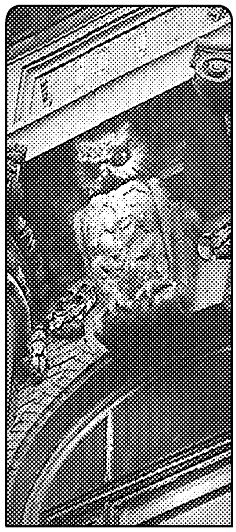
МАТЕМАТИКА



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 517.518

О СХОДИМОСТИ В $\mathbf{L^p[0,1), 0<p\le 1}$, РЯДОВ ФУРЬЕ – ВИЛЕНКИНА

С.С. Волосивец

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

В статье изучается сходимость п.в. и L^p-сходимость ($0<p\le 1$) рядов Фурье – Виленкина при некоторых тауберовых условиях на коэффициенты Фурье функции. В случае рядов Фурье – Уолша эти результаты были получены Ф. Морицем.

On Convergence of Fourier – Vilenkin Series in $\mathbf{L^p[0,1), 0<p\le 1}$

S.S. Volosivets

In this paper we study convergence a.e. and L^p-convergence ($0<p\le 1$) of Fourier – Vilenkin series under some tauberian conditions on Fourier coefficients of a function. In the case of Fourier – Walsh series these results are obtained by F. Moricz.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2\le p_n\le N$ при $n\in\mathbb{N}$. Положим по определению $m_0=1$, $m_n=p_1\dots p_n$ при $n\in\mathbb{N}$. Каждое $x\in[0,1)$ имеет разложение

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n/m_n,\quad x_n\in\mathbb{Z},\quad 0\le x_n<p_n. \tag{1}$$

Представление (1) единственно, если для $x=k/m_j$, $0<k<m_j$, $k,j\in\mathbb{N}$, брать разложение с конечным числом $x_n\ne 0$. Для $x,y\in[0,1)$ вида (1) положим $x\oplus y=z=\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n/m_n$, $z_n\in\mathbb{Z}\cap[0,p_n)$, $z_n=x_n+y_n \pmod{p_n}$. Аналогично определяется $x\ominus y$.

Если $k\in\mathbb{Z}_+$ записано в виде

$$k=\sum_{i=1}^{\infty}k_im_{i-1},\quad k_i\in\mathbb{Z},\quad 0\le k_i<p_i, \tag{2}$$

и $x\in[0,1)$ имеет разложение (1), то по определению $\chi_k(x)=$ $=\exp(2\pi i\sum\limits_{j=1}^{\infty}x_jk_j/p_j)$. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, называемая системой Виленкина, ортонормирована и полна в $L[0,1)$. Кроме того, при фиксированном $x\in[0,1)$ для почти всех $y\in[0,1)$ и всех $k\in\mathbb{Z}_+$ имеют место равенства $\chi_k(x\oplus y)=\chi_k(x)\chi_k(y)$, $\chi_k(x\ominus y)=\chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}$. Эти свойства можно найти в [1, § 1.5]. Ряд других свойств будет указан в леммах ниже. Пусть $f\in L^1[0,1)$. Коэффициенты Фурье, частная сумма Фурье и ядро Дирихле по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ задаются формулами $\hat f(n)=\int_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}\,dt$, $n\in\mathbb{Z}_+$; $S_n(f)(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\hat f(k)\chi_k(x)$, $n\in\mathbb{N}$; $D_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\chi_k(x)$, $n\in\mathbb{N}$. В работе будут также рассматриваться средние Фейера и ядро Фейера по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$: $\sigma_n(f)(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} S_k(f)(x)/n$, $F_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} D_k(x)/n$, $n \in \mathbb{N}$. Далее $\Delta a_k = \Delta^1 a_k = a_k - a_{k+1}$, $\Delta^2 a_k = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}$ и $\|f\|_p = (\int_0^1 |f(t)|^p\,dt)^{1/p}$, $0 < p < \infty$.

В настоящей работе для $f \in L^1[0,1)$ изучается сходимость к нулю (квази)норм $\|f - S_n(f)\|_p$ при $0 < p \le 1$ и некоторых условиях тауберова типа на $\{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}$. Ф. Мориц доказал следующие две теоремы для системы Уолша (частного случая нашей системы при $p_i \equiv 2$).

Теорема A .[2]. Если $f \in L[0,1)$ и

$$\lim_{\lambda\to 1+0} \limsup_{n\to\infty} ([\lambda n] - n + 1)^{-1} \sum_{k=n}^{[\lambda n]} ([\lambda n] - k + 1)|\Delta^m \hat{f}(k)| = 0, \tag{3}$$

где $m = 1$ или $m = 2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x)$ п.в. на $[0,1)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_p = 0$ при $0 < p < 1/m$.

Теорема B. [3]. Пусть $f \in L[0,1)$ и $H(\lambda) = \limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n}^{[\lambda n]} k^{p-1}|\Delta\hat{f}(k)|^p$ конечно для некоторых $\lambda > 1$ и $p > 1$. Тогда условия

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_1 = 0 \tag{4}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(n) \int_0^1 |D_n(t)|\,dt = 0 \tag{5}$$

эквивалентны.

В данной работе доказываются аналоги теорем A и B для произвольных мультипликативных систем ограниченного типа. Приведем необходимые леммы.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. [4, глава 4, § 4]. *1) Пусть $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для $x \in [m_{k+1}^{-1}, m_k^{-1})$ справедливо неравенство $|D_n(x)| \le m_{k+1} \le Nx^{-1}$.*

2) При $n \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}(x)$, где X_E — индикатор множества E.

3) Пусть $k \in \mathbb{N}$ записано в виде (2). Тогда

$$D_k(t) = \chi_k(t) \left(\sum_{i=1}^{\infty} D_{m_{i-1}}(t) \sum_{l=1}^{k_i} \chi_{m_{i-1}}^{-l}(t) \right), \quad t \in [0,1).$$

Лемма 2. [1, § 1.5]. *При $0 \le k < m_n$ функции $\chi_k(t)$ постоянны на промежутках $I_s^n = [s/m_n, (s+1)/m_n)$, $s = 0, \dots, m_n - 1$.*

Лемма 3. *Пусть $f \in L^1[0,1)$, $\lambda > 1$ и $\tau_{n,\lambda}(f)(x) = ([\lambda n] - n + 1)^{-1} \sum\limits_{k=n}^{[\lambda n]} S_k(f)(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - \tau_{n,\lambda}(f)\|_1 = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_{n,\lambda}(f)(x) = f(x)$ п.в. на $[0,1)$.*

Доказательство. Из результатов работы [5] или [4, гл.4, § 10] следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - \sigma_n(f)\|_1 = 0$. Но $\tau_{n,\lambda}(f) = ([\lambda n] - n + 1)^{-1}([\lambda n]\sigma_{[\lambda n]}(f) - (n-1)\sigma_{n-1}(f))$. Поэтому

$$\|\tau_{n,\lambda}(f) - f\|_1 \le ([\lambda n] - n + 1)^{-1}([\lambda n]\|\sigma_{[\lambda n]}(f) - f\|_1 + (n-1)\|\sigma_{n-1}(f) - f\|_1) \le$$

$$\le 2(\lambda - 1)^{-1}\lambda(\|\sigma_{[\lambda n]}(f) - f\|_1 + \|\sigma_{n-1}(f) - f\|_1) = o(1).$$

С другой стороны, известно, что $\sigma_n(f)(x)$ сходится к $f(x)$ п.в. на $[0,1)$ (см., напр. [5]). Аналогично доказательству выше показывается, что во всех точках, в которых $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = f(x)$, верно также $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_{n,\lambda}(f)(x) = f(x)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Для $n \in \mathbb{N}$ и $x \in (0,1)$ верно неравенство $|nF_n(x)| \le Cx^{-2}$.*

Доказательство. В работе [5] для $n\in[m_{s-1},m_s)$ установлена оценка

$$|nF_n(x)|\le C_1\sum_{\nu=0}^{s-1}m_\nu\sum_{i=\nu}^{s-1}\left(D_{m_i}(x)+\sum_{l=0}^{p_{\nu+1}-1}D_{m_i}(x\oplus l/m_{\nu+1})\right).$$

Если $x\in[m_{j+1}^{-1},m_j^{-1})$, то при $i,\nu>j$ имеем $D_{m_i}(x\oplus l/m_{\nu+1})=0$ при всех $l=0,\dots,p_{\nu+1}-1$. Поэтому

$$|nF_n(x)|\le C_1\sum_{\nu=0}^{j}m_\nu\sum_{i=\nu}^{j}(N+1)m_i\le C_1(N+1)\left(\sum_{i=0}^{j}m_i\right)^2\le C_2m_j^2\le C_2x^{-2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $1<p\le 2$, $1/p+1/q=1$, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}\subset\mathbb{C}$. *Тогда для любого* $\gamma\in(0,1)$ *справедливо неравенство*

$$\int_\gamma^1\left|\sum_{k=0}^{n-1}a_kD_{k+1}(x)\right|dx\le C(p)\gamma^{-1/q}\left(\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Начнем со случая $\gamma=1/m_r$, $r\in\mathbb{N}$. Обозначая $[m_{s+1}^{-1},m_s^{-1})$ через B_s, оценим

$$\int_{1/m_r}^1\left|\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1}a_kD_{k+1}(t)\right|dt=\sum_{s=0}^{r-1}\int_{B_s}\left|\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1}a_kD_{k+1}(t)\right|dt=:\sum_{s=0}^{r-1}F_s.$$

Если $r\ge j+1$, то в силу неравенства Гельдера и леммы 2

$$R_j:=\sum_{s=j}^{r-1}\int_{B_s}\left|\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1}a_kD_{k+1}(t)\right|dt\le\sum_{s=j}^{r-1}m_s^{-1}\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1}|a_k|(k+1)\le$$

$$\le 2N\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1}|a_k|\le 2Nm_{j+1}^{1-1/p}\left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1}|a_k|^p\right)^{1/p}. \qquad (6)$$

При $s<j$ на B_s в силу части 2) леммы 1 имеем $D_{m_{j+1}}(t)=0$, $D_{m_{i-1}}(t)=m_{i-1}$ при $i\le s+1$ и $D_{m_i}(t)=0$ при $i\ge s+2$. По части 3) леммы 1 получаем при $s<j$

$$F_s\le\int_{B_s}\left|\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1}a_{k-1}\chi_k(t)\sum_{i=1}^{s}m_{i-1}\sum_{\alpha=1}^{k_i}\chi_{m_{i-1}}^{-\alpha}(t)\right|dt+$$

$$+\int_{B_s}\left|\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1}a_{k-1}\chi_k(t)m_s\sum_{\alpha=1}^{k_{s+1}}\chi_{m_s}^{-\alpha}(t)\right|dt=:F_s^{(1)}+F_s^{(2)}. \qquad (7)$$

Поскольку $\chi_{m_{i-1}}(t)=1$ на B_s при $i\le s$, по неравенству Гельдера и теореме Ф.Рисса – Хаусдорфа – Юнга ($1/p+1/q=1$) находим, что

$$F_s^{(1)}=\int_{B_s}\left|\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1}\left(a_{k-1}\sum_{i=1}^{s}k_im_{i-1}\right)\chi_k(t)\right|dt\le|B_s|^{1/p}\left\|\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1}\left(a_{k-1}\sum_{i=1}^{s}k_im_{i-1}\right)\chi_k(t)\right\|_q\le$$

$$\le m_s^{-1/p}\left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-2}|a_k|^pm_s^p\right)^{1/p}\le m_s^{1-1/p}\left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1}|a_k|^p\right)^{1/p}. \qquad (8)$$

Наконец, $\chi_{m_s}(t)$ равна γ_{s+1}^l на I_l^{s+1}, где $l=1,\dots,p_{s+1}-1$ и $\gamma_{s+1}=e^{2\pi i/p_{s+1}}$ (см. определение χ_{m_s} и лемму 2). Поэтому

$$F_s^{(2)}=\sum_{l=1}^{p_{s+1}-1}\int_0^{1/m_{s+1}}\left|\sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1}a_{k-1}m_s\sum_{\alpha=1}^{k_{s+1}}\gamma_{s+1}^{-\alpha l}\chi_k(l/m_{s+1})\chi_k(t)\right|dt=:$$

$$=: \sum_{l=1}^{p_{s+1}-1} \int_0^{1/m_{s+1}} \left| \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1} a_{k,s,l}\chi_k(t) \right| dt.$$

Поскольку $|a_{k,s,l}| \le p_{s+1}m_s|a_{k-1}| = m_{s+1}|a_{k-1}|$, снова применяя неравенство Гельдера и теорему Ф.Рисса – Хаусдорфа – Юнга, получаем

$$F_s^{(2)} \le \sum_{l=1}^{p_{s+1}-1} m_{s+1}^{-1/p} \left\| \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}-1} a_{k,s,l}\chi_k(t) \right\|_q \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{p_{s+1}-1} m_{s+1}^{1-1/p} \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p} \le C_1 m_s^{1-1/p} \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p}. \tag{9}$$

Из оценок (6)–(9) выводим, что при $r \ge j+1$

$$\int_{1/m_r}^1 \left| \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} a_k D_{k+1}(t) \right| dt = R_j + \sum_{s=0}^{j-1} F_s \le C_2 m_{j+1}^{1-1/p} \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p} \le$$

$$\le C_2 m_r^{1-1/p} \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p}. \tag{10}$$

При $r \le j$ аналогично из (7)–(9) следует, что

$$\int_{1/m_r}^1 \left| \sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} a_k D_{k+1}(t) \right| dt = \sum_{s=0}^{r-1} F_s \le C_3 m_r^{1-1/p} \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p}. \tag{10'}$$

Пусть теперь $n \in [m_k, m_{k+1})$. Полагая $a_i = 0$ при $i \ge n$, имеем в силу (10) и (10′)

$$\int_{1/m_r}^1 \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i D_{i+1}(t) \right| dt \le |a_0| \int_0^1 |D_1(t)|\, dt + \sum_{j=0}^{k} \int_{1/m_r}^1 \left| \sum_{i=m_j}^{m_{j+1}-1} a_i D_{i+1}(t) \right| dt \le$$

$$\le |a_0| + C_4 \sum_{j=0}^{k} m_r^{1-1/p} \left(\sum_{k=m_j}^{m_{j+1}-1} |a_k|^p \right)^{1/p} \le C_5 m_r^{1-1/p} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

При $\gamma \ne 1/m_r$, $r \in \mathbb{N}$, найдем $r \in \mathbb{Z}_+$, такое что $\gamma \in [m_{r+1}^{-1}, m_r^{-1})$. Тогда

$$\int_{\gamma}^1 \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i D_{i+1}(t) \right| dt \le \int_{1/m_{r+1}}^1 \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i D_{i+1}(t) \right| dt \le$$

$$\le C_5 m_{r+1}^{1-1/p} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|^p \right)^{1/p} \le N^{1-1/p} C_5 \gamma^{1/p-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|^p \right)^{1/p}.$$

Лемма доказана.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть* $f \in L^1[0,1)$ *и выполнено условие* (3) *при* $m = 1$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x)$ *п.в. на* $[0,1)$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n(f) - f\|_p = 0$ *при всех* $0 < p < 1$.

Доказательство. По определению

$$\tau_{n,\lambda}(f)(x) - S_n(f)(x) = ([\lambda n] - n + 1)^{-1} \sum_{j=n+1}^{[\lambda n]} \sum_{k=n}^{j-1} \hat{f}(k)\chi_k(x). \tag{11}$$

Благодаря преобразованию Абеля находим, что

$$\sum_{k=n}^{j-1}\hat f(k)\chi_k(x)=\sum_{k=n}^{j-2}\Delta\hat f(k)D_{k+1}+\hat f(j-1)D_j(x)-\hat f(n)D_n(x). \tag{12}$$

Меняя порядок суммирования и применяя лемму 1, получаем

$$|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)|\le C_1x^{-1}(([\lambda n-n+1])^{-1}\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}(|\hat f(j-1)|+|\hat f(n)|)+$$

$$+([\lambda n-n+1])^{-1}\sum_{k=n}^{[\lambda n]-1}\sum_{j=k+1}^{[\lambda n]}|\Delta\hat f(k)|)=C_1x^{-1}(I_1(n)+I_2(n)). \tag{13}$$

Ясно, что $I_1(n)\to 0$ при $n\to\infty$ согласно аналогу теоремы Римана – Лебега (см., напр. [4, глава 4, теорема 4.2]). В свою очередь,

$$I_2(n)\le([\lambda n-n+1])^{-1}\sum_{k=n}^{[\lambda n]-1}([\lambda n]-k)|\Delta\hat f(k)|$$

и из условия (3) следует, что при некотором $\lambda>1$ и достаточно больших n имеем $I_2(n)<\varepsilon$. Учитывая доказательство леммы 3, получаем, что во всех точках $x\ne 0$, в которых $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(f)(x)=f(x)$, верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(f)(x)=f(x)$. Также из леммы 3 следует, что при каждом $\lambda>1$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\|\tau_{n,\lambda}(f)-f\|_p=0$, $0<p<1$, а из (13) при некотором $\lambda>1$ получаем, что $\|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)\|_p<\varepsilon$ для всех $n>n_0(\varepsilon)$. Из этих соотношений следует второе утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $f\in L^1[0,1)$ *и выполнено условие* (3) *при* $m=2$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(f)(x)=f(x)$ *п.в. на* $[0,1)$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n(f)-f\|_p=0$ *при всех* $0<p<1/2$.

Доказательство. Снова имеем равенство (11). Применяя дважды преобразование Абеля, находим, что

$$\sum_{k=n}^{j-1}\hat f(k)\chi_k(x)=\sum_{k=n}^{j-3}\Delta^2\hat f(k)(k+1)F_{k+1}(x)+\Delta\hat f(j-2)(j-1)F_{j-1}(x)-$$

$$-\Delta\hat f(n)nF_n(x)+\hat f(j-1)D_j(x)-\hat f(n)D_n(x).$$

Используя леммы 1 и 4, получаем (см. (12) и (13))

$$|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)|\le C_1x^{-1}I_1(n)+C_2x^{-2}(([\lambda n]-n+1)^{-1}\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}(|\Delta\hat f(j-2)|+|\Delta\hat f(n)|)+$$

$$+([\lambda n]-n+1)^{-1}\sum_{k=n}^{[\lambda n]-2}\sum_{j=k+2}^{[\lambda n]}|\Delta^2\hat f(k)|)=:C_1x^{-1}I_1(n)+C_2x^{-2}(I_4(n)+I_5(n)). \tag{14}$$

По аналогу теоремы Римана – Лебега $I_1(n)\to 0$ и $I_4(n)\to 0$ при $n\to\infty$. Поскольку

$$I_5(n)\le C_3([\lambda n]-n+1)^{-1}\sum_{k=n}^{[\lambda n]}([\lambda n]-k)|\Delta^2\hat f(k)|,$$

из условия (3) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x))=0$ на $(0,1)$. Вместе с леммой 3 это доказывает первое утверждение теоремы. При $0<p<1/2$ из (14) следует, что

$$\int_0^1|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)|^p\,dx\le C_1I_1(n)(1-p)^{-1}+C_2(I_4(n)+I_5(n))(1-2p)^{-1}.$$

Последнее выражение стремится к нулю, откуда аналогично доказательству теоремы 1 получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n(f)-f\|_p=0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если $f\in L^1[0,1)$ и $\lim\limits_{\lambda\to1+0}\limsup\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{[\lambda n]}|\Delta^m\hat f(k)|=0$ при $m=1$ или $m=2$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(f)(x)=f(x)$ п.в. на $[0,1)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n(f)-f\|_p=0$ при всех $0<p<1/m$.*

Следствие 2. *Если $f\in L^1[0,1)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{-1}\sum\limits_{k=n}^{2n}(2n-k+1)|\Delta^m\hat f(k)|=0$ при $m=1$ или $m=2$, то верны оба заключения следствия 1.*

Теорема 3. *Если $f\in L^1[0,1)$ и $H(\lambda,p)=\limsup\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{[\lambda n]}k^{p-1}|\Delta\hat f(k)|^p$ конечно для некоторых $\lambda>1$ и $p>1$, то условия (4) и (5) равносильны.*

Доказательство. Сразу сделаем замечание: если $H(\lambda,r)$ конечно и $r>p>1$, то $H(\lambda,p)$ тоже конечно. Это легко следует из неравенства Гельдера. Поэтому далее считаем, что $1<p\le2$ и пользуемся леммой 5. Пусть справедливо (5). Докажем, что

$$\lim_{\lambda\to1+0}\limsup_{n\to\infty}\|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)\|_1=0. \tag{15}$$

Тогда из леммы 3 будет следовать (4). Пусть $d_n=([\lambda n]-n+1)^{-1}$. Из равенства (11) легко получается оценка

$$J_0(n)=\int_0^{d_n}|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)|\,dx\le\int_0^{d_n}d_n\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}([\lambda n]-k+1)|\hat f(k)|\le d_n\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]}|\hat f(k)|, \tag{16}$$

где последнее выражение есть $o(1)$ в силу аналога теоремы Римана – Лебега. С другой стороны, согласно (12) имеем

$$\int_{d_n}^1|\tau_{n,\lambda}(f)(x)-S_n(f)(x)|\,dx\le\int_{d_n}^1|\hat f(n)D_n(x)|\,dx+\int_{d_n}^1 d_n|\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}\hat f(j-1)D_j(x)|\,dx+$$

$$+d_n\int_{d_n}^1\left|\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}\sum_{k=n}^{j-2}\Delta\hat f(k)D_{k+1}(x)\right|dx=J_1(n)+J_2(n)+J_3(n).$$

В силу (5) $\lim\limits_{n\to\infty}J_1(n)=0$. Далее по лемме 5 ($1/p+1/q=1$)

$$J_2(n)\le C_1d_nd_n^{-1/q}\left(\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|\hat f(j-1)|^p\right)^{1/p}=C_1\left(d_n\sum_{j=n+1}^{[\lambda n]}|\hat f(j-1)|^p\right)^{1/p}.$$

Отсюда в силу $\lim\limits_{n\to\infty}\hat f(n)=0$ получаем $\lim\limits_{n\to\infty}J_2(n)=0$. Наконец, меняя порядок суммирования, с помощью леммы 5 находим, что

$$J_3(n)=d_n\int_{d_n}^1\left|\sum_{k=n}^{[\lambda n]-2}\sum_{j=k+2}^{[\lambda n]}\Delta\hat f(k)D_{k+1}(x)\right|dx=d_n\int_{d_n}^1\left|\sum_{k=n}^{[\lambda n]-2}([\lambda n]-k-1)\Delta\hat f(k)D_{k+1}(x)\right|dx\le$$

$$\le C_1d_n^{1-1/q}\left(\sum_{k=n}^{[\lambda n]}([\lambda n]-k-1)^p|\Delta\hat f(k)|^p\right)^{1/p}\le C_1((\lambda-1)n)^{1/q}\left(\sum_{k=n}^{[\lambda n]}|\Delta\hat f(k)|^p\right)^{1/p}\le$$

$$\le C_1(\lambda-1)^{1/q}\left(\sum_{k=n}^{[\lambda n]}k^{p-1}|\Delta\hat f(k)|^p\right)^{1/p}. \tag{17}$$

Из условия следует, что при λ, близких к 1, правая часть меньше ε при всех n. Объединяя (16) и оценки для $J_1(n)$, $J_2(n)$, $J_3(n)$, получаем (15).

Пусть теперь верно (4). Тогда по лемме 3 $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n(f)-\tau_{n,\lambda}(f)\|_1=0$. Используя обозначения, введенные выше, имеем $\|S_n(f)-\tau_{n,\lambda}(f)\|_1\ge J_1(n)-J_0(n)-J_2(n)-J_3(n)$ или

$$J_1(n)\le\|S_n(f)-\tau_{n,\lambda}(f)\|_1+J_0(n)+J_2(n)+J_3(n). \tag{18}$$

Но при фиксированном λ первые три слагаемых в (18) стремятся к нулю при $n\to\infty$, а последнее стремится к нулю при $\lambda\to 1+0$ в силу (17). Таким образом, при некотором $\lambda>1$ и достаточно больших n имеем $J_1(n)=\int_{d_n}^1|\hat f(n)D_n(x)|\,dx<\varepsilon/2$. С другой стороны $\int_0^{d_n}|\hat f(n)D_n(x)|\,dx\le nd_n|\hat f(n)|\to 0$ при заданном $\lambda>1$ и $n\to\infty$, откуда $\int_0^1|\hat f(n)D_n(x)|\,dx<\varepsilon$ при $n>n_0(\varepsilon)$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть $f\in L^1[0,1)$, $p>1$, и*

$$\lim_{\lambda\to 1+0}\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{[\lambda n]}k^{p-1}|\Delta\hat f(k)|^p=0. \tag{19}$$

Тогда условия (4) и (5) равносильны.

Доказательство. Очевидно, из условия (19) следует условие теоремы 3.

Следствие 4. *Пусть $f\in L^1[0,1)$, $p>1$, и*

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{k=1}^{n}k^p|\Delta\hat f(k)|^p \tag{20}$$

существует и конечен. Тогда условия (4) и (5) равносильны.

Доказательство. Из условия вытекает ограниченность $(2n)^{-1}\sum\limits_{k=1}^{2n}k^p|\Delta\hat f(k)|^p$ и тем более $\sum\limits_{k=n}^{2n}k^{p-1}|\Delta\hat f(k)|^p$. По теореме 3 получаем заключение следствия.

Следствие 5. *Пусть $f\in L^1[0,1)$ и для некоторого $p>1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{p-1}|\Delta\hat f(k)|^p$ сходится. Тогда условия (4) и (5) равносильны.*

Замечание 1. Для $p_i\equiv 2$ следствие 3 доказано в [6].

Замечание 2. Тригонометрические аналоги теорем 1 и 2 можно найти в работе [7].

Замечание 3. Аналог следствия 5 для рядов по косинусам см. в [8], аналог следствия 3 для комплексных рядов с асимптотически четными коэффициентами можно найти в [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2970.2008.1).

Библиографический список

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
2. *Moricz F.* Walsh – Fourier series with coefficients of generalized bounded variation // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1989. V. 47, № 3. P. 458–465.
3. *Moricz F.* On L^1-convergence of Walsh – Fourier series. II. // Acta Math. Hung. 1991. V. 58, № 1–2. P. 203–210.
4. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.
5. *Pal J., Simon P.* On a generalization of the concept of derivative // Acta Math. Hung. 1977. V.29, № 1–2. P. 155–164.
6. *Moricz F.* On L^1-convergence of Walsh – Fourier series. I. // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. 1989. V.38, № 3. P.411–418.
7. *Chen C.P.* Pointwise convergence of trigonometric series // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1987. V.43, № 2. P. 291–300.
8. *Stanojevic C.V.* Classes of L^1-convergence of Fourier and Fourier – Stieltjes series // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 82, № 2. P. 209–215.
9. *Stanojevic C.V.* Tauberian conditions for L^1-convergence of Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V.271, № 1. P. 237–244.