УДК 514.7

КЛАСС ВСЕХ ГЛАДКИХ ЕДИНИЧНЫХ АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ, ПРОДОЛЬНО ВИХРЕВЫХ В R^3

В.П. Верещагин, Ю.Н. Субботин*, **Н.И. Черных***

Российский государственный профессионально-педагогический университет, Екатеринбург;
*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург,
E-mail: yunsub@imm.uran.ru, Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

Методом отображений конструируются два класса полей. Первый исчерпывает единичные аксиально симметричные решения (ЕАСР) задачи Громеки о нахождении векторного поля, линии которого совпадают с линиями поля его ротора. Второй исчерпывает гладкие в R^3 ЕАСР расширенной в этой работе задачи Громеки о векторном поле с разными в смежных областях вихревыми свойствами.

Ключевые слова: скалярные и векторные поля, ротор.

The Full Class of Smooth Axially Symmetric Longitudinal-Vortex Unit Vector Fields

V.P. Vereshchagin, Yu.N. Subbotin, N.I. Chernykh

Russian State Professional – Pedagogical University, Ekaterinburg;
*Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of RAS, Ekaterinburg
E-mail: yunsub@imm.uran.ru, Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

In the paper, two vector fields are constructed by means of transformation method. The first describes the axially symmetric unit solutions (ASUS) of the Gromeka problem to find out vector fields which flow lines coincide in R^3 with vortex lines. The second describes the smooth ASUS of the extended in this paper Gromeka problem of finding a vector fields with different vortex properties in adjacent parts of R^3.

Key words: scalar and vector fields, curl.

В [1] предложен метод построения в области $D \subset R^3$ единичных векторных полей $\{\beta : \ \beta \in C^{(1)}(D),\ \mathrm{rot}\beta \neq 0$ п. в. в D, $[\beta, \mathrm{rot}\beta] = 0$, $|\beta| = 1$ в $D\} := \mathfrak{L}_u(D)$. Символами $[a, b]$ и (a, b) в работе обозначаются соответственно векторное и скалярное произведения векторов a, b. Линии поля β по определению класса $\mathfrak{L}_u(D)$ всюду в D совпадают с его вихревыми линиями (линиями поля $\mathrm{rot}\,\beta$). Для краткости в [1] такие поля названы продольно вихревыми в D. Задача этой работы — найти, в отличие от [2], класс $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{\mathrm{uas}}(R^3))$ всех гладких единичных векторных полей, продольно вихревых в R^3 и аксиально симметричных. Результаты ее интересны в связи с расширением класса решений задачи И. С. Громеки [3] о векторном поле, линии которого совпадают с его вихревыми линиями.

1. Пусть $\{i_1, i_2, i_3\}$ — базис декартовой системы координат в R^3 с началом в точке O, Π — плоскость, ортогональная i_3 и проходящая через начало O, X и ξ — радиус-векторы произвольной точки из R^3 и плоскости Π, $\psi(\xi)$, $\Phi(\xi)$ — достаточно гладкие скалярные поля, заданные в Π, $\widehat{\Omega}(\xi) = \widehat{\Omega}(\psi(\xi), l(\xi))$ — тензорное поле, которое, действуя на вектор $g(\xi)$, поворачивает его на угол $\psi(\xi)$ вокруг оси, проходящей через точку ξ и задаваемой ортом

$$l(\xi) = l(\Phi(\xi)) = i_1 \cos\Phi(\xi) + i_2 \sin\Phi(\xi). \tag{1}$$

Тогда, следуя [1], можно утверждать, что векторное поле

$$\beta(X) = t(\xi(X)) = t(\psi(\xi(X)), \Phi(\xi(X))) \tag{2}$$

принадлежит классу $\mathfrak{L}_u(R^3)$, его линии прямолинейны, если:

1) t как функция $\xi \in \Pi$ есть гладкое отображение поля $g(\xi) \equiv i_3$:

$$t(\xi) = \widehat{\Omega}(\xi) g(\xi) = i_3 \cos\psi(\xi) + [l(\xi), i_3] \sin\psi(\xi); \tag{3}$$

2) зависимость координат $\xi_1 = \xi_1(X)$, $\xi_2 = \xi_2(X)$ вектора ξ от $X \in R^3$ определяется не явно системой уравнений

$$(X - \xi, [l(\xi), t(\xi)]) = 0, \qquad (X - \xi, l(\xi)) = 0; \tag{4}$$

3) $\xi_1(X)$, $\xi_2(X)$ непрерывно дифференцируемы в R^3;

4) скалярное поле

$$(i_3, [\partial/\xi, t(\xi)]) \neq 0 \quad \text{п. в.} \quad \text{в } \Pi, \qquad (\partial/\partial\xi = i_1\partial/\partial\xi_1 + i_2\partial/\partial\xi_2). \tag{5}$$

Оговариваемые условия должны быть конкретизированы, если интересоваться полями (2), аксиально симметричными относительно некоторой оси. Пусть это будет ось OX_3, а $\widehat{\omega} = \widehat{\omega}(\gamma, i_3)$ — оператор поворота на угол γ вокруг оси OX_3.

Каждая из линий поля $\beta(X)$ (2) есть [1] прямая $\Gamma(\xi)$, проходящая через точку ξ плоскости Π в направлении $t(\xi)$ и задаваемая уравнением $X = \xi + st(\xi)$ $(-\infty < s < +\infty)$. Поэтому самосовместимость линий аксиально симметричного относительно оси OX_3 поля $\beta(X)$ (2) означает, что

$$\widehat{\omega}(\gamma, i_3)\beta(X) = \beta(\widehat{\omega}(\gamma, i_3)X), \qquad \widehat{\omega}(\gamma, i_3)t(\xi) = t(\widehat{\omega}(\gamma, i_3)\xi), \tag{6}$$

при любом X и любом γ, где ξ — радиус-вектор точки пересечения плоскости Π линией $\Gamma(\xi)$ поля β, проходящей через точку X. Согласно (6), для построения поля $\beta(X)$ (2), аксиально симметричного относительно оси OX_3, требуется отображение (3), аксиально симметричное относительно оси OX_3.

Класс отображений (3) поля $g \equiv i_3$ задается посредством скалярных полей $\psi(\xi)$, $\Phi(\xi)$: $t(\xi) = t(\psi(\xi), \Phi(\xi))$. Для аксиальной симметрии (3) нужно, чтобы для любого ξ при любом γ выполнялся закон

$$\widehat{\omega}(\gamma, i_3)t(\psi(\xi), \Phi(\xi)) = t(\widehat{\omega}(\gamma, i_3)\xi). \tag{7}$$

Установим, какие поля $\psi(\xi)$, $\Phi(\xi)$ совместимы с (7).

2. Перейдем от декартовых координат ξ_1, ξ_2 и X_1, X_2, X_3 в Π и в R^3 к полярным — ρ, ϑ и цилиндрическим — r, θ, z координатам с базисами $\{i_\rho(\vartheta),\ i_\vartheta(\vartheta)\}$ и $\{i_r(\theta),\ i_\theta(\theta),\ i_z = i_3\}$. Так, в частности, найдем $\xi = \xi(\rho, \vartheta) = \rho i_\rho(\vartheta)$, $X = X(r, \theta, z) = r i_r(\theta) + z i_z$. Далее из (7) при $\gamma = \vartheta$, $\xi = \xi_0$, где $\xi_0 = \xi(\rho, 0)$, выражаем $t(\xi) = \widehat{\omega}(\vartheta, i_3)t(\psi(\xi_0), \Phi(\xi_0))$, учитывая, что $\widehat{\omega}(\vartheta, i_3)\xi_0 = \xi(\rho, \vartheta) = \xi$. Отсюда, используя формулы (3), (1), взятые при $\xi = \xi_0$, для любого ξ получаем

$$t(\xi) = t(\psi(\xi), \Phi(\xi))\Big|_{\substack{\psi(\xi)=\psi(\xi_0),\\ \Phi(\xi)=\Phi(\xi_0)+\vartheta}}, \tag{8}$$

где $\psi(\xi_0) = \psi(\xi(\rho, 0)) = \psi(\rho)$, $\Phi(\xi_0) = \Phi(\xi(\rho, 0)) = \varphi(\rho)$.

Итак, поля $\psi(\xi)$, $\Phi(\xi)$ $(\xi = \xi(\rho, \vartheta))$, совместимые с (7), должны иметь вид: $\psi(\rho, \vartheta) = \psi(\rho)$, $\Phi(\rho, \vartheta) = \varphi(\rho) + \vartheta$. Принимая это во внимание, сформулируем

Предложение 1. *Единичное векторное поле $t(\xi)$ принадлежит классу полей, аксиально симметричных относительно оси OX_3, если и только если зависимость t от координат ρ, ϑ точек ξ плоскости Π устанавливается отображением $\widehat{\Omega}(\xi) = \widehat{\Omega}(\psi(\xi), \Phi(\xi))$ поля $g(\xi) \equiv i_3$, где*

$$\psi(\xi) = \psi(\xi(\rho, \vartheta)) = \psi(\rho), \qquad \Phi(\xi) = \Phi(\xi(\rho, \vartheta)) = \varphi(\rho) + \vartheta. \tag{9}$$

В явном виде эта зависимость выражается формулой

$$t(\xi(\rho, \vartheta)) = [i_\rho(\vartheta)\sin\varphi(\rho) - i_\vartheta(\vartheta)\cos\varphi(\rho)]\sin\psi(\rho) + i_z\cos\psi(\rho). \tag{10}$$

Формула (10) выводится из (8) с помощью (3), (1) и формул перехода к криволинейным координатам.

Замечание 1. Функции $\psi(\rho, \vartheta) \equiv m\pi$ в Π $(m \in \mathbb{Z})$ не представляют интереса, так как их использование не расширяет класс отображений поля $g(\xi(\rho, \vartheta)) \equiv i_z$ в аксиально симметричные поля. Действительно, при $\psi(\rho, \vartheta) \equiv m\pi$ и произвольной функции $\Phi(\rho, \vartheta)$ имеем $t(\xi(\rho, \vartheta)) \equiv (-1)^m i_z$.

При аксиально симметричном поле $t(\xi)$ аксиально симметрично (зависит только от ρ) и скалярное поле $(i_3, [\partial/\partial\xi, t(\xi)])$ (см. (5)). Действительно, с помощью (9) и формул $\partial/\partial\xi = i_\rho(\vartheta)\partial/\partial\rho + i_\vartheta(\vartheta)\rho^{-1}\partial/\partial\vartheta$, выводим

$$\frac{\partial}{\partial\rho}t(\xi(\rho, \vartheta)) = i_\rho(\vartheta)[\varphi'(\rho)\cos\varphi(\rho)\sin\psi(\rho) + \psi'(\rho)\sin\varphi(\rho)\cos\psi(\rho)] +$$

$$+ i_\vartheta(\vartheta)[\varphi'(\rho)\sin\varphi(\rho)\sin\psi(\rho) - \psi'(\rho)\cos\varphi(\rho)\cos\psi(\rho)] - i_z\psi'(\rho)\sin\psi(\rho), \tag{11}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\vartheta}t(\xi(\rho, \vartheta)) = [i_\rho(\vartheta)\cos\varphi(\rho) + i_\vartheta(\vartheta)\sin\varphi(\rho)]\frac{\sin\psi(\rho)}{\rho}, \tag{12}$$

$$\Big(i_3, \left[\partial/\partial\xi, t(\xi)\right]\Big)\Big|_{\xi=\xi(\rho,\vartheta)} = R_3(\rho), \qquad R_3(\rho) = -\rho^{-1}[\rho\cos\varphi(\rho)\sin\psi(\rho)]'. \tag{13}$$

Детальное обсуждение требований непрерывности поля (10) и его производных всюду в плоскости Π удобно пока отложить. Здесь же сформулируем

Замечание 2. Для непрерывности поля (10) всюду в плоскости Π необходимы: непрерывность функции $\psi(\rho)$ при всех $\rho \geq 0$ и равенство $\psi(0) = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Для непрерывности производной поля (10) в Π по любому направлению необходимо и достаточно непрерывности полей (11), (12) при любых $\rho \geq 0$.

3. Выявим обусловленные аксиальной симметрией (см. (6)) особенности зависимости поля β от координат r, θ, z точек $X = X(r,\theta,z)$ пространства R^3.

Из (6) при $\gamma = \theta$, $X = X_0$, где $X_0 = X(r,0,z)$, выражаем $\beta(X) = \widehat{\omega}(\theta, i_3)\beta(X_0)$, учитывая, что $\widehat{\omega}(\theta, i_3)X_0 = X(r,\theta,z) = X$. Отсюда, используя формулы (2), (3), взятые при $X = X_0$, получаем

$$\beta(X) = t(\psi(\xi(X)), \Phi(\xi(X)))\Big|_{\substack{\psi(\xi(X))=\psi(\xi(X_0)),\\ \Phi(\xi(X))=\Phi(\xi(X_0))+\theta}}, \tag{14}$$

где $\psi(\xi(X_0)) = \psi(\rho(X_0)) = \psi(\rho(r,0,z))$, $\Phi(\xi(X_0)) = \varphi(\rho(X_0)) + \vartheta(X_0) = \varphi(\rho(r,0,z)) + \vartheta(r,0,z)$. Примем обозначения $\beta(X) = \beta(X(r,\theta,z)) = \beta(r,\theta,z)$, $\rho(r,0,z) = \rho(r,z)$, $\vartheta(r,0,z) = f(r,z)$. Тогда формулу (14) можно выразить в виде

$$\beta(r,\theta,z) = t(\psi(\xi(X)), \Phi(\xi(X)))\Big|_{\substack{\psi(\xi(X))=\psi(\rho(r,z)),\\ \Phi(\xi(X))=\varphi(\rho(r,z))+f(r,z)+\theta}}. \tag{15}$$

Зависимость переменных ρ, f в (15) от r, z определяется не явно системой

$$\begin{cases} \{r\sin[f+\varphi(\rho)] - \rho\sin\varphi(\rho)\}\cos\psi(\rho) - z\sin\psi(\rho) = 0, \\ r\cos[f+\varphi(\rho)] - \rho\cos\varphi(\rho) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Такой вид приобретает система (4), если в (4) исключить l и t с помощью (1) и (3), перейти к криволинейным координатам в Π и R^3, учесть формулы (9) и выполнить замену $\vartheta = \theta + f$, где $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\pi < f \leq \pi$.

Исходя из предложения 1, формул (16), условия (5), выражаемого в полярных координатах через (13), заключаем

Предложение 2. *Соответствие $X(r,\theta,z) \to \beta(X) = \beta(r,\theta,z)$ определяет в R^3 единичное векторное поле, отвечающее условиям аксиальной симметрии и условию* (5), *если только это соответствие устанавливается правилом*

$$\beta(r,\theta,z) = \{i_r(\theta)\sin[f+\varphi(\rho)]\sin\psi(\rho) - i_\theta(\theta)\cos[f+\varphi(\rho)]\sin\psi(\rho) + i_z\cos\psi(\rho)\}\Big|_{\substack{\rho=\rho(r,z),\\ f=f(r,z)}}. \tag{17}$$

При этом зависимость ρ и f от r и z определяется неявно системой (16). *Эта зависимость описывается непрерывно дифференцируемыми функциями $\rho = \rho(r,z)$, $f = f(r,z)$ для всех $r \geq 0$, $z \in R$; п. в. в $[0,+\infty)$ $R_3(\rho) \neq 0$.*

4. Изучение разрешимости системы (16) упрощается, если предварительно установить ограничения на функции $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$, обусловленные требованием непрерывности поля $\beta(X)$ всюду в R^3. Если исходить из геометрической картины поля $\beta(X)$ как семейства прямых $\Gamma(\xi)$, проходящих через каждую точку $\xi \in \Pi$ в направлении $t(\xi)$, то из непрерывности поля $\beta(X)$ следует, что через каждую точку $X \in R^3$ проходит одна и только одна прямая $\Gamma(\xi)$. Стало быть, требование непрерывности предполагает непересечение прямых $\Gamma(\xi)$, $\Gamma(\xi')$, проходящих через любые различные точки ξ, $\xi' \in \Pi$ в направлениях $t = t(\xi)$, $t' = t(\xi')$. Непересечение прямых $\Gamma(\xi)$, $\Gamma(\xi')$ имеет место, когда поле $t(\xi)$, определяемое в точках плоскости Π, отвечает одному из условий [1]:

$$\begin{gathered} V = (\xi' - \xi,\ [t', t]) \neq 0 \quad (\Gamma(\xi),\ \Gamma(\xi') \text{ — скрещенные прямые}), \\ \{V = (\xi' - \xi,\ [t', t]) = 0,\ [t', t] = 0\} \quad (\Gamma(\xi),\ \Gamma(\xi') \text{ — параллельные прямые}). \end{gathered} \tag{18}$$

Использование условий (18) позволяет сформулировать следующее предложение.

Предложение 3. *К непрерывным, удовлетворяющим условиям* (18), *относятся функции* $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$, *подчиненные условиям* (19), *либо* (20) :

$$\begin{cases} \psi(0)=n\pi,\ n\pi<\psi(\rho)<n\pi+(\pi/2)\ (\text{либо}\ \ n\pi-(\pi/2)<\psi(\rho)<n\pi)\ \ \text{при}\ \ \rho>0, \\ m\pi-(\pi/2)<\varphi(\rho)<m\pi+(\pi/2)\ \ \text{при}\ \ \rho>0, \end{cases} \tag{19}$$

или такие, что

$$\begin{cases} \psi(\rho)=n\pi\ \ \text{при}\ \ 0\le\rho\le\rho_0,\ n\pi<\psi(\rho)<n\pi+(\pi/2) \\ (\text{либо}\ \ n\pi-(\pi/2)<\psi(\rho)<n\pi)\ \ \text{при}\ \ \rho>\rho_0, \\ \varphi(\rho_0)=m\pi,\quad m\pi-\widetilde{\varphi}(\rho_0/\rho)<\varphi(\rho)<m\pi+\widetilde{\varphi}(\rho_0/\rho)\ \text{при}\ \ \rho>\rho_0, \end{cases} \tag{20}$$

для фиксированных целых n, m, *где* $\widetilde{\varphi}(\rho_0/\rho)=\arccos(\rho_0/\rho)$, $\rho>\rho_0$.

Докажем предложение 3. Для этого отметим, что величины, входящие в (18), в случае поля направлений $t(\xi)=t(\xi(\rho,\vartheta))$ (10) выражаются формулами

$$\begin{gathered} \xi=\xi(\rho,\vartheta),\quad \xi'=\xi(\rho',\vartheta'),\quad t=t(\xi(\rho,\vartheta)),\quad t'=t(\xi(\rho',\vartheta')),\quad [t',t]=[t(\xi(\rho',\vartheta')), \\ t(\xi(\rho,\vartheta))]=i_\rho(\vartheta)T_\rho(\rho',\vartheta',\rho,\vartheta)+i_\vartheta(\vartheta)T_\vartheta(\rho',\vartheta',\rho,\vartheta)+i_z\dot{T}_z(\rho',\vartheta',\rho,\vartheta), \\ V=V(\rho',\vartheta',\rho,\vartheta)=[\rho'\cos(\vartheta-\vartheta')-\rho]T_\rho(\rho',\vartheta',\rho,\vartheta)-\rho'\sin(\vartheta-\vartheta')T_\vartheta(\rho',\vartheta',\rho,\vartheta), \end{gathered}$$

где $T_\rho(\rho',\vartheta',\rho,\vartheta)=\cos\psi(\rho')\sin\psi(\rho)\cos\varphi(\rho)-\sin\psi(\rho')\cos\psi(\rho)\cos[\vartheta-\vartheta'-\varphi(\rho')]$, $T_\vartheta(\rho',\vartheta',\rho,\vartheta)=$ $=\cos\psi(\rho')\sin\psi(\rho)\sin\varphi(\rho)+\sin\psi(\rho')\cos\psi(\rho)\sin[\vartheta-\vartheta'-\varphi(\rho')]$, $T_z(\rho',\vartheta',\rho,\vartheta)=\sin\psi(\rho')\sin\psi(\rho)\times$ $\times\sin[\vartheta-\vartheta'+\varphi(\rho)-\varphi(\rho')]$.

Покажем, что среди функций $\psi(\rho)$, равных $n\pi$ при $\rho=0$ и непрерывных на $[0,+\infty)$ (см. замечание 2), и среди непрерывных на этом промежутке функций $\varphi(\rho)$ условиям (18) отвечают только ограниченные функции. Для этого возьмем в Π пару точек: $\xi=\xi(\rho,\vartheta)$, $\xi'=\xi(\rho,\vartheta')$, где $\vartheta'\neq\vartheta$. Таким точкам соответствуют

$$V=V(\rho',\vartheta',\rho,\vartheta)=-2\rho\sin2\psi(\rho)\sin^2\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}\cos\varphi(\rho), \tag{21}$$

$$\begin{gathered} [t',t]=[t(\xi(\rho,\vartheta'),t(\xi(\rho,\vartheta))]=2\sin\psi(\rho)\sin\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}\Big\{\cos\psi(\rho)\Big[i_\rho(\vartheta)\sin\Big(\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}-\varphi(\rho)\Big)+ \\ +i_\vartheta(\vartheta)\cos\Big(\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}-\varphi(\rho)\Big)\Big]+i_z\sin\psi(\rho)\cos\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}\Big\}. \end{gathered} \tag{22}$$

Предположим, что $\cos\psi(\rho_1)=0$ при каком-то $\rho=\rho_1>0$. Тогда из (21), (22) при $\rho=\rho_1$ находим $V=0$, $[t',t]=i_z\sin(\vartheta-\vartheta')$. Следовательно, при $\rho=\rho_1$ условия (18) не могут выполняться при всех ϑ, ϑ'. Значит, из функций $\psi(\rho)$, равных $n\pi$ при $\rho=0$ и непрерывных при $\rho\ge0$, условиям (18) могут удовлетворять лишь те, значения которых принадлежат интервалу

$$n\pi-(\pi/2)<\psi(\rho)<n\pi+(\pi/2)\ \ \text{при}\ \ \rho>0. \tag{23}$$

Выделим случаи: 1) $\psi(\rho)\neq n\pi$ при $\rho>0$ и 2) $\psi(\rho)=n\pi$ при некотором $\rho=\rho_0>0$. В случае 1) в силу (23) и замечания 2 заключаем

$$\psi(0)=n\pi;\quad n\pi<\psi(\rho)<n\pi+(\pi/2)\quad (\text{либо}\ n\pi-(\pi/2)<\psi(\rho)<n\pi)\ \text{при}\ \rho>0. \tag{24}$$

Предположим также, что $\cos\varphi(\rho_2)=0$, $|\sin\varphi(\rho_2)|=1$ при каком-то $\rho_2>0$. Тогда при $\rho=\rho_2$ из (21), (22) будем иметь

$$\begin{gathered} V=0,\quad [t',t]=2\sin\psi(\rho_2)\sin\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}\Big\{i_z\sin\psi(\rho_2)\cos\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}- \\ -\cos\psi(\rho_2)\sin\varphi(\rho_2)\Big[i_\rho(\vartheta)\cos\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}-i_\vartheta(\vartheta)\sin\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}\Big]\Big\}. \end{gathered}$$

Отсюда следует, что при $\cos\varphi(\rho) = 0$ (для некоторого $\rho > 0$) и предположении (24) относительно $\psi(\rho)$ условия непересечения (18) прямых $\Gamma(\xi)$, $\Gamma(\xi')$ не выполняются. Значения функции $\varphi(\rho)$, непрерывной при $\rho \geq 0$, косинус которой при $\rho > 0$ отличен от нуля, — это значения из интервала $(m\pi - (\pi/2),\ m\pi + (\pi/2))$, где $m \in \mathbb{Z}$. Из (24) и отсюда следуют условия (19).

Во втором случае, когда $\psi(\rho_0) = n\pi$ при каком-то $\rho_0 > 0$, в плоскости Π возьмем пару точек: $\xi = \xi(\rho, \vartheta)$, $\xi' = \xi(\rho_0, \vartheta')$. Для таких точек имеем

$$\begin{gathered} V = V(\rho_0, \vartheta', \rho, \vartheta) = (-1)^n \rho_0 \sin\psi(\rho)\{\cos[\vartheta - \vartheta' + \varphi(\rho)] - (\rho/\rho_0)\cos\varphi(\rho)\}, \\ [t', t] = [t(\xi(\rho_0, \vartheta')), t(\xi(\rho, \vartheta))] = (-1)^n \sin\psi(\rho)[i_\rho(\vartheta)\cos\varphi(\rho) + i_\vartheta(\vartheta)\sin\varphi(\rho)]. \end{gathered} \tag{25}$$

Легко видеть, что здесь при любом $\rho \in (0, \rho_0)$ и любом ϑ найдутся такие ϑ', что $\cos[\vartheta - \vartheta' + \varphi(\rho)] - (\rho/\rho_0)\cos\varphi(\rho) = 0$ и $V = 0$, а $[t', t] \neq 0$ всюду, где $\psi(\rho) \neq n\pi$. Следовательно, для выполнимости условий (18) необходимы такие функции $\psi(\rho)$, что

$$\begin{cases} \psi(\rho) = n\pi \ \text{ при } \ 0 \leq \rho \leq \rho_0, \quad n\pi < \psi(\rho) < n\pi + (\pi/2) \\ (\text{либо } \ n\pi - (\pi/2) < \psi(\rho) < n\pi) \ \text{ при } \ \rho > \rho_0. \end{cases} \tag{26}$$

Установим справедливость ограничений (20) на $\varphi(\rho)$, когда $\psi(\rho)$ удовлетворяет (26). Пусть $\cos\varphi(\rho_1) = 0$ при каком-то $\rho_1 > \rho_0$. Тогда из (25) при $\rho = \rho_1$ находим

$$V = (-1)^{n+1}\rho_0 \sin\psi(\rho_1)\sin\varphi(\rho_1)\sin(\vartheta - \vartheta'), \quad [t', t] = (-1)^n \sin\psi(\rho_1)\sin\varphi(\rho_1) i_\vartheta(\vartheta),$$

где $|\sin\varphi(\rho_1)| = 1$. Легко видеть, что и здесь $V = 0$ при $\vartheta' = \vartheta$ или $\vartheta' = \vartheta \pm \pi$ и любом ϑ, а $[t', t] \neq 0$ при любых ϑ, ϑ'. Стало быть, если $\psi(\rho)$ отвечает (26), то $\varphi(\rho)$ должна быть такой, что $\cos\varphi(\rho) \neq 0$ при $\rho > \rho_0$, а это имеет место, когда $\varphi(\rho) \neq m\pi - (\pi/2)$ или $m\pi + (\pi/2)$, где $m \in \mathbb{Z}$. Далее заметим, что правая часть в первой из формул (25) отлична от нуля при $\rho > \rho_0$, если только

$$(\rho/\rho_0)|\cos\varphi(\rho)| > 1 \ \text{ для любых } \ \rho > \rho_0, \tag{27}$$

т. е. когда $\varphi \in (m\pi - \widetilde{\varphi}(\rho_0/\rho),\ m\pi + \widetilde{\varphi}(\rho_0/\rho))$ при $\rho > \rho_0$, где $\widetilde{\varphi}(\rho_0/\rho)$ определено выше (предложение 3). Кроме того, очевидно, что $(\rho_0/\rho)|\cos\varphi(\rho)| < 1$ при $\rho < \rho_0$. Переходя в последнем неравенстве и в (27) к пределу $\rho \to \rho_0$, получаем $|\cos\varphi(\rho_0)| = 1$, т. е. $\varphi(\rho_0) = m\pi$. Отсюда и из (26) получаем (20). Предложение 3 доказано.

5. Обсудим непрерывность полей (10)–(13). Пусть $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$ отвечают условиям (19) и $\psi(\rho)$ непрерывна на $[0, +\infty)$, (см. замечание 2). Тогда поле (10) непрерывно в Π, если $\varphi(\rho)$ непрерывна на $[0, +\infty)$.

Если $\psi(\rho)$, $\psi'(\rho)$, $\varphi(\rho)$, $\varphi'(\rho)$ непрерывны на $(0, +\infty)$ и удовлетворяют условиям

$$\psi'(\rho) \to \psi'(0) = 0, \quad \varphi'(\rho)\sin\psi(\rho) \to 0 \ \text{ при } \ \rho \to 0, \tag{28}$$

то поля (11), (12), а значит, и поле (13), поддаются определению как непрерывные функции всюду в Π. Причем поле (13) в явном виде выражается формулой

$$\Big(i_3, \Big[\frac{\partial}{\partial\xi}, t(\xi)\Big]\Big)\Big|_{\xi = \xi(\rho, \vartheta)} = \begin{cases} 0, & \rho = 0, \\ R_3(\rho), & \rho > 0, \end{cases}$$

где $R_3(\rho)$ определяется формулой (13). Действительно, используя формулы (10)–(13), нетрудно убедиться, что при условиях (28) справедливы равенства $\lim\limits_{\rho\to 0} t'_\rho(\xi(\rho, \vartheta)) = \lim\limits_{\rho \to 0}[t(\xi(\rho, \vartheta)) - t(\xi(0, \vartheta))]/\rho =$ $= t'_\rho(\xi(\rho, \vartheta))\Big|_{\rho = 0} = 0$, а $\rho^{-1} t'_\vartheta(\xi(\rho, \vartheta)) \to 0$, $R_3(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$.

Отметим, также, что при $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$, удовлетворяющих (20), использование функций $\varphi(\rho)$ с разрывами и(или) разрывными производными в точках интервала $[0, \rho_0)$ не расширяет класса отображений поля $g(\xi(\rho, \vartheta)) \equiv i_3$ в аксиально симметричные поля (10). Далее такие функции исключаются. Итак, доказано следующее

Предложение 4. *Поле* (10) *непрерывно дифференцируемо, а поле* (13) *непрерывно всюду в плоскости* Π, *если* 1) $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$ *отвечают условиям* (19) (*условиям* (20)); 2) $\psi(\rho)$, $\psi'(\rho)$, $\varphi(\rho)$ *непрерывны в интервале* $[0,+\infty)$, $\psi'(0)=0$, $\varphi'(\rho)\sin\psi(\rho)\to 0$ *при* $\rho\to 0$ ($\rho\to\rho_0$); 3) $\varphi'(\rho)$ *непрерывна в интервале* $[0,+\infty)$ *за исключением, быть может, точки* $\rho=0$ ($\rho=\rho_0$), *когда* $\varphi(\rho)$ *удовлетворяет условиям* (19) (*условиям* (20)).

Замечание 3. Поле из (5) при условиях (20) определяется как непрерывное в Π, независимо от поведения $\varphi'(\rho)$ при $\rho\to\rho_0$ ($\rho_0>0$), так

$$\Big(i_3,\Big[\frac{\partial}{\partial\xi},t(\xi)\Big]\Big)\Big|_{\xi=\xi(\rho,\vartheta)}=\begin{cases}0, & 0\le\rho\le\rho_0,\\ R_3(\rho), & \rho>\rho_0,\end{cases}\tag{29}$$

где $R_3(\rho)$ выражается формулой (13).

Поле (29) при $\rho_0>0$ заведомо несовместимо с условием (5). Это означает, что использование функций $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$, отвечающих условиям (20), позволяет строить аксиально симметричные поля (17), продольно вихревые не в R^3, а в области

$$D=\{(r,\theta,z):\ r\in(\rho_0,+\infty),\ \theta\in[0,2\pi),\ z\in(-\infty,+\infty)\}.\tag{30}$$

Однако такие поля все-таки заслуживают внимания как пример непрерывно и гладко сопрягающихся полей с разными в разных областях вихревыми свойствами.

6. Обратимся к системе (16) относительно $\rho=\rho(r,z)$, $f=f(r,z)$ и перепишем ее, учитывая, что $\cos\psi(\rho)\ne 0$ в силу (19), (20), в виде

$$\big\{r\sin[f+\varphi(\rho)]-\rho\sin\varphi(\rho)-z\operatorname{tg}\psi(\rho)=0,\ r\cos[f+\varphi(\rho)]-\rho\cos\varphi(\rho)=0\big\}.\tag{31}$$

Исследуем разрешимость системы (31), полагая, что $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$ удовлетворяют условиям (19) (условиям (20)). Тогда при $r>0$ из системы (31) выводим

$$F(\rho,r,z)=0,\tag{32}$$

$$\sin f=F_1(\rho,z)/r,\quad \cos f=F_2(\rho,z)/r.\tag{33}$$

Здесь

$$F(\rho,r,z)=a^2(\rho)+æ^2(\rho,z)-r^2,$$

где

$$a(\rho)=\rho\cos\varphi(\rho),\qquad æ(\rho,z)=\rho\sin\varphi(\rho)+z\operatorname{tg}\psi(\rho)\tag{34}$$

$$F_1(\rho,z)=z\cos\varphi(\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho),\qquad F_2(\rho,z)=\rho+z\sin\varphi(\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho).\tag{35}$$

Уравнение (32), справедливое и при $r=0$, не содержит переменной f, в отличие от системы (31), и устанавливает не явно зависимость одной из переменных ρ,r,z от двух других переменных. Так, разрешая (32) относительно r, получаем

$$r(\rho,z)=\begin{cases}\rho, & \rho=0\quad(0\le\rho\le\rho_0),\\ \sqrt{u(\rho,z)}, & \rho>0\quad(\rho>\rho_0),\end{cases}\tag{36}$$

где значения ρ в скобках относятся к $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$, удовлетворяющим условиям (20),

$$u(\rho,z)=a^2(\rho)+æ^2(\rho,z).\tag{37}$$

Если $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$ удовлетворяют условиям (19) или (20), а их производные — условиям предложения 4, то при любых значениях переменных $\rho\ge 0$ и $z\in R$ функция (36) определена и непрерывна вместе со своими частными производными:

$$r'_\rho(\rho,z)=\begin{cases}1, & \rho=0\quad(0\le\rho\le\rho_0),\\ u'_\rho(\rho,z)/\big[2\sqrt{u(\rho,z)}\,\big], & \rho>0\quad(\rho>\rho_0),\end{cases}$$

$$r'_z(\rho, z) = \begin{cases} 0, & \rho = 0 \quad (0 \le \rho \le \rho_0), \\ u'_z(\rho, z)/\bigl[2\sqrt{u(\rho, z)}\bigr], & \rho > 0 \quad (\rho > \rho_0) \end{cases}$$

после доопределения их при $\rho = 0$ в случае условий (19) по непрерывности.

Решение $\rho = \rho(r, z)$ уравнения (32) есть функция, обратная функции $r = r(\rho, z)$ (36), поэтому справедливо

Предложение 5. *Зависимость ρ от переменных r, z, определяемая уравнением* (32), *описывается функцией $\rho = \rho(r, z)$, однозначной, гладкой, строго и неограниченно возрастающей с ростом r в интервале $0 \le r < +\infty$ ($\rho_0 \le r < +\infty$), если и только если при любом $z \in R$ функция $u = u(\rho, z)$* (37), *равная нулю при $\rho = 0$ (равная ρ_0 при $\rho = \rho_0$), есть гладкая, строго и неограниченно возрастающая функция в интервале $0 \le \rho < +\infty$ ($\rho_0 \le \rho < +\infty$) и $u'_\rho(\rho, z) > 0$.*

Замечание 4. Если при тех же условиях $u'_\rho = 0$ при каких-то $\rho_i > 0$, $z_i \in R$, то производная ρ'_r от $\rho = \rho(r, z)$ в точке $(r_i = u(\rho_i, z_i), z_i)$ терпит разрыв второго рода.

Замечание 5. Если $\psi(\rho), \varphi(\rho)$ удовлетворяют условиям (20) и $\varphi'(\rho)$ терпит разрыв при $\rho = \rho_0$, то производную $u'_\rho(\rho, z)$ при условии 2) предложения 4 можно доопределить по непрерывности при $\rho = \rho_0$, полагая $u'_\rho(\rho_0, z) = 2\rho_0$.

Частные производные ρ'_r, ρ'_z можно найти, учитывая, что $\rho'_r(r, z) = 1/r'_\rho(\rho, z)\Big|_{\rho=\rho(r,z)}$, $\rho'_z(r, z) = -r'_z(\rho, z)/r'_\rho(\rho, z)\Big|_{\rho=\rho(r,z)}$, используя выражаемую из (36) зависимость $\rho = \rho(r, z)$, в том числе и устанавливаемые явно зависимости:

$$\rho(0, z) = 0, \quad \rho(r, 0) = r \quad (r \ge 0, \ z \in R), \tag{38}$$

$$\rho(r, z) = r \quad (0 \le r \le \rho_0, \ z \in R), \tag{39}$$

при условиях (19) и (20) соответственно. В результате получим

$$\rho'_r(r, z) = \begin{cases} 1, & r = 0 \quad (0 \le r \le \rho_0), \\ 2r/u'_\rho(\rho, z)\Big|_{\rho=\rho(r,z)}, & r > 0 \quad (r > \rho_0), \end{cases} \tag{40}$$

$$\rho'_z(r, z) = \begin{cases} 0, & r = 0 \quad (0 \le r \le \rho_0), \\ -u'_z(\rho, z)/u'_\rho(\rho, z)\Big|_{\rho=\rho(r,z)}, & r > 0 \quad (r > \rho_0), \end{cases}$$

где значения r в скобках относятся к $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$, удовлетворяющим условиям (20).

Переменная $f \in (-\pi, \pi]$ при известной функции $\rho = \rho(r, z)$ и $r > 0$ выражается из уравнений (33) как функция $f(r, z)$ переменных $r > 0$, $z \in R$, однозначная и непрерывная при условиях предложения 5, имеющая при условиях предложения 4 непрерывные частные производные. Последние можно найти, используя также уравнения (33), что приводит к выражениям:

$$f'_r(r, z) = f_r(r, z), \quad f'_z(r, z) = f_z(r, z) \quad (r > 0, \ z \in R), \tag{41}$$

$$f_r(r, z) = \frac{2z}{r u'_\rho(\rho, z)} \Big\{ \frac{\rho\psi'(\rho)\cos\varphi(\rho)}{\cos^2\psi(\rho)} - \operatorname{tg}\psi(\rho)\Big[\cos\varphi(\rho) + \varphi'(\rho)æ(\rho, z)\Big]\Big\}\Big|_{\rho=\rho(r,z)}, \tag{42}$$

$$f_z(r, z) = \frac{2\operatorname{tg}\psi(\rho)}{u'_\rho(\rho, z)} \Big[z\varphi'(\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho) + \cos\varphi(\rho)\Big]\Big|_{\rho=\rho(r,z)}. \tag{43}$$

Что же касается зависимости f и ее производных от z при $r = 0$, то системе (31) при $r = 0$ удовлетворяет в качестве $f(0, z)$ любая функция z со значениями из полуинтервала $(-\pi, \pi]$. Однако если в уравнениях (33), взятых при $\rho = \rho(r, z)$, перейти к пределу $r \to +0$ и учесть вытекающее из (40) отношение эквивалентности

$$\rho(r, z) \sim r \quad \text{при} \quad r \to 0, \tag{44}$$

то получим $\sin f(r, z) \to 0$, $\cos f(r, z) \to 1$ при $r \to 0$. Откуда $f(r, z) \to 0$ при $r \to +0$. Следовательно, переменную f и ее производную f'_z можно определить как непрерывные функции при любом $r \ge 0$, $z \in R$, если только

$$f(r, z) = 0 \quad \text{при} \quad r = 0 \ \ (0 \le r \le \rho_0), \tag{45}$$

так как $f_z(r,z) \to 0$ при $r \to 0$ и с учетом (41), (43) имеем

$$f_z'(r,z) = \{0 \text{ при } r=0 \ (0 \le r \le \rho_0); \ f_z(r,z) \text{ при } r>0 \ (r>\rho_0)\}\,. \tag{46}$$

Производную $f_r'(0,z)$ путем дифференцирования системы (31) не найти, поскольку получаемой в результате системе уравнений при $r=0$ удовлетворяет любая функция z. Поэтому используем формулы (33), (45) и определение производной. Тогда

$$f_r'(0,z) = \lim_{r\to 0}\frac{f(r,z)}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\operatorname{arctg}\frac{F_1(\rho,z)}{F_2(\rho,z)}\Big|_{\rho=\rho(r,z)}, \tag{47}$$

а для непрерывности f_r' при $r=0$ потребуем выполнения равенства

$$\lim_{r\to 0} f_r(r,z) = f_r'(0,z) \quad \text{при любом} \quad z \in R. \tag{48}$$

При вычислении предела в (47) используем формулы (35), отношения эквивалентности (44) и $\operatorname{arctg}[F_1(\rho,z)/F_2(\rho,z)] \sim F_1(\rho,z)/F_2(\rho,z) \sim F_1(\rho,z)/\rho$ при $\rho \to 0$ и правило Лопиталя, а при вычислении предела в (48) — формулы (42), (34), отношения эквивалентности (44), $u_\rho'(\rho,z) \sim 2\rho$ при $\rho \to 0$. Получаем в результате

$$f_r'(0,z) = \lim_{\rho\to 0}\frac{z\operatorname{tg}\psi(\rho)\cos\varphi(\rho)}{\rho^2} = z\lim_{\rho\to 0}\Big[\frac{\operatorname{tg}\psi(\rho)\cos\varphi(\rho)}{\rho}\Big]',$$

$$\lim_{r\to 0} f_r(r,z) = z\lim_{\rho\to 0}\Big\{\Big[\frac{\operatorname{tg}\psi(\rho)\cos\varphi(\rho)}{\rho}\Big]' - z\varphi'(\rho)\Big[\frac{\operatorname{tg}\psi(\rho)}{\rho}\Big]^2\Big\}.$$

Стало быть, для существования производной $f_r'(0,z)$ и выполнимости требования (48) необходимо, чтобы $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$ отвечали еще и условиям

$$\Big[\frac{\operatorname{tg}\psi(\rho)\cos\varphi(\rho)}{\rho}\Big]' \to f_r(0) \ \text{ и } \ \varphi'(\rho)\Big[\frac{\operatorname{tg}\psi(\rho)}{\rho}\Big]^2 \to 0 \ \text{ при } \ \rho \to 0, \tag{49}$$

где $f_r(0)$ — конечное число. Резюмируя полученные результаты, сформулируем

Предложение 6. *При условиях предложения* 5 *зависимость переменной* $f \in (-\pi,\pi]$ *от переменных* $r \ge 0$, $z \in R$ *описывается однозначной непрерывной функцией* $f = f(r,z)$, *которая при условиях предложения* 4 *имеет непрерывную частную производную* $f_z'(r,z)$, *определяемую формулой* (46), *а вместе с условиями* (49) *имеет и непрерывную частную производную*

$$f_r'(r,z) = \{zf_r(0) \text{ при } r=0 \ (0 \le r \le \rho_0); \ f_r(r,z) \text{ при } r>0 \ (r>\rho_0)\}\,,$$

где $f_r(0) = \lim\limits_{\rho\to 0}[\rho^{-1}\operatorname{tg}\psi(\rho)\cos\varphi(\rho)]'$ $(f_r(0)=0$ *при* $0 \le r \le \rho_0$ *в случае функций* $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$, *удовлетворяющих условиям* (20)), $f_r(r,z)$ *определяется формулой* (42).

7. При условиях предложений 5, 6 каждой точке $\overrightarrow{X}(r,\theta,z) \in R^3$ с учетом зависимостей (38), (45) можно поставить в соответствие единичный вектор, следуя правилу (17) и задать тем самым в R^3 непрерывное векторное поле $\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\beta}(r,\theta,z)$. При этом формулу (17) для $r>0$ удобно представить в виде

$$\overrightarrow{\beta}(r,\theta,z) = \overrightarrow{\beta_+}(r,\theta,z) = \Big\{\frac{\sin\psi(\rho)}{r}\Big[\text{æ}(\rho,z)\overrightarrow{i_r}(\theta) - a(\rho)\overrightarrow{i_\theta}(\theta)\Big] + \cos\psi(\rho)\overrightarrow{i_z}\Big\}\Big|_{\rho=\rho(r,z)}, \tag{50}$$

исключив $f+\varphi(\rho)$ в (17) с помощью системы (31). Здесь $\text{æ}(\rho,z)$ определяется второй из формул (34). Тогда соответствие $\overrightarrow{X}(\rho,\vartheta,z) \to \overrightarrow{\beta}(r,\theta,z)$ выражается формулами:

$$\overrightarrow{\beta}(r,\theta,z) = \begin{cases} (-1)^n\overrightarrow{i_z}, & r=0 \quad (0 \le r \le \rho_0), \\ \overrightarrow{\beta_+}(r,\theta,z), & r>0 \quad (r>\rho_0), \end{cases} \tag{51}$$

где значения r в скобках относятся к $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$, удовлетворяющим (20).

Поле (51) имеет непрерывные производные по любому направлению всюду в R^3 в силу непрерывности всюду в R^3 полей

$$\frac{\partial \beta_\nu}{\partial \alpha} = \Big[\frac{\partial \beta_\nu(\rho,z)}{\partial \rho}\rho'_\alpha(r,z) + \frac{\partial \beta_\nu(\rho,z)}{\partial f} f'_\alpha(r,z)\Big]\Big|_{\rho=\rho(r,z)} =$$

$$= \{0 \text{ при } r=0 \ (0 \le r \le \rho_0);\ \beta_{\nu,\alpha}(r,z) \text{ при } r>0 \ (r>\rho_0)\}\,, \tag{52}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\overrightarrow{\beta}(r,\theta,z) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & r=0 \quad (0\le r\le\rho_0), \\ (1/r)[\overrightarrow{i_z}, \overrightarrow{\beta_+}(r,\theta,z)], & r>0 \quad (r>\rho_0). \end{array}\right.$$

Здесь ν, $\alpha = r$, θ, z; β_ν — компоненты вектора (51) относительно базиса $\{\overrightarrow{i_r}(\theta), \overrightarrow{i_\theta}(\theta), \overrightarrow{i_z}\}$; $\beta_{\nu,\theta}(r,z)=0$ $(\nu=r,\theta,z)$;

$$\beta_{r,r}(r,z) = \frac{2a(\rho)}{u'_\rho(\rho,z)}\Big\{\Big[\frac{a(\rho)}{r}\Big]^2\Big[\frac{\text{æ}(\rho,z)}{a(\rho)}\Big]'_\rho \sin\psi(\rho) + \frac{\text{æ}(\rho,z)}{a(\rho)}[\sin\psi(\rho)]'\Big\}\Big|_{\rho=\rho(r,z)}, \tag{53}$$

$$\beta_{\theta,r}(r,z) = \frac{2a(\rho)}{u'_\rho(\rho,z)}\Big\{\frac{a(\rho)\text{æ}(\rho,z)\sin\psi(\rho)}{r^2}\Big[\frac{\text{æ}(\rho,z)}{a(\rho)}\Big]'_\rho - [\sin\psi(\rho)]'\Big\}\Big|_{\rho=\rho(r,z)}, \tag{54}$$

$$\beta_{z,r}(r,z) = -\frac{2r\psi'(\rho)\sin\psi(\rho)}{u'_\rho(\rho,z)}\Big|_{\rho=\rho(r,z)}; \tag{55}$$

$$\beta_{r,z}(r,z) = \frac{\operatorname{tg}\psi(\rho)}{ru'_\rho(\rho,z)}\Big\{\sin\psi(\rho)[a^2(\rho)]' - 2\text{æ}^2(\rho,z)[\sin\psi(\rho)]'\Big\}\Big|_{\rho=\rho(r,z)}, \tag{56}$$

$$\beta_{\theta,z}(r,z) = \frac{2\text{æ}(\rho,z)\operatorname{tg}\psi(\rho)}{ru'_\rho(\rho,z)}\Big\{a'(\rho)\sin\psi(\rho) + a(\rho)[\sin\psi(\rho)]'\Big\}\Big|_{\rho=\rho(r,z)}, \tag{57}$$

$$\beta_{z,z}(r,z) = \frac{2\psi'(\rho)\text{æ}(\rho,z)\sin\psi(\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho)}{u'_\rho(\rho,z)}\Big|_{\rho=\rho(r,z)}, \tag{58}$$

где $a(\rho)$, $\text{æ}(\rho,z)$ и $u'_\rho(r,z)$ определяются формулами (34) и (37). При этом всюду в R^3 непрерывны ротор и дивергенция поля $\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\beta}(r,\theta,z)$, определяемые формулами:

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{\beta} = B(r,z)\overrightarrow{\beta}(r,\theta,z), \quad \operatorname{div}\overrightarrow{\beta} = \delta(r,z). \tag{59}$$

Здесь

$$B(r,z) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & r=0 \quad (0\le r\le\rho_0), \\ B_+(r,z), & r>0 \quad (r>\rho_0), \end{array}\right. \tag{60}$$

$$\delta(r,z) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & r=0 \quad (0\le r\le\rho_0), \\ \delta_+(r,z), & r>0 \quad (r>\rho_0), \end{array}\right. \tag{61}$$

где значения r в скобках относятся к $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$, удовлетворяющим условиям (20),

$$B_+(r,z) = \frac{2\rho R_3(\rho)}{[u'_\rho(\rho,z)\cos\psi(\rho)]}\Big|_{\rho=\rho(r,z)}, \tag{62}$$

$$\delta_+(r,z) = \frac{2[\text{æ}'_\rho(\rho,z)\sin\psi(\rho)\cos\psi(\rho) + \psi'(\rho)\text{æ}(\rho,z)]}{[u'_\rho(\rho,z)\cos\psi(\rho)]}\Big|_{\rho=\rho(r,z)}. \tag{63}$$

Переменная $R_3(\rho)$ в (62) определяется формулой (13).

8. Вернемся к условиям на функцию $u(\rho,z)$ (37) в предложении 5, которые накладывают ограничения на выбор функций $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$. Установим эти ограничения, принимая во внимание, что строгое и неограниченное возрастание функции $u(\rho,z)$ с ростом ρ при любом фиксированном $z\in R$ не исключает: 1) существование таких $\rho_i>0$ $(\rho_i\ge\rho_0)$, $z_i\in R$, что $u'_\rho(\rho_i,z_i)=0$; 2) существование и однозначность при таких ρ_i, z_i (см. формулы (36)) соответствий

$$(\rho_i,z_i)\to r_i = r(\rho_i,z_i) \quad \text{и} \quad (r_i,z_i)\to\rho_i \doteq \rho(r_i,z_i); \tag{64}$$

3) замену условия $u'_\rho(\rho, z) > 0$ (см. предложение 5) для каких-то пар (ρ_i, z_i) условием $u'_\rho(\rho, z) \geq 0$, если оно позволяет построить гладкое в R^3 поле (51).

Выделим в поведении функций $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$, удовлетворяющих условиям предложений 3 и 4, те особенности, которые при каких-то $\rho > 0$ $(\rho > \rho_0)$, $z \in R$ совместимы с условием

$$u'_\rho(\rho, z) = 2[a(\rho)a'(\rho) + æ(\rho, z)æ'_\rho(\rho, z)] = 0, \tag{65}$$

где $a(\rho)$, $æ(\rho, z)$ определяются формулами (34), $a'(\rho) = \cos\varphi(\rho) - \rho\varphi'(\rho)\sin\varphi(\rho)$, $æ'_\rho(\rho, z) = \sin\varphi(\rho) + \rho\varphi'(\rho)\cos\varphi(\rho) + z\psi'(\rho)\cos^{-2}\psi(\rho)$.

Так, условие (65) заведомо выполнимо, когда $a'(\rho_1) = 0$ при каком-то $\rho = \rho_1 > 0$ $(\rho_1 > \rho_0)$ справедливо, так как при $\rho = \rho_1$ всегда найдется $z = z'_1$ (если $\psi'(\rho_1) \neq 0$), а также $z = z_1$, при которых $æ'_\rho(\rho_1, z'_1) = 0$, $æ(\rho_1, z_1) = 0$, где $z'_1 = -\cos^2\psi(\rho_1)[\sin\varphi(\rho_1) + \rho_1\varphi'(\rho_1)\cos\varphi(\rho_1)]/\psi'(\rho_1)$, $z_1 = -\rho_1\sin\varphi(\rho_1)\operatorname{ctg}\psi(\rho_1)$. Равенство $a'(\rho_1) = 0$ имеет место, если только $\sin\varphi(\rho_1) \neq 0$, $\varphi'(\rho_1) = (1/\rho_1)\operatorname{ctg}\varphi(\rho_1)$. Что же касается $\psi(\rho)$, совместимой с (65), то при $\rho = \rho_1$ в зависимости от ее выбора возможны случаи:

1) $\psi'(\rho_1) = 0$ и $æ(\rho_1, z_1) = 0$, а $æ'_\rho(\rho_1, z) \neq 0$ при любом $z \in R$;

2) $z_1 \neq z'_1$, $\psi'(\rho_1) \neq 0$ и $æ(\rho_1, z_1) = 0$, $æ'_\rho(\rho_1, z_1) \neq 0$, а $æ(\rho_1, z'_1) \neq 0$, $æ'_\rho(\rho_1, z'_1) = 0$;

3) $z_1 = z'_1$, $\psi'(\rho_1) \neq 0$ и $æ(\rho_1, z_1) = æ'_\rho(\rho_1, z_1) = 0$.

Отметим далее, что в силу соответствий (64) всегда найдутся такие $r = r_1$, $z = z_1$ и такие $r = r'_1$, $z = z'_1$, что $\rho(r_1, z_1) = \rho_1$ и $\rho(r'_1, z'_1) = \rho_1$. Поэтому в первом случае для точек $\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{X}(r_1, \theta, z_1)$ будем иметь $\psi' = 0$, $æ = 0$, $æ'_\rho \neq 0$, $u'_\rho = 0$. Отсюда и из (52), (53) следует, что производная $\partial\beta_r/\partial r$ в этих точках терпит разрыв второго рода. Во втором случае в точках $\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{X}(r_1, \theta, z_1)$ уже $\psi' \neq 0$ и разрыв второго рода терпят (см. формулы (52)–(55)) производные $\partial\beta_\nu/\partial r$, $\nu = r, \theta, z$. В точках же $\overrightarrow{X'_1} = \overrightarrow{X}(r'_1, \theta, z'_1)$ имеем $\psi' \neq 0$, $æ \neq 0$, $æ'_\rho = 0$, $u'_\rho = 0$, поэтому (см. (52)–(58)) разрыв второго рода терпят $\partial\beta_\nu/\partial\alpha$, $\nu = r, \theta, z$, $\alpha = r, z$. Наконец, в третьем случае в точках $\overrightarrow{X'_1} = \overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{X}(r_1, \theta, z_1)$ имеем $\psi' \neq 0$, $æ = æ'_\rho = u'_\rho = 0$ и разрыв второго рода терпят (см. (52), (54), (55)) $\partial\beta_\theta/\partial r$, $\partial\beta_z/\partial r$.

Итак, для непрерывной дифференцируемости поля (51) необходимо выполнение условия $a'(\rho) \neq 0$ при $\rho > 0$ $(\rho > \rho_0)$. Его можно выразить неравенством

$$|a(\rho)|' > 0 \quad \text{при} \quad \rho > 0 \ (\rho > \rho_0), \tag{66}$$

где $|a(\rho)| = (-1)^m\rho\cos\varphi(\rho)$ (см. (34), (19), (20)), поскольку удовлетворяющая ему функция $|a(\rho)|$, со свойствами $|a(0)| = 0$, $|a(\rho)| > 0$ при $\rho > 0$, когда $\varphi(\rho)$ подчиняется (19), и свойствами $|a(\rho_0)| = \rho_0$, $|a(\rho)| > \rho_0$, когда $\varphi(\rho)$ подчиняется (20), должна иметь положительную производную при $\rho > 0$ $(\rho > \rho_0)$. Поскольку $(-1)^m\cos\varphi(\rho) = |\cos\varphi(\rho)|$, то функция $\varphi(\rho)$, совместимая с (66), должна подчиняться условию

$$|\cos\varphi(\rho)| - (-1)^m\rho\varphi'(\rho)\sin\varphi(\rho) > 0 \quad \text{при} \quad \rho > 0 \ (\rho > \rho_0). \tag{67}$$

Если $\varphi(\rho)$ удовлетворяет (67) и если

$$[\operatorname{tg}^2\psi(\rho)]'\Big|_{\rho=\rho_2} < 0 \tag{68}$$

при каком-то $\rho = \rho_2 > 0$ $(\rho_2 > \rho_0)$, то условие (65) выполнимо при $\rho = \rho_2$ и $z = z_2^{(\pm)}$. Здесь $z_2^{(\pm)}$ находятся из уравнения (65), взятого при $\rho = \rho_2$, которое имеет вещественные корни, поскольку дискриминант квадратного относительно z уравнения (65)

$$d(\rho) = \left\{\frac{[\rho\sin\varphi(\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho)]'}{[\operatorname{tg}^2\psi(\rho)]'}\right\}^2 - \left\{\frac{2\rho}{[\operatorname{tg}^2\psi(\rho)]'}\right\} \tag{69}$$

при $\rho = \rho_2$ положителен в силу (68). Так же обстоит дело при $\rho = \rho_3 > 0$ $(\rho_3 > \rho_0)$, если $[\operatorname{tg}^2\psi(\rho)]'\Big|_{\rho=\rho_3} = 0$, $[\rho\sin\varphi(\rho)]'\Big|_{\rho=\rho_3} \neq 0$ и $z = z_3 = -\rho\operatorname{ctg}\psi(\rho)/[\rho\sin\varphi(\rho)]'\Big|_{\rho=\rho_3}$, т. е. в этом случае снова выполнимо условие (65).

Тогда в силу соответствий (64) для выделенных пар $(\rho_2, z_2^{(\pm)})$, (ρ_3, z_3) найдутся такие $r = r_2^{(\pm)}$ и такое $r = r_3$, что $\rho(r_2^{(\pm)}, z_2^{(\pm)}) = \rho_2$, $\rho(r_3, z_3) = \rho_3$. Поэтому для точек $\overrightarrow{X_2}^{(\pm)} = \overrightarrow{X}(r_2^{(\pm)}, \theta, z_2^{(\pm)})$ будем иметь $\psi' \neq 0$, $a' \neq 0$, $æ \neq 0$, $æ'_\rho \neq 0$, $u'_\rho = 0$. Отсюда и из (52), (55), (58) легко видеть, что в этих точках терпят разрыв второго рода производные $\partial\beta_z/\partial r$, $\partial\beta_z/\partial z$. В точках же $\overrightarrow{X_3} = \overrightarrow{X}(r_3, \theta, z_3) - \psi' = 0$, $a' \neq 0$, $æ \neq 0$, $æ'_\rho \neq 0$, $u'_\rho = 0$ и разрыв второго рода терпят $\partial\beta_\nu/\partial\alpha$, $\nu = r, \theta$, $\alpha = r, z$.

Следовательно, требование непрерывной дифференцируемости поля (51) накладывает запрет на выбор функций $\psi(\rho)$, которые где-то в интервале $(0, +\infty)$ (интервале $(\rho_0, +\infty)$) ведут себя так, что убывает $\operatorname{tg}^2\psi(\rho)$. Однако допустим выбор функций $\psi(\rho)$, имеющих при $\rho > 0$ $(\rho > \rho_0)$ точки перегиба и (или) интервалы неубывания и невозрастания, где $\psi'(\rho) = 0$, если в точках перегиба и (или) на интервалах неубывания и невозрастания функция $\varphi(\rho)$ ведет себя так, что $[\rho \sin\varphi(\rho)]' = 0$, поскольку при таком ее поведении $u'_\rho(\rho, z) = 2\rho > 0$ всюду, где $\psi'(\rho) = 0$.

Наконец, условие (65) выполнимо при $\rho = \rho_4 > 0$ $(\rho_4 > \rho_0)$ и $z = z_4^{(\pm)}$, если $[\operatorname{tg}^2\psi(\rho)]'\Big|_{\rho=\rho_4} > 0$, $d(\rho_4) > 0$, где $z_4^{(\pm)}$ и $d(\rho_4)$ — соответственно корни и дискриминант уравнения (65), взятого при $\rho = \rho_4$. Однако при $r = r_4^{(\pm)}$, $z = z_4^{(\pm)}$, выделенных соответствиями $\rho(r_4^{(\pm)}, z_4^{(\pm)}) = \rho_4$, часть производных (52), а именно $\partial\beta_z/\partial r$, $\partial\beta_z/\partial z$, взятых в точках $\overrightarrow{X_4}^{(\pm)} = \overrightarrow{X}(r_4^{(\pm)}, \theta, z_4^{(\pm)})$, терпят неустранимый разрыв второго рода. Следовательно, во всех точках ρ интервала $(0, +\infty)$ (интервала $(\rho_0, +\infty)$), где

$$[\operatorname{tg}^2\psi(\rho)]' > 0, \tag{70}$$

для непрерывной дифференцируемости $\overrightarrow{\beta}(r, \theta, z)$ требуется условие $d(\rho) < 0$, т. е.

$$Q(\rho) < 1, \tag{71}$$

где $Q(\rho) = \{[\rho \sin\varphi(\rho) \operatorname{tg}\psi(\rho)]'\}^2 / \{2\rho[\operatorname{tg}^2\psi(\rho)]'\}$. Условие (71) обеспечивает отрицательность дискриминанта (69) квадратного относительно z уравнения (65), а значит, и отсутствие у него вещественных корней, если поведение $\psi(\rho)$ совместимо с неравенством (70). Учитывая это, следует указать случаи, когда (70) заведомо выполнимо.

Так, если $\psi(\rho)$ удовлетворяет условиям (19) (условиям (20)), то $\operatorname{tg}^2\psi(\rho) = 0$ при $\rho = 0$ $(\rho = \rho_0)$ и $\operatorname{tg}^2\psi(\rho) > 0$ при $\rho > 0$ $(\rho > \rho_0)$. Поэтому можно всегда выделить интервал $(0, h)$ (интервал $(\rho_0, \rho_0 + h)$), где $h > 0$, в котором всюду справедливо неравенство (70). Отсюда в силу (71) следует, в частности, что при $\rho \to +0$ $(\rho \to \rho_0 + 0)$ должен существовать предел $\lim Q(\rho) = Q_0 < 1$. Аналогично, если $\psi(\rho)$ при $\rho \to \infty$ имеет горизонтальную асимптоту $\psi = \psi_\infty$, где $0 < |\psi_\infty - n\pi| \leq \pi/2$, то должен существовать предел $\lim\limits_{\rho\to\infty} Q(\rho) = Q_\infty < 1$.

Резюмируя сказанное относительно поведения функций $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$, допускаемого требованием непрерывной дифференцируемости поля $\beta(r, \theta, z)$, сформулируем

Предложение 7. *Среди функций $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$, отвечающих условиям предложений 3 и 4, требованию гладкости поля $\beta(r, \theta, z)$ соответствуют те и только те, поведение которых подчиняется следующим ограничениям:* 1) $|\cos\varphi(\rho)| - (-1)^m \rho\varphi'(\rho)\sin\varphi(\rho) > 0$ *при* $\rho > 0$ $(\rho > \rho_0)$; 2) $|\psi(\rho) - n\pi|$ *— неубывающая функция при* $\rho > 0$ $(\rho > \rho_0)$; 3) *всюду, где* $|\psi(\rho) - n\pi|' > 0$, *выполняется неравенство* $Q(\rho) = \{[\rho \sin\varphi(\rho) \operatorname{tg}\psi(\rho)]'\}^2 / \{2\rho[\operatorname{tg}^2\psi(\rho)]'\} < 1$ *и всюду, где* $|\psi(\rho) - n\pi|' = 0$, *— равенство* $[\rho \sin\varphi(\rho)]' = 0$; 4) *выполняется неравенство* $Q_0 < 1$, *а также* $Q_\infty < 1$, *если* $\psi(\rho)$ *при* $\rho \to \infty$ *имеет горизонтальную асимптоту* $\psi = \psi_\infty$ $(0 < |\psi_\infty - n\pi| \leq \pi/2)$, *где* Q_0 *и* Q_∞ *— предельные значения* $Q(\rho)$ *при* $\rho \to +0$ $(\rho \to \rho_0 + 0)$ *и при* $\rho \to \infty$.

9. Предложения 1–7 и замечания 1–4 позволяют дать конструктивное описание полей, исчерпывающих класс $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{\text{uas}}(R^3))$. Сформулируем теорему.

Теорема. *Соответствие* $X = X(r, \theta, z) \to \beta = \beta(r, \theta, z)$ *определяет векторное поле класса* $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{\text{uas}}(R^3))$, *если оно представимо в виде* $\beta = \beta(r, \theta, z) = \{(-1)^n i_z$ *при* $r = 0$; $\beta_+(r, \theta, z)$ *при* $r > 0\}$, *где* $\beta_+(r, \theta, z) = \{(\rho/r)\sin\psi(\rho)\big[\big(\sin\varphi(\rho) + (z/\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho)\big)i_r(\theta) - \cos\varphi(\rho)i_\theta(\theta)\big] + \cos\psi(\rho)i_z\}\Big|_{\rho=\rho(r,z)}$, *и при этом:*

1) *ρ как функция r, z определяется неявно уравнением*

$$\rho^2\cos^2\varphi(\rho) + [\rho\sin\varphi(\rho) + z\operatorname{tg}\psi(\rho)]^2 - r^2 = 0;$$

2) *$\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$ непрерывны на $R_+ = [0,+\infty)$ и подчиняются ограничениям: $\psi(0) = n\pi$, $0 < \psi(\rho) - n\pi < \pi/2$ (либо $-\pi/2 < \psi(\rho) - n\pi < 0$), $-\pi/2 < \varphi(\rho) - m\pi < \pi/2$ при $\rho > 0$, где $n, m \in \mathbb{Z}$, причем $|\psi(\rho) - n\pi|$ — неубывающая функция;*

3) *производная $\psi'(\rho)$ также непрерывна на промежутке R_+, причем $\psi'(0) = 0$, а производная $\varphi'(\rho)$ непрерывна на R_+, за исключением, быть может, точки $\rho = 0$;*

4) *функции $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$ и их производные удовлетворяют условиям (a)–(e) :*

(a) $\varphi'(\rho)\sin\psi(\rho) \to 0$, $\varphi'(\rho)\rho^{-2}\mathrm{tg}^2\,\psi(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$,

(b) существует предел производной $\left[\rho^{-1}\mathrm{tg}\,\psi(\rho)\cos\varphi(\rho)\right]'$ при $\rho \to 0$,

(c) $|\cos\varphi(\rho)| - (-1)^m\rho\varphi'(\rho)\sin\varphi(\rho) > 0$ при $\rho > 0$,

(d) $[\rho\sin\varphi(\rho)]' = 0$ всюду, где $|\psi(\rho) - n\pi|' = 0$, а всюду, где $|\psi(\rho) - n\pi|' > 0$, выполняется неравенство $Q(\rho) = \{[\rho\sin\varphi(\rho)\,\mathrm{tg}\,\psi(\rho)]'\}^2/\{2\rho[\mathrm{tg}^2\,\psi(\rho)]'\} < 1$,

(e) существует предел $\lim\limits_{\rho\to+0} Q(\rho) = Q_0$, а если $\psi(\rho)$ при $\rho \to \infty$ имеет горизонтальную асимптоту $\psi = \psi_\infty$ $(0 < |\psi_\infty - n\pi| \le \pi/2)$, то существует и предел $\lim\limits_{\rho\to\infty} Q(\rho) = Q_\infty$, причем $Q_0 < 1$, $Q_\infty < 1$.

Ротор и дивергенция полей класса $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{\mathrm{uas}}(R^3))$ при условиях теоремы выражаются в явном виде формулами (59)–(63).

Если задачу о нахождении поля, принадлежащего классу $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{\mathrm{uas}}(R^3))$, ставить, следуя И. С. Громеке, то ее решение предусматривает интегрирование системы

$$\{[\beta, \mathrm{rot}\beta] = 0, \quad |\beta| = 1\}\,, \tag{72}$$

при условиях $\beta \in C^{(1)}(R^3)$, $\mathrm{rot}\beta \ne 0$ п. в. в R^3 и дополнительном условии самосовместимости поля β при повороте на любой угол вокруг координатной оси OX_3, направленной вдоль оси симметрии. В цилиндрических координатах это дополнительное условие эквивалентно условиям $\beta_r = \beta_r(r,z)$, $\beta_\theta = \beta_\theta(r,z)$, $\beta_z = \beta_z(r,z)$ на компоненты поля β относительно базиса $\{i_r(\theta), i_\theta(\theta), i_z\}$, а система (72) эквивалентна следующей системе скалярных уравнений относительно этих компонент:

$$\Big(\beta_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\beta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \beta_z\frac{\partial}{\partial z}\Big)\beta_\nu = \chi_\nu \quad (\nu = r,\theta,z); \qquad \beta_r^2 + \beta_\theta^2 + \beta_z^2 = 1,$$

где $\chi_r = \beta_\theta^2/r$, $\chi_\theta = -\beta_\theta^2\beta_r/r$, $\chi_z = 0$.

Одно из семейств полей класса $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{\mathrm{uas}}(R^3))$, каждое из которых заведомо удовлетворяет системе (72), найдено в работе [2]. В настоящей же работе устанавливается вид полей, по построению исчерпывающих класс $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{\mathrm{uas}}(R^3))$, а стало быть и класс всех аксиально симметричных решений системы (72).

Примером поля из класса $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{\mathrm{uas}}(R^3))$ может служить векторное поле, сконструированное посредством скалярных полей

$$\psi = n\pi + \mathrm{arctg}(k\widetilde{\rho}^2/\sqrt{1+\widetilde{\rho}^2}), \qquad \varphi = m\pi - (-1)^m\arcsin(\lambda\widetilde{\rho}/\sqrt{1+\widetilde{\rho}^2}). \tag{73}$$

Здесь n и m — фиксированные целые числа, k — не равная нулю произвольная постоянная, $\widetilde{\rho} = \rho/\Delta$, $\lambda = k\zeta/\Delta$, где Δ, ζ — произвольные постоянные, причем $\Delta > 0$. Поля (73) удовлетворяют всем условиям теоремы, если $|\lambda| < 1$. При таких ψ, φ в соответствии с теоремой имеем

$$\beta = \frac{(-1)^n}{\sqrt{P_2(\widetilde{\rho}^2)}}\Big\{\frac{k\widetilde{\rho}^2}{\sqrt{1+\widetilde{\rho}^2\sigma}}\Big[\widetilde{\rho}\tau i_r(\theta) - (-1)^m\sqrt{P_1(\widetilde{\rho}^2)}\,i_\theta(\theta)\Big] + \sqrt{1+\widetilde{\rho}^2}\,i_z\Big\}\Big|_{\widetilde{\rho}=\widetilde{\rho}(\widetilde{r},\tau)}. \tag{74}$$

Здесь $P_2(\widetilde{\rho}^2) = 1 + \widetilde{\rho}^2 + k^2\widetilde{\rho}^4$, $P_1(\widetilde{\rho}^2) = 1 + (1-\lambda^2)\widetilde{\rho}^2$, $\sigma = 1 - \lambda^2 + \tau^2$, $\tau = k(z-\zeta)/\Delta$, $\widetilde{\rho}(\widetilde{r},\tau) = \sqrt{\left[\widetilde{r}^2 - 1 + \sqrt{(\widetilde{r}^2-1)^2 + 4\sigma\widetilde{r}^2}\right]/(2\sigma)}$, где $\widetilde{r} = r/\Delta$. Ротор и дивергенция поля (74) выражаются формулами:

$$\mathrm{rot}\,\beta = \frac{(-1)^{m+1}(k/\Delta)\widetilde{\rho}P_4(\widetilde{\rho}^2)}{P_2(\widetilde{\rho}^2)U_2(\widetilde{\rho}^2)\sqrt{P_1(\widetilde{\rho}^2)}}\beta, \qquad \mathrm{div}\,\beta = \frac{2(-1)^n(k/\Delta)\tau\widetilde{\rho}^2(2+\widetilde{\rho}^2)\sqrt{1+\widetilde{\rho}^2}}{U_2(\widetilde{\rho}^2)\sqrt{P_2(\widetilde{\rho}^2)}},$$

где $\widetilde{\rho} = \widetilde{\rho}(\widetilde{r},\tau)$, $P_4(\widetilde{\rho}^2) = [(1-\lambda^2)\widetilde{\rho}^2(2+\widetilde{\rho}^2)+1]P_2(\widetilde{\rho}^2) + (1+\widetilde{\rho}^2)(2+\widetilde{\rho}^2)P_1(\widetilde{\rho}^2)$, $U_2(\widetilde{\rho}^2) = \sigma\widetilde{\rho}^2(2+\widetilde{\rho}^2)+1$.

Замечание 6. Предложения 1–7 и замечания 1–5 позволяют также дать описание полей, исчерпывающих класс

$$C^{(1)}(R^3, \mathfrak{T}_{\mathrm{uas}}(R^3 \backslash D), \mathfrak{L}_{\mathrm{uas}}(D)) \tag{75}$$

единичных аксиально симметричных векторных полей, гладких в R^3, но с разными в смежных областях вихревыми свойствами, а именно потенциальных (следуя [4], потенциальные в G поля относим к классу $\mathfrak{T}(G)$ поперечно вихревых полей) в $R^3 \backslash D$ и продольно вихревых в D, где область D определяется формулой (30), $R^3 \backslash D$ — прямой круговой цилиндр радиуса ρ_0, ось которого совпадает с осью симметрии поля. Вид этих полей определяется формулами (51), (50), если функции $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$ подчиняются условиям (20) предложения 3 и условиям предложений 4, 7. Зависимость переменной ρ от переменных r, z при $r \in [0, \rho_0]$ имеет вид $\rho(r, z) = r$ (см. (39)), а при $r > \rho_0$ определяется неявно уравнением (32). Ротор и дивергенция полей из (75) выражаются формулами (59)–(63). Из этих формул и из конструкции класса (75) следует, что (75) исчерпывает класс всех аксиально симметричных решений системы уравнений:

$$\mathrm{rot}\beta = 0 \ \text{ в } \ R^3 \backslash D, \qquad [\beta, \mathrm{rot}\beta] = 0 \ \text{ в } \ D, \qquad |\beta| = 1 \ \text{ в } \ R^3 \tag{76}$$

при условиях $\beta \in C^{(1)}(R^3)$, $\mathrm{rot}\beta \neq 0$ п. в. в D. Постановку задачи об интегрировании системы (76) можно рассматривать как распространение задачи (72) Громеки на случай разнородных по вихревым свойствам гладких векторных полей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 09-01-00014, 08-01-00213, 08-01-00320) *и гранта для государственной поддержки ведущих научных школ РФ* (*проект* НШ-1071.2008.1).

Библиографический список

1. *Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.* К построению единичных продольно вихревых векторных полей с помощью гладких отображений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 82–91.

2. *Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.* Продольно вихревые единичные векторные поля из класса аксиально симметричных полей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 92–98.

3. *Громека И.С.* Собрание сочинений. М.: Из-во АН СССР, 1952. 296 с.

4. *Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.* Преобразование, изменяющее геометрическое строение векторного поля // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 111–121.

УДК 517.984

О СПЕКТРАЛЬНОСТИ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.И. Исмайлов

Бакинский государственный университет,
кафедра теории функций и функционального анализа
E-mail: miqdadismailov@rambler.ru

Работа посвящена исследованию спектральности матричных операторов в банаховом пространстве. Ведется исследование спектральных свойств некоторого матричного оператора, получаемого при линеаризации полиномиального операторного пучка.

Ключевые слова: спектральная мера, разложение единицы, спектральный оператор, матричный оператор, полиномиальный операторный пучок.

On Spectral Property of Matrix Operators in Banach Space

M.I. Ismailov

Baku State University,
Chair of Theory of Function and Functional Analysis
E-mail: miqdadismailov@mail.ru

The paper is covers to the investigation of spectral property of matrix operators in Banach space. One matrix operator obtained on linearization of a polynomial operator bundle is being searched resolution of identity for its spectral properties.

Key words: spectral measure, unit expansion, spectral operator, matrix operator, polynomial operator bundle.