где g — функция, отображающая множество $\{2, \ldots, m\}$ во множество $\{0, \ldots, n\}$. Поэтому

$$p_1 = \alpha_1^* \ldots \alpha_n^* \alpha_0 \overset{3}{\prec} \alpha_1^* \alpha_1^* \ldots \alpha_n^* \alpha_0 \overset{7}{\prec} \alpha_1^* \alpha_0^* \alpha_1^* \ldots \alpha_n^* \alpha_0 \overset{6,10}{\prec}$$

$$\prec \alpha_1^* \alpha_{g(2)}^* \ldots \alpha_{g(m)}^* \alpha_0 = (\beta_1 \lambda_1)^* (\mu_2 \beta_2 \lambda_2)^* \ldots (\mu_m \beta_m \lambda_m)^* \mu_0 \beta_0 \overset{17}{\prec}$$

$$\prec \beta_1^* (\mu_2 \beta_k)^* \ldots (\mu_m \beta_m)^* \mu_0 \beta_0 \overset{18}{\prec} \beta_1^* \beta_2^* \ldots \beta_m^* \mu_0 \beta_0 \overset{10}{\prec} \beta_1^* \beta_2^* \ldots \beta_m^* \beta_0 = p_2.$$

Таким образом, тождество $p_1 \leq p_2$ принадлежит Σ, т. е. $Eq\{\circ, \nabla_1\} \subset \Sigma$. Теорема доказана.

Следствия 1, 2 непосредственно вытекают из теорем 1, 2 и следствия 2 работы [5].

Библиографический список

1. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных преобразований // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов, 1965. Вып. 1. С. 3–197.
2. *Tarski A. On the calculus of relations* // J. Symbolic Logic. 1941. V. 6. P. 73-89.
3. *Henkin L., Monk J.D., Tarski A.* Cylindric Algebras. North-Holland, Amsterdam, 1971. 311 p.
4. *Schein B.M.* Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. V. 1. P. 1–62.
5. *Бредихин Д.А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Математика. 1993. № 3. С. 23–30.
6. *Andreka H., Bredikhin D.A.* The equational theory of union-free algebras of relations // Alg. Univers. 1994. V. 33. P. 12–25.
7. *Бредихин Д.А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирск. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.
8. *Бредихин Д.А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. АН. 1998. Т. 360. С. 594–595.
9. *Bredikhin D.A.* On varieties of semi-groups of relations with operations of cylindrofication // Contributions to General Algebra. 2005. V. 16. P. 1–6.
10. *Böner F, Pöschel F.R.* Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. V. 7. P. 50–70.

УДК 517.518

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ПРОСТЫХ И ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

С.С. Волосивец

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Устанавливаются двумерные аналоги известных условий Зигмунда и Саса для абсолютной сходимости рядов Фурье – Виленкина. Также доказывается, что двумерное условие Саса является неулучшаемым в определенном смысле.

Ключевые слова: абсолютная сходимость, ряды Фурье – Виленкина, модуль непрерывности, функции ограниченной p-флуктуации.

Absolute Convergence of Single and Double Fourier Series on Multiplicative Systems

S.S. Volosivets

Saratov State University,
Chair of Theory of Functions and Approximations
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Two-dimensional analogs of famous Zygmund and Szasz tests for absolute convergence of Fourier – Vilenkin series are established. Also it is proved that two-dimensional Szasz test is the best possible in the certain sense.

Key words: absolute convergence, Fourier – Vilenkin series, modulus of continuity, functions of bounded p-fluctuation.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P}=\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \leq p_j \leq N$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \ldots, p_j - 1\}$. По определению полагаем $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \ldots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \qquad x_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{1}$$

Это разложение определяется однозначно, если при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, $k \in \mathbb{Z}$, брать разложение с конечным числом ненулевых x_j. Если $y \in [0,1)$ записано в виде $y = \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j m_j^{-1}$, $y_j \in \mathbb{Z}_j$, то по определению $x \oplus y = z = \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j m_j^{-1}$, $z_j \in \mathbb{Z}_j$, где $z_j = x_j + y_j (\operatorname{mod} p_j)$. Аналогично определяется операция $x \ominus y$, которая является обратной к операции $x \oplus y$.

Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \qquad k_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{2}$$

Для чисел $x \in [0,1)$ вида (1) и $k \in \mathbb{Z}_+$ вида (2) положим по определению

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)\right).$$

Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована и полна в $L[0,1)$ [1, гл. 1, §1.5]. Из определения почти сразу следует, что при $k < m_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, функции $\chi_k(x)$ постоянны на $I_i^n = [i/m_n, (i+1)/m_n)$, $i = 0, 1, \dots m_n - 1$. Также известно, что при фиксированном $y \in [0,1)$ для почти всех $x \in [0,1)$ верно $\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $f(x)$ ограничена на $[0,1)$ и $\operatorname{osc}(f, I_i^n) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in I_i^n\}$. Тогда p-флуктуация функции f задается формулой

$$\mathcal{F}l_p(f) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(\sum_{i=0}^{m_n - 1} \operatorname{osc}^p(f, I_i^n)\right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty.$$

Для $f \in L[0,1)$ коэффициенты Фурье задаются формулой $\hat{f}(i) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_i(t)}\,dt$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Как обычно пространство $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, снабжено нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$. Если $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1)} |f(x)|$, то пространство $C^*[0,1)$ $\mathbf{P}$-непрерывных функций, состоящее из измеримых ограниченных функций f со свойством $\lim\limits_{h \to 0} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_\infty = 0$, полно относительно этой нормы. Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L[0,1) : \hat{f}(i) = 0, i \ge n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Определим наилучшее приближение и модуль непрерывности для $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, или $f \in C^*[0,1)$:

$$E_n(f)_p = \inf\{\|f - Q\|_p : Q \in \mathcal{P}_n\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$\omega_n(f)_p = \sup_{h \in [0, 1/m_n)} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_p, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Известно, что эти величины связаны неравенством А.В. Ефимова [1, § 10.5]:

$$2^{-1}\omega_n(f)_p \le E_{m_n}(f)_p \le \omega_n(f)_p. \tag{3}$$

Система $\{\chi_i(x)\chi_j(y)\}_{i,j=0}^{\infty}$ также ортонормирована и полна в $L[0,1)^2$, что позволяет определить для $f \in L[0,1)^2$ коэффициенты Фурье

$$\hat{f}(i,j) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\overline{\chi_i(x)\chi_j(y)}\,dx\,dy, \qquad i, j \in \mathbb{Z}_+,$$

и частичную сумму Фурье

$$S_{mn}(f)(x,y) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{f}(i,j)\chi_i(x)\chi_j(y), \qquad m, n \in \mathbb{N}.$$

Пространство $L^p[0,1)^2$ снабжено нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)|^p\,dx\,dy\right)^{1/p}$, а $C^*[0,1)^2$ состоит из измеримых ограниченных функций f со свойством $\lim\limits_{(h,k) \to (0,0)} \|f(x \oplus h, y \oplus k) - f(x,y)\|_\infty = 0$, где $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x,y\in[0,1)^2} |f(x,y)|$. Пространство $C^*[0,1)^2$ полно относительно этой нормы. Для $f \in L^p[0,1)^2$, $1 \le p < \infty$, также верно, что $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \|f(x\oplus h, y\oplus k) - f(x,y)\|_p = 0$. Пусть $\Delta_{uv} f(x,y) = f(x\oplus u, y\oplus v) - f(x\oplus u, y) - f(x, y\oplus v) + f(x,y)$. Ясно, что из условия $f \in L^p[0,1)^2$ следует, что $\|\Delta_{uv} f(x,y)\|_p \to 0$ при $u,v\to 0$ и такое же свойство верно для $C^*[0,1)^2$. Поэтому мы можем ввести два модуля непрерывности

$$\omega_{kl}(f)_p = \sup\{\|f(x\oplus u, y\oplus v) - f(x,y)\|_p : u \in I_0^k, v \in I_0^l\}, \quad 1 \le p < \infty, \quad k,l \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\omega^*_{kl}(f)_p = \sup\{\|\Delta_{uv} f(x,y)\|_p : u \in I_0^k, v \in I_0^l\}, \quad 1 \le p < \infty, \quad k,l \in \mathbb{Z}_+.$$

Ясно, что $\omega^*_{kl}(f)_p \le 2\omega_{kl}(f)_p$. Если $\mathcal{P}_{mn} = \{f \in L^1[0,1)^2 : \hat{f}(i,j) = 0 \, \text{при}\, i \ge m \, \text{или}\, j \ge n\}$, то $E_{mn}(f)_p = \inf\{\|f - Q\|_p : Q \in \mathcal{P}_{mn}\}$, $m,n \in \mathbb{N}$. По поводу аналога неравенства А.В. Ефимова см. [2] и лемму 2.

Пусть $I_{ij}^{kl} = I_i^k \times I_j^l$, $k,l \in \mathbb{Z}_+$, $i = 0,1,\ldots,m_k - 1$, $j = 0,1,\ldots,m_l - 1$, и $\operatorname{osc}(f, I_{ij}^{kl}) = \sup\{|\Delta_{uv} f(x,y)| : x,y \in I_{ij}^{kl}, u,v \in I_{00}^{kl}\}$. По определению p-флуктуацией функции $f(x,y)$ называется

$$\mathcal{F}l_p^{(2)}(f) = \sup_{k,l\in\mathbb{Z}_+} \left(\sum_{i=0}^{m_k-1} \sum_{j=0}^{m_l-1} \operatorname{osc}^p(f, I_{ij}^{kl}) \right)^{1/p}.$$

Целью настоящей работы является получение двумерных аналогов классических условий абсолютной сходимости А. Зигмунда [3, гл. 6, теорема (3.6)] и О. Саса [4, теорема 3.6]. В условии Зигмунда присутствовали ограниченная вариация и равномерный модуль непрерывности, у нас же будут использоваться ограниченная p-флуктуация и интегральные модули в соответствующем пространстве.

Аналоги большинства классических результатов об абсолютной сходимости для мультипликативных систем можно найти в монографии [5, гл. 4, § 2]. Двумерные аналоги теоремы Зигмунда для системы Уолша ($\{\chi_i\}_{i=0}^\infty$ при $p_i \equiv 2$), использующие ограниченную вариацию по Витали и Харди, а также равномерный модуль непрерывности, принадлежит И.А. Схиртладзе [6]. В другой работе [7] им же были даны аналоги результатов О. Саса с использованием конструкции, близкой к $\omega^*_{kl}(f)$. В работе Дж. Татеока [8] в числе прочих результатов был доказан двумерный аналог классической теоремы Стечкина об абсолютной сходимости (одномерный аналог см. в работе [5, гл. 4, теорема 4.8]). Следуя [8] мы будем использовать при получении аналога теоремы О. Саса неравенства типа А.В. Ефимова (см. лемму 2).

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1 ([1, гл. 1, § 1.5]). *Пусть* $D_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *где* X_E *— индикатор множества* E. *В качестве следствия получаем, что* $\|D_{m_k}(x)\|_p = m_k^{1-1/p}$ *и* $\|D_{m_k}(x) D_{m_l}(y)\|_p = m_k^{1-1/p} m_l^{1-1/p}$, $k,l \in \mathbb{Z}_+$.

При $p_i \equiv 2$ неравенство (4) леммы 1 доказано Ф. Морицем [2].

Лемма 2. *Пусть* $f \in L^p[0,1)^2$, $1 \le p < \infty$, *или* $f \in C^*[0,1)^2$. *Тогда при* $k,l \in \mathbb{Z}_+$ *справедливы неравенства*

$$2^{-1}\omega_{kl}(f)_p \le E_{m_k,m_l}(f)_p \le \|f - S_{m_k,m_l}(f)\|_p \le \omega_{kl}(f)_p, \tag{4}$$

$$\omega^*_{kl}(f)_p \le 4E_{m_k,m_l}(f)_p. \tag{5}$$

Доказательство. Как легко видеть,

$$S_{m_k,m_l}(f)(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 f(x\ominus u, y\ominus v) D_{m_k}(u) D_{m_l}(v)\, du\, dv.$$

В силу леммы 1 и обобщенного неравенства Минковского получаем

$$\|S_{m_k,m_l}(f) - f\|_p \le \int_0^1 \int_0^1 \|f(x\ominus u, y\ominus v) - f(x,y)\|_p D_{m_k}(u) D_{m_l}(v)\, du\, dv =$$

$$= m_k m_l \int_0^{1/m_k} \int_0^{1/m_l} \|f(x \ominus u, y \ominus v) - f(x,y)\|_p \, du \, dv \le \omega_{kl}(f)_p. \qquad (6)$$

Из (6) следует правое неравенство (4). С другой стороны, если $Q \in \mathcal{P}_{m_k,m_l}$ таков, что $\|f - Q\|_p = E_{m_k,m_l}(f)_p$, то при $(u,v) \in I_{00}^{kl}$ имеем $Q(x \oplus u, y \oplus v) = Q(x \oplus u, y) = Q(x, y \oplus v) = Q(x,y)$ и, как следствие,

$$\|\Delta_{uv} f(x,y)\|_p = \|\Delta_{uv}(f - Q)(x,y)\|_p \le 4\|f - Q\|_p.$$

Отсюда следует (5). Здесь использована инвариантность интеграла относительно $\mathbf{P}$-ичного сдвига (см. [1, § 2.1] при $p_i \equiv 2$). Левое неравенство (4) доказывается аналогично (5). Лемма доказана.

Для формулировки следующей леммы напомним некоторые определения.

Пусть $A_n^\alpha = (\alpha+1)\cdots(\alpha+n)/n!$, $n \in \mathbb{N}$, $A_0^\alpha = 1$, $\alpha > -1$. Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ определим $\sigma_n^\alpha = \sum\limits_{i=0}^{n} (A_n^\alpha)^{-1} A_{n-i}^\alpha a_i$. Пусть теперь для двойного ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{mn}$ имеет место равенство

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} S_{m,n}^{\alpha,\beta} x^m y^n = (1-x)^{-\alpha-1}(1-y)^{-\beta-1} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n.$$

Тогда $\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = (A_m^\alpha A_n^\beta)^{-1} S_{m,n}^{\alpha,\beta}$. Ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{mn}$ называется $|C,\alpha,\beta|$-суммируемым, если

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m,n-1}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m-1,n}^{\alpha,\beta} + \sigma_{m-1,n-1}^{\alpha,\beta}| < \infty,$$

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} |\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m-1,n}^{\alpha,\beta}| < \infty$ при фиксированном $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} - \sigma_{m,n-1}^{\alpha,\beta}| < \infty$ при фиксированном $m \in \mathbb{Z}_+$. Соответственно ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем $|C,\alpha|$, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha| < \infty$.

Лемма 3. 1) *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *сходится, тогда ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (A_n^\alpha)^{-1} a_n$ *суммируем* $|C,-\alpha|$ *при* $0 < \alpha < 1$.

2) *Пусть* $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| < \infty$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} (A_m^\alpha A_n^\beta)^{-1} a_{mn}$ *суммируем* $|C,-\alpha,-\beta|$, *где* $0 < \alpha, \beta < 1$.

Доказательство утверждения 1) содержится в работе [9], утверждения 2) — в работе [10, § 3, теорема 4].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le r < 2p$, $1/p + 1/q = 1$, $0 < \beta < 2$, $\gamma + 1 - \beta/2 - \beta/2p > 0$. *Если* $\mathcal{F}l_r(f) < \infty$ *и сходится ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} m_n^{\gamma+1-\beta/2-\beta/2p} (\omega_n(f)_{r+(2-r)q})^{\beta-\beta r/2p}$, *то* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (i+1)^\gamma |\hat{f}(i)|^\beta < \infty$.

Доказательство. Аналогично [11] запишем согласно равенству Парсеваля:

$$\|f(x \oplus m_{k+1}^{-1}) - f(x)\|_2^2 = \sum_{i=m_k}^{\infty} |\hat{f}(i)|^2 |\chi_i(m_{k+1}^{-1}) - 1|^2$$

и отметим, что при $i \in [m_k, m_{k+1})$ верно неравенство $|\chi_i(m_{k+1}^{-1}) - 1|^2 \ge 2 - 2\mathrm{Re}\,\chi_i(m_{k+1}^{-1}) \ge 4\sin^2(\pi/N)$, где $p_{k+1} \le N$. Поэтому, записывая $2 = r/p + ((2-r)q + r)/q$ и применяя интегральное неравенство Гельдера с показателями p и q, получаем

$$\left(\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} |\hat{f}(i)|^2\right)^p \le C_1(N)\|f(x \oplus m_{k+1}^{-1}) - f(x)\|_2^{2p} \le$$

$$\le C_1 m_k^{-1} \sum_{j=0}^{m_k-1} \left(\int_0^1 |f(x \oplus (jp_{k+1}+1)m_{k+1}^{-1}) - f(x \oplus jm_k^{-1})|^2 \, dx\right)^p \le$$

$$\le C_1 m_k^{-1} \sum_{j=0}^{m_k-1} \int_0^1 |f(x \oplus (jp_{k+1}+1)m_{k+1}^{-1}) - f(x \oplus jm_k^{-1})|^r \, dx \times$$

$$\times\left(\int_0^1 |f(x\oplus(jp_{k+1}+1)m_{k+1}^{-1})-f(x\oplus jm_k^{-1})|^{r+(2-r)q}\,dx\right)^{p-1}\le C_1 m_k^{-1}(\mathcal{F}l_r(f))^r\omega_k^{2p-r}(f)_{r_1},$$

где $r_1=r+(2-r)q$. Здесь в силу равенства $q=p/(p-1)$ имеем $(r+(2-r)q)(p-1)=rp-r+2p-pr=2p-r$. Таким образом,

$$\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}|\hat f(i)|^2\le C_2(f)m_k^{-1/p}\omega_k^{2-r/p}(f)_{r_1}.$$

Используя полученную оценку, находим, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}(i+1)^\gamma|\hat f(i)|^\beta\le C_3(N)\sum_{k=0}^{\infty}m_k^\gamma\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}|\hat f(i)|^\beta\le$$

$$\le C_4(N)\sum_{k=0}^{\infty}m_k^\gamma\left(\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}|\hat f(i)|^2\right)^{\beta/2}m_k^{1-\beta/2}\le C_5(f,N)\sum_{k=0}^{\infty}m_k^{\gamma+1-\beta/2-\beta/2p}(\omega_k(f)_{r_1})^{\beta-\beta r/2p}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Для тригонометрической системы и функций ограниченной r-вариации при $\gamma=0$, $\beta=1$ аналогичный результат был получен М. Изуми и Ш. Изуми [12].

Следствие 1. *Пусть γ,p,r,β такие же, как в теореме 1, $r_1=r+(2-r)q$, $\mathcal{F}l_r(f)<\infty$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{\gamma-\beta/2-\beta/2p}(E_k(f)_{r_1})^{\beta-\beta r/2p}$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(i+1)^\gamma|\hat f(i)|^\beta$.*

Для доказательства следствия 1 используется неравенство (3) и убывание $E_k(f)_{r_1}$.

Следствие 2. 1) *Если $\mathcal{F}l_2(f)<\infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-3/4}E_k^{1/2}(f)_2<\infty$, то $\sum\limits_{i=0}^{\infty}|\hat f(i)|<\infty$.*

2) *Если $\mathcal{F}l_3(f)<\infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-3/4}E_k^{1/4}(f)_1<\infty$, то $\sum\limits_{i=0}^{\infty}|\hat f(i)|<\infty$.*

Для доказательства в случае 1) надо положить $\beta=1$, $r=p=q=2$, а в случае 2) — $\beta=1$, $r=3$, $p=q=2$.

Следствие 3. *Пусть $1<p<\infty$, $1\le r<2p$, $1/p+1/q=1$, $0<\beta<2$, $\gamma+\alpha>\beta/2+\beta/2p-1$, $0<\alpha<1$. Если $\mathcal{F}l_r(f)<\infty$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{\alpha+\gamma-\beta/2-\beta/2p}(E_k(f)_{r_1})^{\beta-\beta r/2p}$ сходится, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}i^\gamma|\hat f(i)|^\beta$ суммируем $|C,-\alpha|$.*

Доказательство. Как известно [3, гл. 3, § 1], при $\alpha>-1$ и $n\in\mathbb{N}$ имеет место соотношение $0<C_1n^\alpha\le A_n^\alpha\le C_2n^\alpha$. По следствию 1 из условия следствия 3 вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}i^{\alpha+\gamma}|\hat f(i)|^\beta$, что равносильно сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}i^\gamma A_i^\alpha|\hat f(i)|^\beta$. По лемме 3 ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}i^\gamma|\hat f(i)|^\beta$ суммируем $|C,-\alpha|$.

Теорема 2. *Пусть $1<p<\infty$, $1\le r<2p$, $1/p+1/q=1$, $0<\beta<2$, $\delta-\beta/2-\beta/2p>-1$, $\gamma-\beta/2-\beta/2p>-1$, $r_1=r+(2-r)q$ и $\mathcal{F}l_r^{(2)}(f)<\infty$. Если сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}m_k^\gamma m_l^\delta(m_km_l)^{1-\beta/2-\beta/2p}\left(\omega_{kl}^*(f)_{r_1}\right)^{\beta-\beta r/2p},$$

то $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}i^\gamma j^\delta|\hat f(i,j)|^\beta<\infty$.

Доказательство. Рассмотрим при $0\le i<m_k$, $0\le j<m_l$, $i,j\in\mathbb{Z}$, $k,l\in\mathbb{Z}_+$, величину

$$A_{kl}^{ij}(x,y)=f(x\oplus(ip_{k+1}+1)m_{k+1}^{-1},y\oplus(jp_{l+1}+1)m_{l+1}^{-1})-f(x\oplus(ip_{k+1}+1)m_{k+1}^{-1},y\oplus jm_l^{-1})-$$

$$-f(x\oplus im_k^{-1},y\oplus(jp_{l+1}+1)m_{l+1}^{-1})+f(x\oplus im_k^{-1},y\oplus jm_l^{-1}).$$

В силу равенства Парсеваля имеем

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\hat f(i,j)(\chi_i(m_{k+1}^{-1})-1)(\chi_j(m_{l+1}^{-1})-1)\right|^2\right)^p=$$

$$= \|f(x \oplus m_{k+1}^{-1}, y \oplus m_{l+1}^{-1}) - f(x \oplus m_{k+1}^{-1}, y) - f(x, y \oplus m_{l+1}^{-1}) + f(x,y)\|_2^{2p} \le$$

$$\le m_k^{-1} m_l^{-1} \sum_{i=0}^{m_k-1} \sum_{j=0}^{m_l-1} \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| A_{kl}^{ij}(x,y) \right|^2 dx\, dy \right)^p.$$

Аналогично доказательству теоремы 1 неравенство $|(\chi_i(m_{k+1}^{-1}) - 1)(\chi_j(m_{l+1}^{-1}) - 1)|^2 \ge C_1(N)$ справедливо при $i \in [m_k, m_{k+1})$, $j \in [m_l, m_{l+1})$. Поэтому, используя равенство $2 = r/p + ((2-r)q + r)/q$ и неравенство Гельдера, получаем

$$\left(\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} \sum_{i=m_l}^{m_{l+1}-1} |\hat f(i,j)|^2 \right)^p \le C_2 m_k^{-1} m_l^{-1} \sum_{i=0}^{m_k-1} \sum_{j=0}^{m_l-1} \int_0^1 \int_0^1 \left| A_{kl}^{ij}(x,y) \right|^r dx\, dy \times$$

$$\times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| A_{kl}^{ij}(x,y) \right|^{r+(2-r)q} dx\, dy \right)^{p-1} \le C_2 m_k^{-1} m_l^{-1} (\mathcal{F}l_r^{(2)}(f))^r (\omega_{kl}^*(f)_{r_1})^{2p-r}. \qquad (7)$$

Далее,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} i^\gamma j^\delta |\hat f(i,j)|^\beta \le C_3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} m_k^\gamma m_l^\delta \sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} \sum_{i=m_l}^{m_{l+1}-1} |\hat f(i,j)|^\beta \le$$

$$\le C_3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} m_k^\gamma m_l^\delta \left(\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} \sum_{i=m_l}^{m_{l+1}-1} |\hat f(i,j)|^2 \right)^{\beta/2} (m_{k+1} m_{l+1})^{1-\beta/2} \le$$

$$\le C_4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} m_k^\gamma m_l^\delta (m_k m_l)^{1-\beta/2-\beta/2p} (\omega_{kl}^*(f)_{r_1})^{\beta - \beta r/2p}.$$

Теорема доказана.

Следствие 4. *Пусть кроме условий теоремы* 2 *известно, что* $\mathcal{F}l_r(f_1) < \infty$, $\mathcal{F}l_r(f_2) < \infty$, *а также*

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{\gamma+1-\beta/2-\beta/2p} \omega_k^{\beta-\beta r/2p}(f_1)_{r_1} < \infty, \qquad \sum_{l=0}^{\infty} m_l^{\delta+1-\beta/2-\beta/2p} \omega_k^{\beta-\beta r/2p}(f_2)_{r_1} < \infty, \qquad (8)$$

где $f_1(x) = \int_0^1 f(x,y)\, dy$, $f_2(y) = \int_0^1 f(x,y)\, dx$. *Тогда* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} (i+1)^\gamma (j+1)^\delta |\hat f(i,j)|^\beta < \infty$.

Доказательство. Ясно, что $\hat f(i,0) = \hat f_1(i)$, $\hat f(0,j) = \hat f_2(j)$, $i,j \in \mathbb{Z}_+$, поэтому из (8) по теореме 1 вытекает сходимость рядов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i^\gamma |\hat f(i,0)|^\beta$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} j^\delta |\hat f(0,j)|^\beta$. Отсюда по теореме 2 легко получаем утверждение следствия.

Замечание 2. В условиях (8), а также в условиях ограниченности r-флуктуации, можно варьировать r и p, требуя выполнения неравенств $1 < p < \infty$, $1 \le r < 2p$.

Следствие 5. *Пусть* γ, δ, p, r, q, β — *такие же как в теореме* 2, $\mathcal{F}l_r^{(2)}(f) < \infty$, $\mathcal{F}l_r(f_1) < \infty$, $\mathcal{F}l_r(f_2) < \infty$ *и сходятся ряды*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} i^\gamma j^\delta (ij)^{-\beta/2-\beta/2p} (E_{ij}(f)_{r_1})^{\beta-\beta r/2p}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} i^{\gamma-\beta/2-\beta/2p} (E_i(f_1)_{r_1})^{\beta-\beta r/2p},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{\delta-\beta/2-\beta/2p} (E_j(f_2)_{r_1})^{\beta-\beta r/2p}.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (i+1)^\gamma (j+1)^\delta |\hat f(i,j)|^\beta < \infty.$$

При доказательстве используется неравенство (5) и монотонность $E_{ij}(f)_{r_1}$ по каждому индексу.

Следствие 6 (аналог теоремы Зигмунда). *Если* $\mathcal{F}l_1^{(2)}(f) < \infty$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} (ij)^{-1} E_{ij}^{1/2}(f)_\infty < \infty$, *то* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} i^\gamma j^\delta |\hat f(i,j)|^\beta < \infty$.

Доказательство. Формально следствие 6 не вытекает из теоремы 2, поскольку в последней требуется $1 < p < \infty$. На самом деле, для доказательства в (7) вместо неравенства Гельдера надо записать

$$\sum_{i=0}^{m_k-1}\sum_{j=0}^{m_l-1}\int_0^1\int_0^1\left|A_{kl}^{ij}(x,y)\right|^2 dx\,dy \le \omega_{kl}^*(f)_\infty\int_0^1\int_0^1\sum_{i=0}^{m_k-1}\sum_{j=0}^{m_l-1}\left|A_{kl}^{ij}(x,y)\right| dx\,dy \le \omega_{kl}^*(f)_\infty\mathcal{F}l_1^{(2)}(f).$$

Далее рассуждения аналогичны доказательству теоремы 2 и следствия 5.

Следствие 7. *Пусть γ, δ, p, r, q, β — такие же как в теореме 2, причем $\gamma, \delta \in (0,1)$, $\mathcal{F}l_r^{(2)}(f) < \infty$, и сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} i^\gamma j^\delta (ij)^{-\beta/2-\beta/2p}(E_{ij}(f)_{r_1})^{\beta-\beta r/2p}$. Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\hat{f}(i,j)|^\beta$ суммируем $|C,-\gamma,-\delta|$.*

Доказательство. Аналогично следствию 5 из условия выводим сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} i^\gamma j^\delta|\hat{f}(i,j)|^\beta$, что в силу отмеченного при доказательстве следствия 3 неравенства равносильно сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} A_i^\gamma A_j^\delta|\hat{f}(i,j)|^\beta$. Результат следствия получается с помощью леммы 3.

Теперь дадим признак сходимости рядов из коэффициентов Фурье, в котором участвует модуль непрерывности $\omega_{kl}(f)_p$ при $k = l$. Введем множество индексов

$$R_l = \{(i,j) : 0 \le i, j < m_l\} \setminus \{(i,j) : 0 \le i, j < m_{l-1}\}, \qquad l \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Пусть $f \in L^p[0,1)^2$, $1 < p \le 2$, $1/p + 1/q = 1$, $0 < \beta < q$, $\gamma + \delta + 2 - 2\beta/q > 0$. Если сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k^{\gamma+\delta+2-2\beta/q}\omega_{kk}^\beta(f)_p$, то $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(i+1)^\gamma(j+1)^\delta|\hat{f}(i,j)|^\beta < \infty$.*

Доказательство. С помощью неравенства Хаусдорфа – Юнга и (4) имеем при $l \in \mathbb{N}$

$$\sum_{(i,j)\in R_l}(i+1)^\gamma(j+1)^\delta|\hat{f}(i,j)|^\beta \le \left(\sum_{(i,j)\in R_l}((i+1)^\gamma(j+1)^\delta)^{q/(q-\beta)}\right)^{1-\beta/q}\left(\sum_{(i,j)\in R_l}|\hat{f}(i,j)|^q\right)^{\beta/q} \le$$

$$\le \left(m_l^{(\gamma+\delta)q/(q-\beta)}\sum_{(i,j)\in R_l}1\right)^{1-\beta/q}\|S_{m_l,m_l}(f) - S_{m_{l-1},m_{l-1}}(f)\|_p^\beta \le C_1 m_l^{((\gamma+\delta)q+2(q-\beta))/q}E_{m_{l-1},m_{l-1}}^\beta(f)_p.$$

В итоге получаем

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i+1)^\gamma(j+1)^\delta|\hat{f}(i,j)|^\beta = |\hat{f}(0,0)|^\beta + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{(i,j)\in R_l}(i+1)^\gamma(j+1)^\delta|\hat{f}(i,j)|^\beta \le$$

$$\le |\hat{f}(0,0)|^\beta + C_2\sum_{l=0}^{\infty} m_l^{\gamma+\delta+2-2\beta/q}E_{m_l,m_l}^\beta(f)_p.$$

В силу (4) ясно, что сходимость последнего ряда вытекает из условия теоремы. Теорема доказана.

Следствие 8 (аналог теоремы Саса). *Пусть $f \in L^p[0,1)^2$, $1 < p \le 2$, и сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k^{2/p}\omega_{kk}(f)_p$. Тогда $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\hat{f}(i,j)| < \infty$. В частности, это верно, если сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k\omega_{kk}(f)_2$.*

Теорема 4. *Пусть γ, δ, β, p, q — такие как в теореме 3, а $\{\omega_l\}_{l=0}^\infty$ убывает к нулю и удовлетворяет условию Бари $\sum\limits_{k=l+1}^{\infty}\omega_k = O(\omega_l)$. Если расходится ряд $\sum\limits_{l=0}^{\infty} m_l^{\gamma+\delta+2-2\beta/q}\omega_l^\beta$, то существует $f \in L^p[0,1)^2$, такая что $\omega_{ll}(f)_p = O(\omega_l)$ и при этом $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(i+1)^\gamma(j+1)^\delta|\hat{f}(i,j)|^\beta = \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_0(x,y) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} m_l^{-2/q}\omega_l\sum\limits_{(i,j)\in R_l}\chi_i(x)\chi_j(y)$. Тогда согласно (4), лемме 1 и условию Бари мы находим, что

$$\omega_{ll}(f_0)_p \le 2E_{m_l,m_l}(f_0)_p \le 2\|f - S_{m_l,m_l}(f_0)\|_p \le 2\sum_{k=l+1}^{\infty} m_k^{-2/q}\omega_k \|D_{m_k,m_k} - D_{m_{k-1},m_{k-1}}\|_p \le$$
$$\le 4\sum_{k=l+1}^{\infty} m_k^{-2/q}\omega_k m_k^{2/q} \le C_1\omega_l.$$

С другой стороны, в силу условия теоремы

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(i+1)^{\gamma}(j+1)^{\delta}|\hat f(i,j)|^{\beta} \ge \sum_{l=1}^{\infty}(m_l^{-2/q}\omega_l)^{\beta}\sum_{i=m_{l-1}}^{m_l-1}\sum_{j=m_{l-1}}^{m_l-1}(i+1)^{\gamma}(j+1)^{\delta} \ge$$
$$\ge \sum_{l=1}^{\infty} m_l^{-2\beta/q}\omega_l^{\beta}N^{-2}m_l^{\gamma+\delta}\sum_{i=m_{l-1}}^{m_l-1}\sum_{j=m_{l-1}}^{m_l-1}1 \ge C_2\sum_{l=0}^{\infty} m_l^{\gamma+\delta+2-2\beta/q}\omega_l^{\beta} = \infty.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (*проект* НШ-2970.2008.01).

Библиографический список

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
2. *Moricz F.* Approximation by double Walsh polynomials // Intern. J. Math. Math. Sci. 1992. V. 15, № 2. P. 209–220.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
4. *Szasz O.* Fourier series and mean moduli of continuity // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. V. 42, № 3. P. 366–395.
5. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.
6. *Схиртладзе И.А.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье – Уолша // Сообщ. АН ГССР. 1971. Т. 64, № 2. С. 273–276.
7. *Схиртладзе И.А.* Об абсолютной сходимости и суммируемости простых и кратных рядов Фурье – Уолша // Сообщ. АН ГССР. 1973. Т. 69, № 1. С. 17–20.
8. *Tateoka J.* Absolute convergence of double Walsh – Fourier series // Acta Sci. Math. (Szeged). 2006. V. 72, № 1–2. P. 101–115.
9. *Sunouchi G.I.* Notes on Fourier analysis. XI. On the absolute summability of Fourier series // J. Math. Soc. Japan. 1949. V. 1, № 2. P. 122–129.
10. *Жак И.Е., Тиман М.Ф.* О суммировании двойных рядов // Мат. сб. 1954. Т. 35(77), № 1. С. 21–56.
11. *Волосивец С.С.* Приближение функций ограниченной p-флуктуации полиномами по мультипликативным системам // Analysis Math. 1995. V. 21, № 1. P. 61–77.
12. *Izumi M., Izumi S.* On absolute convergence of Fourier series // Arkiv för Matematik. 1967. V. 7, № 12. P. 177–184.

УДК 517.977

ОБ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМИ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И.В. Гребенникова

Уральский государственный университет, Екатеринбург,
кафедра прикладной математики
E-mail: giv001@usla.ru

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. Предлагается итерационная процедура построения управляющего воздействия, аппроксимирующего оптимальное решение с заданной степенью точности относительно малого положительного параметра.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием, оптимальное управление, фундаментальная матрица.

On Iterative Method of Constructing Optimal Control for Singularly Perturbed Systems with Delay

I.V. Grebennikova

Ural State University, Ekaterinburg,
Chair of applied mathematics
E-mail: giv001@usla.ru

The control problem for the singularly perturbed system with delay according to the minimax criterion is considered. Iterative procedure of constructing control response that approximates the optimal solution with given accuracy with respect to a small positive parameter is proposed.

Key words: singularly perturbed system with delay, optimal control, fundamental matrix.