



## МЕХАНИКА

УДК 534.2

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛОСКОМ АКУСТИЧЕСКОМ СЛОЕ С КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫМИ ГИБКИМИ СТЕНКАМИ

А. И. Вельмисова, М. В. Вильде, И. В. Кириллова

Саратовский государственный университет,  
кафедра математической теории упругости и биомеханики  
E-mail: mv\_wilde@mail.ru

Рассматривается плоский акустический слой, одна из стенок которого содержит вставку конечной длины с другими свойствами материала. Изучаются распространение и отражение гармонических волн в таком слое. Источником колебаний является однородная волна, падающая из бесконечности. Решение задачи в трех областях (до вставки, в пределах вставки и после вставки) ищется в виде суммы однородных волн. Приведены результаты численного исследования зависимости коэффициента отражения по энергии от частоты.

**Ключевые слова:** мембрана, акустические волны, моды, отраженные волны, прошедшие волны.

#### Propagation and Reflection of Harmonic Waves in a Plane Acoustic Layer with Non-Homogeneous Flexible Walls

A. I. Velmisova, M. V. Wilde, I. V. Kirillova

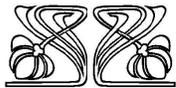
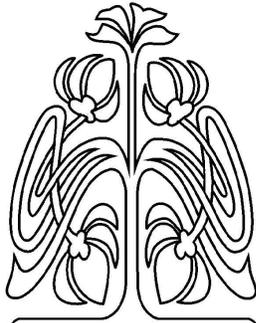
Saratov State University,  
Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics  
E-mail: mv\_wilde@mail.ru

A plane acoustic layer bounded by elastic membranes, one of which has an insert with different material properties, is considered. The propagation and reflection of harmonic waves in such a layer is studied. The source of vibrations is an incident mode, coming from infinity. The solution in three regions (before the insert, under the insert, after the insert) is sought as modal expansion. The numerical results for the reflected power coefficient are presented.

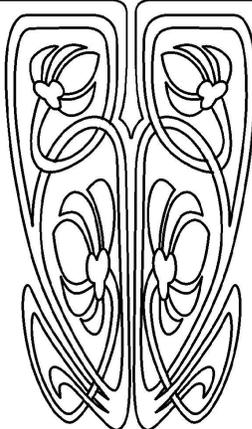
**Key words:** membrane, acoustic waves, modes, reflected waves, transmitted waves.

Изучение процессов распространения волн в продольно-неоднородных волноводах позволяет решить ряд актуальных задач, возникающих при проектировании различных инженерных конструкций и устройств неразрушающего контроля. В случае упругого твердого волновода простейшей задачей данного типа является задача о распространении гармонических волн в продольно-неоднородном упругом слое (см., например, работы [1–3]). В результате решения этой задачи были получены фундаментальные результаты, позволившие описать качественную картину прохождения и отражения волн в волноводах данного типа.

При моделировании ряда инженерных и биологических гидроупругих систем (например, кровеносных сосудов) возникает задача изучения распространения волн в продольно-неоднородных гидроупругих волноводах. Простейшим волноводом такого типа является плоский акустический слой с гибкими упругими стенками. Диспер-



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





сионные свойства такого волновода были изучены в работах [4–6]. В работе [7] рассмотрен продольно-неоднородный волновод с одной границей раздела свойств материала стенок. В данной работе рассматривается случай двух границ раздела свойств материала.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о распространении гармонических волн в плоском акустическом слое шириной  $2h$ , одна из стенок которого содержит вставку конечной длины с другими свойствами материала (рис. 1).

В безразмерных переменных уравнения движения мембран и акустической среды можно представить в виде



Рис. 1. Плоский акустический слой с кусочно-неоднородной стенкой

$$\begin{cases} \varepsilon_i^2 \frac{\partial w_i^{(j)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w_i^{(j)}}{\partial \tau^2} + \kappa_i q_i^{(j)} = 0, \\ \frac{\partial^2 p^{(j)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p^{(j)}}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 p^{(j)}}{\partial \tau^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial p^{(j)}}{\partial \zeta}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = I, II, III$ . Безразмерные переменные в (1) введены по формулам

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \zeta = \frac{y}{h}, \quad \tau = \frac{c_0 t}{h}, \quad w_i^{(j)} = h w_i^{*(j)}, \quad v^{(j)} = h v^{*(j)}, \quad p^{(j)} = c_0^2 \rho_0 p^{*(j)}, \quad (2)$$

звездочки в (1) и далее опущены. В системе (1) индексом  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) обозначены величины, принадлежащие соответственно первой, второй и третьей мембране, индексом  $j$  ( $j = I, II, III$ ) — области акустической среды;  $w_i^{(j)}$  — поперечное смещение  $i$ -й мембраны в  $j$ -й области,  $c_i$  — скорость распространения упругой волны в  $i$ -й мембране,  $c_i = \sqrt{F_i/\tilde{\rho}_i}$ , где  $F_i$  — сила натяжения  $i$ -й мембраны,  $\tilde{\rho}_i = \rho_i h_i$ ,  $h_i$  — толщина  $i$ -й мембраны,  $\rho_i$  — плотность материала  $i$ -й мембраны;  $q_i^{(j)}$  — давление, оказываемое  $j$ -й акустической средой на  $i$ -тую мембрану,  $c_0$  — скорость распространения звука в акустической среде,  $\rho_0$  — плотность акустической среды,  $x$  и  $y$  — продольная и поперечная координаты,  $v^{(j)}$  — поперечное смещение  $j$ -й среды,  $p^{(j)}$  — акустическое давление в области  $j$ ,  $\varepsilon_i = c_i/c_0$ ,  $\varepsilon_i \ll 1$ ,  $\kappa_i = h\rho_0/h_i\rho_i$ .

На верхней и нижней мембранах должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} y = h : \quad & q_1^{(I)} = p^{(I)}, \quad q_3^{(II)} = p^{(II)}, \quad q_1^{(III)} = p^{(III)}, \quad w_1^{(I)} = v^{(I)}, \\ & w_3^{(II)} = v^{(II)}, \quad w_1^{(III)} = v^{(III)}; \\ y = -h : \quad & q_2^{(I)} = -p^{(I)}, \quad q_2^{(II)} = -p^{(II)}, \quad q_2^{(III)} = -p^{(III)}, \quad w_2^{(I)} = v^{(I)}, \\ & w_2^{(II)} = v^{(II)}, \quad w_2^{(III)} = v^{(III)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия на стыках  $\xi = 0$  и  $\xi = L_0$  ( $L_0 = L/h$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} \xi = 0 : \quad & v^{(I)} = v^{(II)}, \quad \frac{\partial v^{(I)}}{\partial \xi} = \frac{\partial v^{(II)}}{\partial \xi}, \\ & w_1^{(I)} = w_3^{(II)}, \quad w_2^{(I)} = w_2^{(II)}, \quad \frac{\partial w_1^{(I)}}{\partial \xi} = \frac{\partial w_3^{(II)}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w_2^{(I)}}{\partial \xi} = \frac{\partial w_2^{(II)}}{\partial \xi}; \\ \xi = L_0 : \quad & v^{(II)} = v^{(III)}, \quad \frac{\partial v^{(II)}}{\partial \xi} = \frac{\partial v^{(III)}}{\partial \xi}, \\ & w_3^{(II)} = w_1^{(III)}, \quad w_2^{(II)} = w_2^{(III)}, \quad \frac{\partial w_3^{(II)}}{\partial \xi} = \frac{\partial w_1^{(III)}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w_2^{(II)}}{\partial \xi} = \frac{\partial w_2^{(III)}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (4)$$



## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ И ОТРАЖЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим распространение гармонических волн с заданной частотой  $\omega$  и волновым числом  $\chi_n^{(j)}$ ,  $n = 1, 2, \dots, j = \text{I, II, III}$ , связанным с частотой дисперсионным уравнением, полученным в работе [5]. В этом случае граничные условия (4) эквивалентны следующим условиям для функции давления:

$$\begin{aligned} \xi = 0: \quad p^{(\text{I})} &= p^{(\text{II})}, & \frac{\partial p^{(\text{I})}}{\partial \xi} &= \frac{\partial p^{(\text{II})}}{\partial \xi}; \\ \xi = L_0: \quad p^{(\text{II})} &= p^{(\text{III})}, & \frac{\partial p^{(\text{II})}}{\partial \xi} &= \frac{\partial p^{(\text{III})}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Функция давления в моде с номером  $n$ , распространяющейся в положительном направлении оси  $x$ , задается соотношением

$$p_r^{(j)} = C P_n^{(j)}(\zeta) e^{i(\omega\tau - \chi_n^{(j)}\xi)}, \quad (6)$$

где  $C$  — некоторая постоянная,  $P_n^{(j)}(\zeta)$  — собственная функция в области  $j$ , имеющая вид

$$P_n^{(j)}(\zeta) = \text{ch}(\beta_n^{(j)}\zeta) + \frac{\beta_n^{(j)}(\alpha_{2n}^{(j)})^2 \text{sh}\beta_n^{(j)} - \kappa_2 \omega^2 \text{ch}\beta_n^{(j)}}{\beta_n^{(j)}(\alpha_{2n}^{(j)})^2 \text{ch}\beta_n^{(j)} - \kappa_2 \omega^2 \text{sh}\beta_n^{(j)}} \text{sh}(\beta_n^{(j)}\zeta). \quad (7)$$

В (7) приняты следующие обозначения:

$$\beta_n^{(j)} = \sqrt{(\chi_n^{(j)})^2 - \omega^2}, \quad \alpha_{2n}^{(j)} = \sqrt{\varepsilon_2^2 (\chi_n^{(j)})^2 - \omega^2}. \quad (8)$$

Пусть на стык  $\xi = 0$  падает мода с номером  $l_0$ . Выражение для падающей волны имеет вид

$$p_r^{(\text{I})} = q_0 P_{l_0}^{(\text{I})}(\zeta) e^{i(\omega\tau - \chi_{l_0}^{(\text{I})}\xi)}. \quad (9)$$

Решения для отраженной волны в области I и прошедшей волны в области III представим в виде следующих линейных комбинаций:

$$p_l^{(\text{I})} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m P_m^{(\text{I})}(\zeta) e^{i(\omega\tau + \chi_m^{(\text{I})}\xi)}, \quad (10)$$

$$p^{(\text{III})} = \sum_{m=1}^{\infty} B_m P_m^{(\text{III})}(\zeta) e^{i(\omega\tau - \chi_m^{(\text{III})}(\xi - L_0))}. \quad (11)$$

Решение в области II будем искать в виде

$$p^{(\text{II})} = \sum_{m=1}^{\infty} \left( C_m e^{-i\chi_m^{(\text{II})}\xi} + D_m e^{-i\chi_m^{(\text{II})}(L_0 - \xi)} \right) P_m^{(\text{II})}(\zeta) e^{i\omega\tau}. \quad (12)$$

В (10)–(12)  $A_m, B_m, C_m, D_m$  — постоянные, требующие определения.

Введем скалярное произведение:

$$\langle f_1(\zeta), f_2(\zeta) \rangle_{\text{I,II}} = \int_{-1}^1 f_1 \overline{f_2} d\zeta + f_1'(1) \overline{f_2'(1)} \frac{\varepsilon_{1,3}^2}{\kappa_{1,3} \omega^2} + f_1'(-1) \overline{f_2'(-1)} \frac{\varepsilon_2^2}{\kappa_2 \omega^2}. \quad (13)$$

Подставим решения (10)–(12) в граничные условия (5), учитывая, что  $p^{(\text{I})} = p_r^{(\text{I})} + p_l^{(\text{I})}$ . Используя соотношение ортогональности из [6] (подобного рода соотношения ортогональности изучались также в работах [8–10]), получим систему для определения постоянных  $A_m$  и  $B_m$ :

$$\begin{aligned} - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_{mn} (\chi_n^{(\text{II})} + \chi_m^{(\text{I})}) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \gamma_{mn} (\chi_n^{(\text{II})} - \chi_m^{(\text{I})}) e^{-i\chi_n^{(\text{II})} L_0} &= q_0 \gamma_{l_0 n} (\chi_n^{(\text{II})} - \chi_{l_0}^{(\text{I})}), \\ \sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_{mn} (\chi_n^{(\text{II})} - \chi_m^{(\text{I})}) e^{-i\chi_n^{(\text{II})} L_0} - \sum_{m=1}^{\infty} B_m \gamma_{mn} (\chi_n^{(\text{II})} + \chi_m^{(\text{I})}) &= -q_0 \gamma_{l_0 n} (\chi_n^{(\text{II})} + \chi_{l_0}^{(\text{I})}) \end{aligned} \quad (14)$$



и формулы для определения коэффициентов  $C_m$  и  $D_m$ :

$$C_n = \frac{q_0 \gamma_{l_0 n} (\chi_n^{(II)} + \chi_{l_0}^{(I)})}{2\chi_n^{(II)} \delta_{nn}} + \frac{1}{2\chi_n^{(II)} \delta_{nn}} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_{mn} (\chi_n^{(II)} - \chi_m^{(I)}),$$

$$D_n = \frac{1}{2\chi_n^{(II)} \delta_{nn}} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \gamma_{mn} (\chi_n^{(II)} - \chi_m^{(I)}),$$
(15)

где  $\gamma_{mn} = \langle P_m^{(I)}, P_n^{(II)} \rangle_{II}$ ,  $\delta_{nn} = \langle P_n^{(II)}, P_n^{(II)} \rangle_{II}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

После определения коэффициентов  $A_m$  и  $B_m$  можно сосчитать величины среднего за период потока энергии, проходящей через поперечное сечение волновода. Для падающей, отраженной и прошедшей волн величины потока энергии вычисляются по формулам

$$R_{\text{пад}} = \frac{h\rho_0 c_0^3 \chi_{l_0}^{(I)}}{2\omega} \langle P_{l_0}^{(I)}(\zeta), P_{l_0}^{(I)}(\zeta) \rangle_I, \quad R_{\text{отраж}} = \frac{h\rho_0 c_0^3}{2\omega} \sum_{n=1}^{M_0^{(I)}} \chi_n^{(I)} |A_n|^2 \langle P_n^{(I)}(\zeta), P_n^{(I)}(\zeta) \rangle_I,$$

$$R_{\text{прош}} = \frac{h\rho_0 c_0^3}{2\omega} \sum_{n=1}^{M_0^{(III)}} \chi_n^{(I)} |B_n|^2 \langle P_n^{(I)}(\zeta), P_n^{(I)}(\zeta) \rangle_I,$$
(16)

где  $M_0^{(j)}$  — число распространяющихся волн в  $j$ -й области на заданной частоте.

Из закона сохранения энергии имеем:

$$R_{\text{пад}} = R_{\text{отраж}} + R_{\text{прош}}.$$
(17)

При усечении бесконечной системы (14) контролировалась точность выполнения граничных условий (5) и соотношения (17).

### 3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Введем коэффициент отражения

$$K_R = \frac{R_{\text{отраж}}}{R_{\text{пад}}}.$$
(18)

Графики зависимости коэффициента  $K_R$  от частоты представлены на рис. 2–5. В расчетах принималось  $L_0 = 1$  и следующие параметры задачи:

- задача А:  $\kappa_1 = 2$ ,  $\kappa_2 = 4$ ,  $\kappa_3 = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\varepsilon_2 = 0.2$ ,  $\varepsilon_3 = 0.1/\sqrt{2}$  (жирная линия);
- задача В:  $\kappa_1 = 2$ ,  $\kappa_2 = 4$ ,  $\kappa_3 = 0.1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\varepsilon_2 = 0.2$ ,  $\varepsilon_3 = 0.1/\sqrt{20}$  (тонкая линия);
- задача С:  $\kappa_1 = 2$ ,  $\kappa_2 = 4$ ,  $\kappa_3 = 20$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\varepsilon_2 = 0.2$ ,  $\varepsilon_3 = \sqrt{0.1}$  (штриховая линия).

Случай А соответствует близким значениям поверхностных плотностей мембран 1 и 3 ( $\tilde{\rho}_3 = 2\tilde{\rho}_1$ ), в случае В поверхностная плотность мембраны 3 значительно превосходит поверхностную плотность мембраны 1 ( $\tilde{\rho}_3 = 20\tilde{\rho}_1$ ), в случае С мембрана 3 значительно легче, чем мембрана 1 ( $\tilde{\rho}_3 = 0.1\tilde{\rho}_1$ ). На рис. 2 и рис. 3 представлен коэффициент отражения в случае падения первой и второй фундаментальных мод, на рис. 4 и рис. 5 — в случае падения третьей и четвертой мод высшего порядка, соответственно. Острые пики на рис. 3–5 соответствуют частотам запирания мод высшего порядка. Как видно из рис. 3–5, наиболее чувствительной к наличию вставки является вторая фундаментальная мода (рис. 3). Это объясняется тем, что на высоких частотах вторая фундаментальная мода вырождается в поверхностную волну, распространяющуюся вдоль верхней стенки ( $y = h$ ) со скоростью, приблизительно равной скорости распространения волн в мембране.

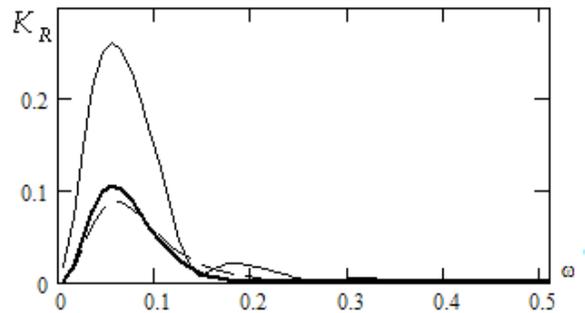


Рис. 2. Коэффициент отражения в случае падения первой моды

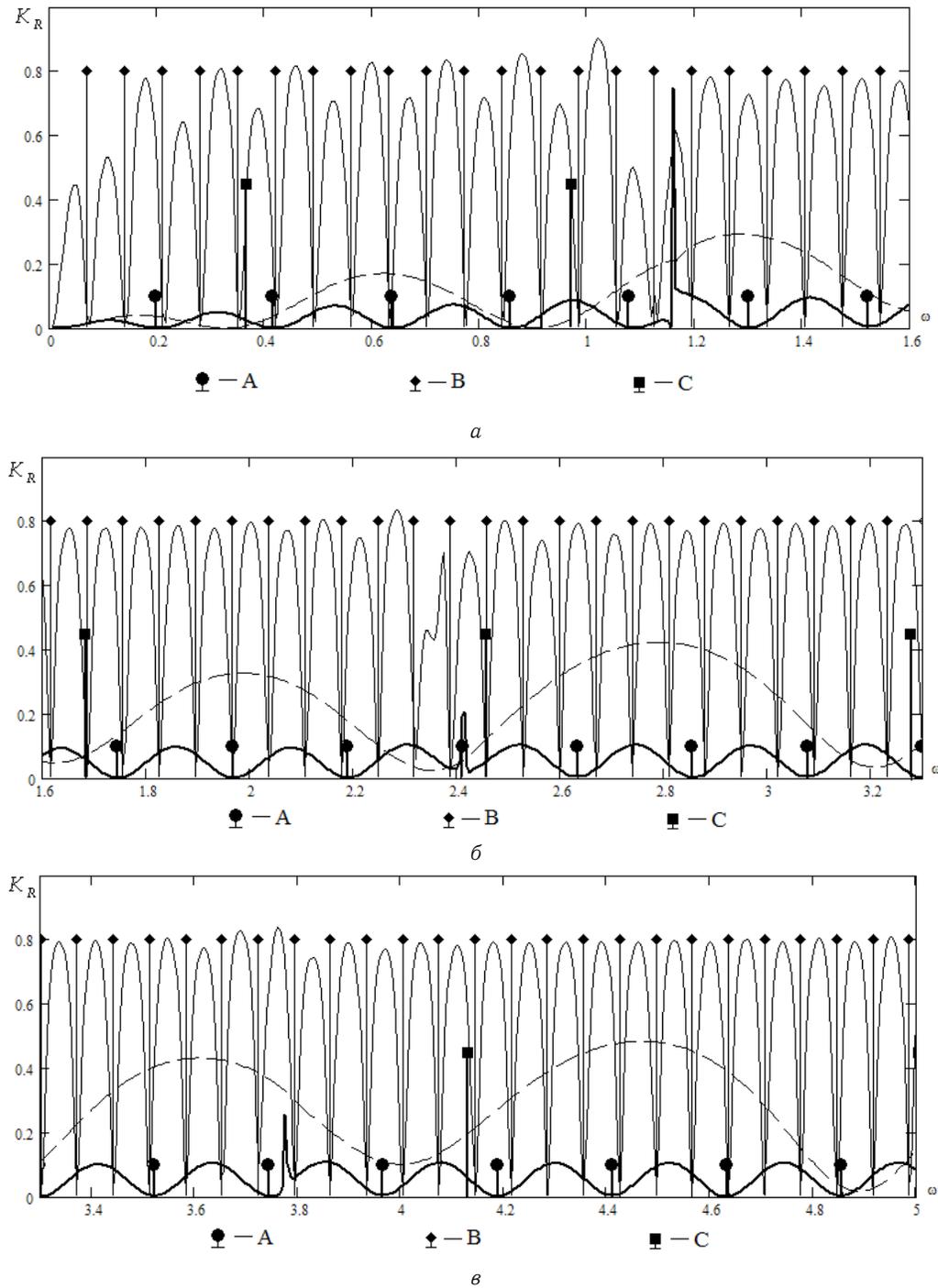


Рис. 3. Коэффициент отражения в случае падения второй моды в диапазоне частот: *a* — от 0 до 1.6, *б* — от 1.6 до 3.3, *в* — от 3.3 до 5

Минимумы коэффициента отражения  $K_R$  соответствуют так называемым «частотам пропускания», то есть частотам, на которых отражение практически отсутствует и основная доля энергии переходит в область III. Эти частоты приблизительно совпадают с резонансными частотами «вставки», которые определяются из уравнения

$$\chi_2^{(II)}(\omega) = \frac{n\pi}{L_0}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Корни уравнения (19) также представлены на рис. 3. В случаях А и В они достаточно точно определяют положение частот пропускания. В случае С (тонкая мембрана 3) частоты пропускания определяются уравнением (19) лишь приближенно. Это связано с тем, что в этом случае резонанс «вставки» сильно демпфируется неограниченной акустической средой.

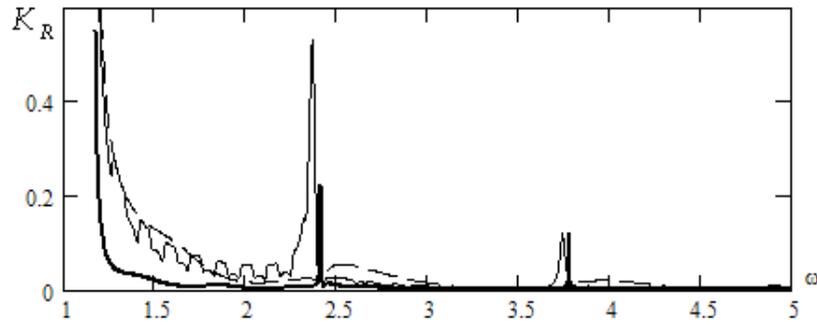


Рис. 4. Коэффициент отражения в случае падения третьей моды

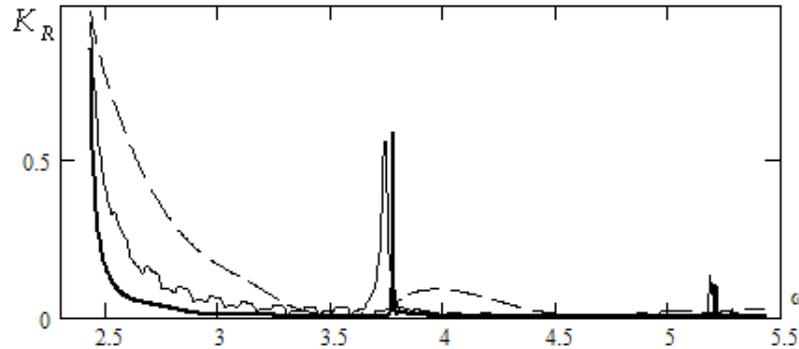


Рис. 5. Коэффициент отражения в случае падения четвертой моды

В заключение отметим, что, как видно из рис. 3 и формулы (19), положение частот пропускания и максимальное значение коэффициента отражения определяются поверхностной плотностью материала «вставки» и её длиной. Таким образом, данные о коэффициенте отражения второй фундаментальной моды можно использовать для диагностики наличия включений в стенке волновода.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00804а, 11-01-00545а).*

### Библиографический список

1. Гетман И. П., Лисицкий О. Н. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуплос // ПММ. 1988. Т. 52, № 6. С. 1044–1048.
2. Гетман И. П., Устинов Ю. А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов н/Д, 1993. 144 с.
3. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Отражение волн Лэмба от границы раздела в составном волноводе // Прикладная механика. 1985. Т. 21, № 5. С. 121–125.
4. Каплунов Ю. Д., Кириллова И. В., Постнова Ю. А. Дисперсия волн в плоском акустическом слое с гибкими упругими стенками // Акустический журн. 2004. Т. 50, № 6. С. 802–807.
5. Постнова Ю. А. Дисперсия волн в плоском акустическом слое с упругими стенками с различными геометрическими и материальными свойствами // Механика деформируемых сред. Саратов, 2004. Вып. 15. С. 95–101.
6. Кириллова И. В., Постнова Ю. А. Волны в плоском акустическом слое с кусочно-неоднородными упругими свойствами // Смешанные задачи механики деформируемого тела : материалы V Рос. конф. с междунар. участием / под ред. акад. Н.Ф. Морозова. Саратов, 2005. С. 179–182.
7. Вельмисова А. И. Распространение и отражение гармонических волн в плоском акустическом слое с гибкими стенками в случае разрыва упругих свойств на одной из стенок // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов, 2010. Вып. 12. С. 136–140.
8. Warren D. P., Lawrie J. B., Mohamed I. M. Acoustic scattering in waveguides that are discontinuous in geometry and material property // Wave Motion. 2002. Vol. 36. P. 119–142.
9. Lawrie J. B. On eigenfunction expansions associated with wave propagation along ducts with wave-bearing boundaries // IMA J. Appl. Math. 2007. Vol. 72. P. 376–394.
10. Lawrie J. B. Comments on a class of orthogonality relation relevant to fluid-structure interaction // Meccanica. DOI 10.1007/s11012-011-9471-8. (Forthcoming).