,y,x,y) - \\ - D_y^{-1}\varphi_2 D_x^{-2} Q_{32}(0,y,x,y) + D_y^{-2}\varphi_2 D_x^{-2} Q_{32y}(0,y,x,y) + \\ + \varphi_2(y) D_x^{-2} R(0,y,x,y) - 2D_y^{-1}\varphi_2 D_x^{-2} R_y(0,y,x,y) + D_y^{-2}\varphi_2 D_x^{-2} R_{yy}(0,y,x,y),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(A_2\psi_2)(x,y) = -D_x^{-3}\psi_2 D_y^{-2} Q_{03}(x,0,x,y) + D_x^{-2}\psi_2 D_y^{-2} Q_{13}(x,0,x,y) - \\ - D_x^{-1}\psi_2 D_y^{-2} Q_{23}(x,0,x,y) + D_x^{-2}\psi_2 D_y^{-2} Q_{23x}(x,0,x,y) + \psi_2(x) D_y^{-2} R(x,0,x,y) - \\ - 2D_x^{-1}\psi_2 D_y^{-2} R_x(x,0,x,y) + D_x^{-2}\psi_2 D_y^{-2} R_{xx}(x,0,x,y).\end{gathered}$$

При этом $Q_{ij} = \sum\limits_{\alpha=i}^{m} \sum\limits_{\beta=j}^{n} (-1)^{(\alpha+\beta)} D_x^{\alpha-i} D_y^{\beta-j}(a_{\alpha\beta} R)$, R — функция Римана уравнения (1), которая определяется как решение интегрального уравнения:

$$\sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} (-1)^{6-i-j} D_x^{i-3} D_y^{j-3}(a_{ij} R) = 1, \qquad a_{33} \equiv 1,$$

$I(x,y)$ зависит только от известных функций.

Формула (5) является общим представлением искомого решения через φ_k, ψ_k, $k = 0, 2$. Неизвестными являются φ_2, ψ_2 и $D_x^2 D_y^2 u(0,0)$. Чтобы их определить подставим в (5) аргументы точек(x, y_1), (x_1, y), (x_1, y_1) и учтем известные значения (2), (3). В результате придем к системе интегральных уравнений, в которой искомыми функциями являются уже φ_2, ψ_2:

$$\varphi_{01}(y) = I(x_1, y) + \int\limits_0^{x_1} D_x^{-2} D_y^{-3}(Rf)\,dx + (A_1\varphi_2)(x_1, y) +$$

$$+(A_2\psi_2)(x_1, y) - \frac{\int\limits_0^{x_1} D_x^{-1} D_y^{-2} R(0,0,\xi,y)\,dx}{\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} D_x^{-1} D_y^{-1} R(0,0,\xi,\eta)\,dx\,dy}\Bigg(u(x_1,y_1) + I(x_1,y_1) +$$

$$+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} D_x^{-2} D_y^{-2}(Rf)\,dx\,dy + (A_1\varphi_2)(x_1,y_1) + (A_2\psi_2)(x_1,y_1)\Bigg), \tag{6}$$

$$\psi_{01}(x) = I(x, y_1) + \int\limits_0^{y_1} D_x^{-3} D_y^{-2}(Rf)\,dy + (A_1\varphi_2)(x, y_1) +$$

$$+(A_2\psi_2)(x, y_1) - \frac{\int\limits_0^{y_1} D_x^{-2} D_y^{-1} R(0,0,x,\eta)\,dy}{\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} D_x^{-1} D_y^{-1} R(0,0,\xi,\eta)\,dx\,dy}\Bigg(u(x_1,y_1) + I(x_1,y_1) +$$

$$+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} D_x^{-2} D_y^{-2}(Rf)\,dx\,dy + (A_1\varphi_2)(x_1,y_1) + (A_2\psi_2)(x_1,y_1)\Bigg). \tag{7}$$

Таким образом, для нахождения каждой из функций φ_2, ψ_2 получим уравнения фредгольмовского типа.

2. Теперь займемся доказательством единственности решения задачи (1)–(3). Для этого проверим, что при однородных условиях (2), (3) однородное уравнение (1) имеет только нулевое решение. Доказательство осуществляем методом априорной оценки с помощью энергетического неравенства [10].

Воспользовавшись определениями скалярного произведения $(u,v) = \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} u(x,y)v(x,y)\,dy\,dx$ в пространстве $L_2[0,x_1]\times[0,y_1]$ и нормы $\|u\|^2 = \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} u^2(x,y)\,dy\,dx$, вычислим:

$$(L(u), u_{xy}) = (D_x^3 D_y^3 u + \sum_{\substack{i=0\\ i+j<6}}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij}(x,y) D_x^i D_y^j u, u_{xy}) =$$

$$= \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} (D_x^3 D_y^3 u \cdot u_{xy} + \sum_{\substack{i=0\\ i+j<6}}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij} D_x^i D_y^j u \cdot u_{xy})(x,y)\,dy\,dx.$$

Преобразуем слагаемые правой части с помощью интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} u_{xxxyyy}(x,y) u_{xy}(x,y)\,dy\,dx = \|u_{xxyy}\|^2,$$

$$\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{32}(x,y) u_{xxxyy}(x,y) u_{xy}(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{32xxy} u_{xy}^2\,dy\,dx + \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{32x} u_{xyy} u_{xxy}\,dy\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{32y} u_{xxy}^2\,dy\,dx,$$

$$\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{23}(x,y) u_{xxyyy}(x,y) u_{xy}(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{23xyy}u_{xy}^2\,dy\,dx + \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{23y}u_{xxy}u_{xyy}\,dy\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{23x}u_{xyy}^2\,dy\,dx,$$

$$\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{22}(x,y)u_{xxyy}(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{22xy}u_{xy}^2\,dy\,dx - \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{22}u_{xxy}u_{xyy}\,dy\,dx, \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{13}(x,y)u_{xyyy}(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{13yy}u_{xy}^2\,dy\,dx - \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{13}u_{xyy}^2\,dy\,dx,$$

$$\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{31}(x,y)u_{xxxy}(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{31xx}u_{xy}^2\,dy\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{31}u_{xxy}^2\,dy\,dx,$$

$$\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{30}(x,y)u_{xxx}(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= -\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{30x}u_{xx}u_{xy}\,dy\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{31y}u_{xx}^2\,dy\,dx, \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{03}(x,y)u_{yyy}(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= -\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{03y}u_{yy}u_{xy}\,dy\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{03x}u_{yy}^2\,dy\,dx,$$

$$\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{00}(x,y)u(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{00xy}u^2\,dy\,dx - \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{00}u_xu_y\,dy\,dx,$$

$$\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{10}(x,y)u_x(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{10y}u_x^2\,dy\,dx,$$

$$\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{01}(x,y)u_y(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{01x}u_y^2\,dy\,dx,$$

$$\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{21}(x,y)u_{xxy}(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{21x}u_{xy}^2\,dy\,dx,$$

$$\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{12}(x,y)u_{xyy}(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{12y}u_{xy}^2\,dy\,dx,$$

$$\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{11}(x,y)u_{xy}(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{11}u_{xy}^2\,dy\,dx.$$

Интегралы $\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{20}(x,y)u_{xx}(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx$, $\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} a_{02}(x,y)u_{yy}(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx$ остаются без изменений. Тогда

$$(L(u), u_{xy}) = \|u_{xxyy}\|^2 + \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}\Big(-\frac{a_{32xxy}(x,y)}{2} - \frac{a_{23xyy}(x,y)}{2} + \frac{a_{22xy}(x,y)}{2} + \frac{a_{13yy}(x,y)}{2} +$$

$$+\frac{a_{31xx}(x,y)}{2} - \frac{a_{21x}(x,y)}{2} - \frac{a_{12y}(x,y)}{2} + a_{11}(x,y)\Big)u_{xy}^2(x,y)\,dy\,dx +$$

$$+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}(\frac{a_{32y}(x,y)}{2}-a_{31}(x,y))u_{xxy}^2(x,y)\,dy\,dx+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}(\frac{a_{23x}(x,y)}{2}-a_{13}(x,y))u_{xyy}^2(x,y)\,dy\,dx+$$
$$+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}\frac{1}{2}a_{03x}(x,y)u_{yy}^2(x,y)\,dy\,dx+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}\frac{1}{2}a_{30y}(x,y)u_{xx}^2\,dy\,dx+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}(-\frac{1}{2}a_{10y}(x,y))u_x^2\,dy\,dx+$$
$$+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}(-\frac{1}{2}a_{01x}(x,y))u_y^2\,dy\,dx+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}\frac{1}{2}a_{00xy}(x,y)u^2\,dy\,dx+$$
$$+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}(a_{32x}+a_{23y}-a_{22})(x,y)u_{xyy}(x,y)u_{xxy}(x,y)\,dy\,dx+$$
$$+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}(a_{02}-a_{03y})(x,y)u_{yy}(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}(a_{20}-a_{30x})(x,y)u_{xx}(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx.$$

Так как функции $a_{ij}(x,y)$ являются непрерывными на компакте, то они достигают своих точных верхних и точных нижних граней. Обозначим $\sup\limits_{(x,y)\in D} a_{ij}(x,y)=sa_{ij}$, $\inf\limits_{(x,y)\in D} a_{ij}(x,y)=ia_{ij}$. Аналогичные обозначения вводятся и для частных производных этих функций, например, $\sup\limits_{(x,y)\in D} a_{ijx}(x,y)=sa_{ijx}$ и получим оценку

$$(L(u),u_{xy})\geq\|u_{xxyy}\|^2+\left(-\frac{sa_{32xxy}}{2}-\frac{sa_{23xyy}}{2}+\frac{ia_{22xy}}{2}+\frac{ia_{13yy}}{2}+\frac{ia_{31xx}}{2}-\frac{sa_{21x}}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{sa_{12y}}{2}+ia_{11}\right)\|u_{xy}\|^2+\left(\frac{ia_{32y}}{2}-sa_{31}\right)\|u_{xxy}\|^2+\left(\frac{ia_{23x}}{2}-sa_{13}\right)\|u_{xyy}\|^2+\frac{1}{2}ia_{03x}\|u_{yy}\|^2+$$
$$+\frac{1}{2}ia_{30y}\|u_{xx}\|^2+\left(-\frac{1}{2}sa_{10y}\right)\|u_x\|^2+\left(-\frac{1}{2}sa_{01x}\right)\|u_y\|^2+\frac{1}{2}ia_{00xy}\|u\|^2+$$
$$+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}(a_{32x}+a_{23y}-a_{22})(x,y)u_{xyy}(x,y)u_{xxy}(x,y)\,dy\,dx+$$
$$+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}(a_{02}-a_{03y})(x,y)u_{yy}(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx+\int_0^{x_1}\int_0^{y_1}(a_{20}-a_{30x})(x,y)u_{xx}(x,y)u_{xy}(x,y)\,dy\,dx.$$

Используя неравенства Коши – Буняковского: $|(u,v)|\leq\|u\|\cdot\|v\|$, Коши: $|a\cdot b|\leq\dfrac{|a|^2}{2}+\dfrac{|b|^2}{2}$, получим

$$(L(u),u_{xy})\geq\|u_{xxyy}\|^2+\left(-\frac{sa_{32xxy}}{2}-\frac{sa_{23xyy}}{2}+\frac{ia_{22xy}}{2}+\frac{ia_{13yy}}{2}+\frac{ia_{31xx}}{2}-\frac{sa_{21x}}{2}-\frac{sa_{12y}}{2}+\right.$$
$$\left.+ia_{11}-\frac{1}{2}s|a_{02}-a_{03y}|-\frac{1}{2}s|a_{20}-a_{30x}|\right)\|u_{xy}\|^2+\left(\frac{ia_{32y}}{2}-sa_{31}-s|a_{32x}+a_{23y}-a_{22}|\right)\|u_{xxy}\|^2+$$
$$+\left(\frac{ia_{23x}}{2}-sa_{13}-s|a_{32x}+a_{23y}-a_{22}|\right)\|u_{xyy}\|^2+\left(\frac{1}{2}ia_{03x}-\frac{1}{2}s|a_{02}-a_{03y}|\right)\|u_{yy}\|^2+$$
$$+\left(\frac{1}{2}ia_{30y}-\frac{1}{2}s|a_{20}-a_{30x}|\right)\|u_{xx}\|^2+\left(-\frac{1}{2}sa_{10y}\right)\|u_x\|^2+\left(-\frac{1}{2}sa_{01x}\right)\|u_y\|^2+\frac{1}{2}ia_{00xy}\|u\|^2.$$

При этом

$$(L(u),u_{xy})=(f,u_{xy})\leq\frac{\|f\|^2}{2}+\frac{\|u_{xy}\|^2}{2}.$$

Обозначив

$$\alpha_1=-\frac{sa_{32xxy}}{2}-\frac{sa_{23xyy}}{2}+\frac{ia_{22xy}}{2}+\frac{ia_{13yy}}{2}+\frac{ia_{31xx}}{2}-\frac{sa_{21x}}{2}-\frac{sa_{12y}}{2}+ia_{11}-$$
$$-\frac{1}{2}s|a_{02}-a_{03y}|-\frac{1}{2}s|a_{20}-a_{30x}|-\frac{1}{2},$$

$$\alpha_2 = \frac{ia_{32y}}{2} - sa_{31}(x,y) - s|a_{32x} + a_{23y} - a_{22}|, \qquad \alpha_3 = \frac{ia_{23x}}{2} - sa_{13} - s|a_{32x} + a_{23y} - a_{22}|,$$
$$\alpha_4 = \frac{1}{2}ia_{03x} - \frac{1}{2}s|a_{02} - a_{03y}|, \qquad \alpha_5 = \frac{1}{2}ia_{30y} - \frac{1}{2}s|a_{20} - a_{30x}|,$$
$$\alpha_6 = -\frac{1}{2}sa_{10y}, \qquad \alpha_7 = -\frac{1}{2}sa_{01x}, \qquad \alpha_8 = \frac{1}{2}ia_{00xy},$$

приходим к неравенству

$$\frac{\|f\|^2}{2} \geq \|u_{xxyy}\|^2 + (\alpha_1)\|u_{xy}\|^2 + \alpha_2\|u_{xxy}\|^2 + \alpha_3\|u_{xyy}\|^2 + \alpha_4\|u_{yy}\|^2 +$$
$$+\alpha_5\|u_{xx}\|^2 + \alpha_6\|u_x\|^2 + \alpha_7\|u_y\|^2 + \alpha_8\|u\|^2.$$

Требуя неотрицательности коэффициентов при нормах и полагая $f = 0$, получим, что функция u может быть равной только нулю.

При $f \equiv 0$, $\varphi_k \equiv \psi_k \equiv 0$, $\varphi_{01} \equiv \psi_{01} \equiv 0$ $(k = 0,1)$ система уравнений для нахождения φ_2, ψ_2 является тоже однородной. В силу доказанной единственности решения задачи эта система допускает в данном случае только нулевое решение. По теореме Фредгольма [11] это означает однозначную разрешимость неоднородной системы уравнений (6), (7).

Таким образом, имеет место

Теорема. *Если коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют неравенствам* $\alpha_k \geq 0$ $(k = \overline{1,8})$*, то задача* (1)–(3) *имеет единственное решение.*

Отметим, что условия теоремы являются существенными. Рассмотрим, например, поставленную задачу для уравнения $u_{xxxyyy} + u_{xxxy} = 0$ в области $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$ с нулевыми условиями (2), (3) на границе. В нем коэффициент $a_{31} > 0$, а все остальные равны нулю, условие теоремы не выполнено. Решением, в чем можно убедиться непосредственно, является функция $u(x,y) = \sin x \sin y$, отличная от тождественного нуля в области D. При этом уравнение $u_{xxxyyy} - u_{xxxy} = 0$ имеет только нулевое решение.

Библиографический список

1. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 296 с.
2. *Березанский Ю.М.* О задаче типа Дирихле для уравнения колебания струны // УМЖ. 1960. Т. 12, № 4. С. 363–372.
3. *Вахания Н.Н.* Об одной краевой задаче с заданием на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебаний струны // ДАН СССР. 1957. Т. 116, № 6. С. 906–909.
4. *Вахания Н.Н.* О задаче Дирихле для уравнения колебаний струны // Сообщения АН Груз.ССР. 1958. Т. 21, №2. С. 131–138.
5. *Фокин М.В.* О задаче Дирихле для уравнения струны // Некорректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: СО АН СССР, 1981. С. 178–182.
6. *Abdul–Latif A.I.* Dirichlet, Neumann and mixed Dirichlet – Neumann value problems for $u_{xy} = 0$ in rectangles // Proc. Roy. Sos. Edinburgh. 1978. Ser. A, № 82. P. 107–110.
7. *Солдатов А.П., Шхануков М.Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // ДАН СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552.
8. *Уткина Е.А.* К общему случаю задачи Гурса// Изв. вузов. Математика. 2005. № 8. С. 57–62.
9. *Жегалов В.И., Миронов А.Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казанское математическое общество, 2001. 226 с.
10. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
11. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 528 с.