НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МЕХАНИКА

УДК 532.5.031

ЗАДАЧА МАКСИМИЗАЦИИ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ ОКРУЖНОСТИ С ВИХРЕМ В ПОТОКЕ

Е.В. Варсегова

Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н.Г. Чебетарева
Казанского государственного университета
E-mail: evarsegova@yandex.ru

Суть проблемы заключается в нахождении такого положения в потоке вихря, при котором коэффициент подъемной силы окружности достигает максимума. Показано, что при стремлении вихря к окружности подъемная сила неограниченно возрастает.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, окружность, вихрь.

The Problem of Lift Maximization for Circle with a Vortex in a Stream

E.V. Varsegova

N.G. Chebotarev Research Institute of Mathematics and Mechanics Kazan State University
E-mail: evarsegova@yandex.ru

The key part of the problem lies in finding of vortex position in a stream which would provide the maximum lift of circle. It has been shown that at approaching of a vortex to circle the lift unrestrictedly increases.

Key words: ideal incompressible fluid, circle, vortex.

Максимизация коэффициента подъемной силы крылового профиля является актуальной задачей аэродинамического проектирования. Задача определения формы гладкого замкнутого контура, на котором достигается наибольшее значение циркуляции скорости при обтекании потоком идеальной несжимаемой жидкости, исследовалась в ряде работ. В частности, в [1] сказано, что из формул М. А. Лаврентьева для вариаций конформных отображений следует, что таким контуром является окружность при режиме обтекания с совпадающими точками торможения и схода потока. Полное исследование этой задачи приведено в [2]; коэффициент подъемной силы, отнесенной к периметру контура и скорости набегающего потока равен четырем.

В настоящей работе решается задача максимизации подъемной силы окружности, когда в потоке находится вихрь. Полученные результаты позволяют теоретически оценить максимальную величину коэффициента подъемной силы окружности в рамках модели ИНЖ при наличии в потоке вихря.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В плоскости ζ единичная окружность $|\zeta| = 1$ (рис. 1) обтекается потоком идеальной несжимаемой жидкости с заданной скоростью $u_0 e^{i\beta}$ набегающего потока (величина β не задана); область течения обозначим через G_ζ. В точке O потока находятся вихрь. Предполагается, что критические точки B и C расположены на контуре L_ζ, а критическая точка M — в потоке. Интенсивность Γ_1 вихря задана.

В дальнейшем будем использовать безразмерную интенсивность $\Gamma_1' = \Gamma_1/(Lu_0)$. Здесь $L = 2\pi$ — длина окружности.

Требуется найти такое положение вихря, чтобы коэффициент подъемной силы $C_{y\alpha} = 2\Gamma/(u_0 L)$ окружности был максимальным.

Комплексно-сопряженную скорость $dw/d\zeta$ обтекания окружности $|\zeta| \leq 1$ с вихрем в потоке можно записать, воспользовавшись методом особенностей (см., напр., [3]). Таким образом,

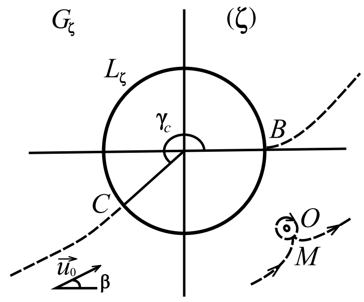

Рис. 1

$$dw/d\zeta = u_0 e^{-i\beta}\Phi(\zeta, \mu_v), \tag{1}$$

$$\Phi(\zeta, \mu_v) = \frac{(\zeta - \zeta_c)(\zeta - \zeta_b)}{\zeta^2} \cdot \frac{(\zeta - \zeta_m)(\zeta - 1/\overline{\zeta}_m)}{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - 1/\overline{\zeta}_0)},$$

где u_0 и β — соответственно модуль и аргумент скорости потока на бесконечности в плоскости ζ; $\zeta_c = e^{i\gamma_c}$, $\zeta_b = e^{i\gamma_b}$,$\zeta_0 = r_0 e^{i\gamma_0}$, $\zeta_m = r_m e^{i\gamma_m}$; а μ_v, $v = \overline{1,6}$, — свободные параметры: γ_c, $4\gamma_b$, γ_0, γ_m, r_0, r_m.

Рассмотрим (1) на окружности $\zeta = e^{i\gamma}$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ и установим зависимость между углом β и угловыми координатами точек разветвления потока и угловой координатой точки положения вихря

$$\beta = (\gamma_c + \gamma_b - \pi)/2 + \gamma_m - \gamma_0.$$

Запишем распределение скорости $u(\gamma) = \pm |dw/d\zeta|_{\zeta = e^{i\gamma}}$ (знак «+» выбирается при совпадении направления обхода контура с направлением скорости, а «−» выбирается в обратном случае) по окружности:

$$u(\gamma) = 4u_0 \sin\frac{\gamma - \gamma_b}{2} \sin\frac{\gamma - \gamma_c}{2} \cdot \frac{r_m + 1/r_m - 2\cos(\gamma - \gamma_m)}{r_0 + 1/r_0 - 2\cos(\gamma - \gamma_0)}. \tag{2}$$

Рассмотрим поведение $dw/d\zeta$ в окрестности $\zeta = \infty$ бесконечно удаленной точки, в которой поток имеет вихрь с циркуляцией Γ:

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_0 e^{-i\beta} - \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{\zeta} + \sum_{j=2}^{\infty} a_k \zeta^{-j}.$$

Из разложения $\Phi(\zeta, \mu_v)$ в окрестности $\zeta = \infty$ получим соотношение для циркуляции

$$\Gamma = u_0 f_0(\mu_v), \tag{3}$$

где $f_0(\mu_v) = 2\pi\left[-\sin(\gamma_b - \beta) - \sin(\gamma_c - \beta) + (r_0 + 1/r_0)\sin(\gamma_0 - \beta) - (r_m + 1/r_m)\sin(\gamma_m - \beta\ )\right.$.

Аналогичные соотношения можно получить для интенсивности вихря, рассмотрев поведение комплексно-сопряженной скорости (1) вблизи точки ζ_0:

$$\begin{aligned} f_1(\mu_v) = \frac{2\pi u_0}{r_0 - 1/r_0}\,\mathrm{Im}\,\Big[& e^{i(\gamma_0 - \beta)}(1 - e^{i(\gamma_b - \gamma_0)}/r_0)(1 - e^{i(\gamma_c - \gamma_0)}/r_0) \times \\ & \times (r_0 - e^{i(\gamma_m - \gamma_0)} r_m)(r_0 - e^{i(\gamma_m - \gamma_0)}/r_m)\Big] = \Gamma_1, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} f_2(\mu_v) = \frac{2\pi u_0}{r_0 - 1/r_0}\,\mathrm{Re}\,\Big[& e^{i(\gamma_0 - \beta)}(1 - e^{i(\gamma_b - \gamma_0)}/r_0)(1 - e^{i(\gamma_c - \gamma_0)}/r_0) \times \\ & \times (r_0 - e^{i(\gamma_m - \gamma_0)} r_m)(r_0 - e^{i(\gamma_m - \gamma_0)}/r_m)\Big] = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Найти параметры μ_v, $v = \overline{1,6}$, при которых функция $f_0(\mu_v)$ принимает максимальное значение при ограничениях

$$\Gamma_1 = f_1(\mu_v), f_2(\mu_v) = 0.$$

Эта задача исследовалась численно. В результате было установлено, что точка разветвления C потока, которая находится на окружности, совпадает с точкой схода B потока. Если зафиксировать точки $\gamma_b = 0$ и $\gamma_c = 2\pi$, то функция $f_0(\mu_v)$ будет зависеть от четырех свободных параметров координат точки разветвления потока $M(\gamma_m, r_m)$ и точки положения вихря $O(\gamma_0, r_0)$. Точка разветвления потока M находится из условий (4), (5) заданности интенсивности вихря. Таким образом, получили, что функция f_0 зависит от двух свободных параметров γ_0, r_0 (зависимость представлена на рис. 2). Видно, что функция имеет единственный максимум при $r_0 \to 1$, $\gamma_0 = 2\pi$. Зафиксируем параметры $\gamma_0 = 2\pi$, $\gamma_m = 2\pi$, а остальные исследуем аналитически.

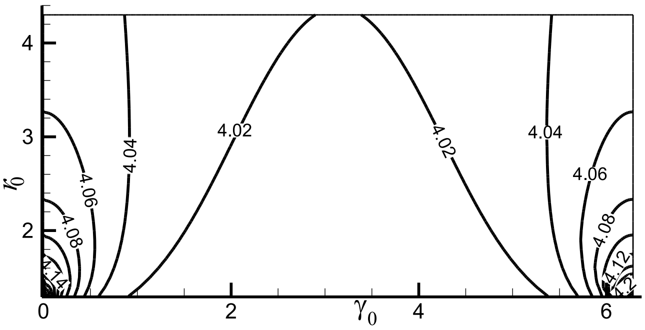

Рис. 2

В этом случае теоретический угол атаки $\beta = \pi/2$. Из (4) можно установить зависимость радиуса r_m от r_0, которая выражается формулой $r_m = \left(A + \sqrt{A^2 - 4}\right)/2$, где $A = \left(\Gamma_1'(r_0 + 1)\right) / (r_0 - 1) + r_0 + 1/r_0$.

Максимизируемый функционал примет вид

$$C_{y\alpha} = 4 + \frac{\Gamma_1'(r_0 + 1)}{(r_0 - 1)}.$$

Отметим, что при фиксированной величине интенсивности вихря Γ_1' добиться увеличения коэффициента подъемной силы $C_{y\alpha}$ можно за счет приближения вихря к окружности. При этом если $r_0 \to 1$, то $C_{y\alpha}$ неограниченно возрастает (рис. 3). Это объясняется тем, что при больших значениях циркуляции окружность и вихрь обтекаются как единое целое, а точка М стремиться к бесконечности. Картина обтекания окружности с вихрем при больших значениях циркуляции изображена на рис. 4.

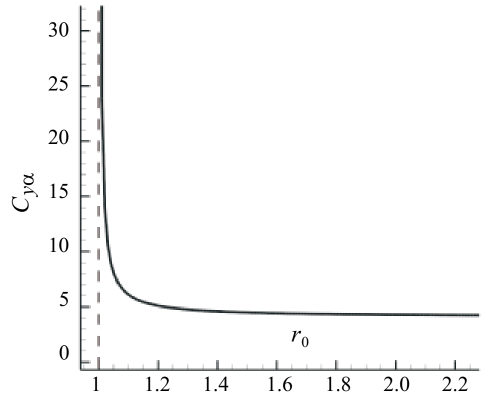

Рис. 3

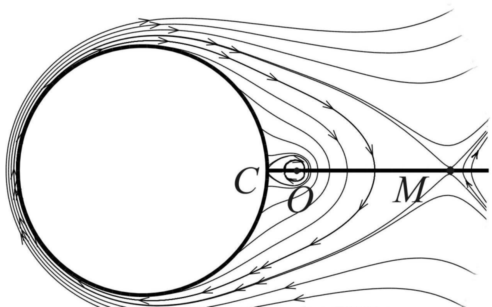

Рис. 4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из анализа результатов можно сделать следующие выводы:

– при стремлении вихря к окружности $C_{y\alpha}$ неограниченно возрастает;

– при заданном r_0 значение $C_{y\alpha}$ максимально, если точка разветвления C и схода B потока совпадают;

– наличие вихря в потоке позволяет увеличить значение коэффициента $C_{y\alpha}$ по сравнению с окружностью без вихря в потоке.

Выражаю благодарность Н.Б. Ильинскому и Д.Ф. Абзалилову за полезные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (*проект* П1124).

Библиографический список

1. *Зубов В.И.* К вопросу об оптимальном профиле крыла в потоке идеальной несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т. 20, № 1. С. 241–245.

2. *Елизаров А.М.* Некоторые экстремальные задачи теории крыла // Изв. вузов. Математика. 1988. № 10. С. 71–74.

3. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэродинамики. М.: Наука, 1994. 440 с.