УДК 517.984

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФЕ С ЦИКЛОМ И С ОБОБЩЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕЙКИ

В.А. Юрко

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

Получено решение обратной спектральной задачи для дифференциальных операторов второго порядка на графе с циклом и с обобщенными условиями склейки во внутренней вершине.

Recovering Differential Operators on a Graph with a Cycle and with Generalized Matching Conditions

V.A. Yurko

The solution of the inverse spectral problem is obtained for second-order differential operators on a graph with a cycle and with generalized matching conditions in the internal vertex.

ВВЕДЕНИЕ

В статье исследуются обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов Штурма – Лиувилля на графе с циклом. Обратные спектральные задачи состоят в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Основные результаты по обратным спектральным задачам на *интервале* представлены в [1–6]. Дифференциальные операторы на графах (пространственных сетях, деревьях) часто возникают в естествознании и технике (см. [7]). Большинство работ в этом направлении посвящено так называемым прямым задачам изучения свойств спектра и корневых функций операторов на графе. Обратные спектральные задачи, в силу их нелинейности, являются более трудными, и в настоящее время есть только несколько работ в этой области. В частности, обратные спектральные задачи восстановления коэффициентов дифференциальных операторов на деревьях (т.е. на графах без циклов) по системе спектров и по функциям Вейля исследовались в [8] и других работах. Однако нет аналогичных общих результатов в теории обратных задач для графов с циклами.

В данной работе дана постановка и получено решение обратной спектральной задачи для операторов Штурма – Лиувилля на графе с циклом и с обобщенными условиями склейки во внутренней вершине. Доказана теорема единственности и получена конструктивная процедура решения этого класса обратных задач.

Рассмотрим компактный граф T в $\mathbf{R^m}$ с множеством вершин $V=\{v_0,\dots,v_r\}$ и множеством ребер $\mathcal{E}=\{e_0,\dots,e_r\}$, где $v_1,\dots,v_r$ — граничные вершины, v_0 — внутренняя вершина, $e_j=[v_j,v_0]$, $j=\overline{1,r}$, $e_0\cap e_1\cap\ldots\cap\ e_r=\{v_0\}$, и e_0 — цикл. Пусть T_j, $j=\overline{0,r}$ — длина ребра e_j. Каждое ребро $e_j\in\mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j\in[0,T_j]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию: при $j=\overline{1,r}$ вершина v_j соответствует $x_j=0$, а вершина v_0 соответствует $x_j=T_j$; при $j=0$ оба конца интервала $x_0=+0$ и $x_0=T_0-0$ соответствуют v_0.

Интегрируемая функция Y на T может быть представлена в виде $Y=\{y_j\}_{j=\overline{0,r}}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j\in[0,T_j]$ определена на ребре e_j. Пусть $q=\{q_j\}_{j=\overline{0,r}}$ — интегрируемая вещественнозначная функция на T; q называется потенциалом. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение на T:

$$-y_j''(x_j)+q_j(x_j)y_j(x_j)=\lambda y_j(x_j),\qquad j=\overline{0,r},\tag{1}$$

где λ — спектральный параметр, а функции y_j,y_j', $j=\overline{0,r}$ абсолютно непрерывны на $[0,T_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки во внутренней вершине v_0:

$$y_0(0)=\alpha_j y_j(T_j),\ j=\overline{0,r},\qquad y_0'(0)-h_0y_0(0)=\sum_{j=0}^{r}\beta_j y_j'(T_j),\tag{2}$$

где α_j,β_j,h_0 — вещественные числа и $\alpha_j\beta_j\neq 0$, $\alpha_0+\beta_0\neq 0$. Предположим, что

$$z_r=(\alpha_0+\beta_0)\prod_{j=1}^{r}\alpha_j+\alpha_0\sum_{i=1}^{r}\beta_i\prod_{j=1,\,j\neq i}^{r}\alpha_j\neq 0.$$

Это условие называется условием регулярности склейки. Дифференциальные операторы, которые не удовлетворяют этому условию, имеют качественно отличные свойства при постановке и исследовании обратной задачи и в данной работе не рассматриваются; они требуют отдельного исследования. Отметим, что если $\alpha_j = \beta_j = 1$, $h_0^0 = 0$, то это условие называется стандартным условием склейки [7,8]. Для стандарной склейки $z_r = r + 2$, и условие регулярности склейки очевидно выполняется. Отметим также, что

$$z_0 = \alpha_0 + \beta_0, \qquad z_{k+1} = \alpha_{k+1} z_k + \beta_{k+1} \prod_{j=1}^{k} \alpha_j \,.$$

Рассмотрим краевую задачу $B_0(q)$ на T для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями в граничных вершинах $v_1, \dots, v_r$:

$$y_j(0) = 0, \qquad j = \overline{1, r}.$$

Кроме того, рассмотрим краевые задачи $B_k(q)$, $k = \overline{1, r}$ на T для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями

$$y_k'(0) = 0, \qquad y_j(0) = 0, \qquad j = \overline{1, r} \setminus k.$$

Обозначим через $\Lambda_k = \{\lambda_{kn}\}_{n \ge 0}$ собственные значения (с учетом кратностей) задач $B_k(q)$, $k = \overline{0, r}$.

В отличие от задач на деревьях (см. [8]), здесь задание спектров Λ_k, $k = \overline{0, r}$ не определяет однозначно потенциал, и мы нуждаемся в дополнительной информации. Пусть $S_j(x_j, \lambda)$, $C_j(x_j, \lambda)$, $j = \overline{0, r}$ — решения уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях:

$$S_j(0, \lambda) = C_j'(0, \lambda) = 0, \qquad S_j'(0, \lambda) = C_j(0, \lambda) = 1.$$

При каждом фиксированном $x_j \in [0, T_j]$ функции $S_j^{(\nu)}(x_j, \lambda)$, $C_j^{(\nu)}(x_j, \lambda)$, $j = \overline{0, r}$, $\nu = 0, 1$ являются целыми по λ порядка $1/2$, причем,

$$\langle C_j(x_j, \lambda),\, S_j(x_j, \lambda)\rangle \equiv 1,$$

где $\langle y, z\rangle = yz' - y'z$ — вронскиан функций y и z. Обозначим

$$h(\lambda) = S_0(T_0, \lambda), \qquad H(\lambda) = \alpha_0 C_0(T_0, \lambda) - \beta_0 S_0'(T_0, \lambda).$$

Пусть $\{\nu_n\}_{n \ge 1}$ — нули целой функции $h(\lambda)$, и положим $\omega_n = \operatorname{sign} H(\nu_n)$, $\Omega = \{\omega_n\}_{n \ge 1}$. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. По заданным Λ_k, $k = \overline{0, r}$ и Ω построить потенциал q на T.

Отметим, что коэффициенты из условия склейки (3) предполагаются известными a priori. Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи 1. Для этого наряду с q рассмотрим потенциал $\tilde{q}$. Везде в дальнейшем, если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к q, то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{q}$.

Теорема 1. *Если $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{0, r}$, и $\Omega = \tilde{\Omega}$, то $q = \tilde{q}$. Таким образом, задание Λ_k, $k = \overline{0, r}$ и Ω однозначно определяет потенциал q на T.*

Эта теорема будет доказана в пункте 3. Кроме того, мы дадим конструктивную процедуру решения обратной задачи 1. В пункте 2 вводятся основные понятия и доказываются вспомогательные утверждения.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Фиксируем $k = \overline{1, r}$. Пусть $\Phi_k = \{\Phi_{kj}\}_{j = \overline{0, r}}$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие (2) и краевым условиям:

$$\Phi_{kj}(0, \lambda) = \delta_{jk}, \qquad j = \overline{1, r}, \tag{3}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Положим $M_k(\lambda) = \Phi_{kk}'(0, \lambda)$, $k = \overline{1, r}$. Функция $M_k(\lambda)$ называется *функцией Вейля* относительно граничной вершины v_k. Ясно, что

$$\Phi_{kk}(x_k,\lambda)=C_k(x_k,\lambda)+M_k(\lambda)S_k(x_k,\lambda),\qquad x_k\in[0,T_k],\qquad k=\overline{1,r},\tag{4}$$

и следовательно,

$$\langle\Phi_{kk}(x_k,\lambda),\ S_k(x_k,\lambda)\rangle\equiv 1.$$

Обозначим $M^1_{kj}(\lambda)=\Phi_{kj}(0,\lambda),\ M^0_{kj}(\lambda)=\Phi'_{kj}(0,\lambda)$. Тогда

$$\Phi_{kj}(x_j,\lambda)=M^1_{kj}(\lambda)C_j(x_j,\lambda)+M^0_{kj}(\lambda)S_j(x_j,\lambda),\qquad x_j\in[0,T_j],\ j=\overline{0,r},\ k=\overline{1,r}.\tag{5}$$

В частности, $M^1_{kk}(\lambda)=1,\ M^0_{kk}(\lambda)=M_k(\lambda)$. Подставляя (5) в (2) и (3), получим линейную алгебраическую систему s_k относительно $M^\nu_{kj}(\lambda),\ \nu=0,1,\ j=\overline{0,r}$. Определитель $\Delta_0(\lambda)$ системы s_k не зависит от k и имеет вид

$$\Delta_0(\lambda)=d(\lambda)\prod_{j=1}^r\alpha_jS_j(T_j,\lambda)+\alpha_0h(\lambda)D(\lambda),\tag{6}$$

где

$$d(\lambda)=\alpha_0C_0(T_0,\lambda)+\beta_0S'_0(T_0,\lambda)+\alpha_0h_0S_0(T_0,\lambda)-(\alpha_0\beta_0+1),\tag{7}$$

$$D(\lambda)=\sum_{i=1}^r\beta_iS'_i(T_i,\lambda)\prod_{j=1,\,j\neq i}^r\alpha_jS_j(T_j,\lambda)=\prod_{j=1}^r\alpha_jS_j(T_j,\lambda)\sum_{i=1}^r\frac{\beta_iS'_i(T_i,\lambda)}{\alpha_iS_i(T_i,\lambda)}\,.\tag{8}$$

Функция $\Delta_0(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи $B_0(q)$. Решая алгебраическую систему s_k, получаем по формулам Крамера $M^s_{kj}(\lambda)=\Delta^s_{kj}(\lambda)/\Delta_0(\lambda),\ s=0,1,\ j=\overline{0,r}$, где определитель $\Delta^s_{kj}(\lambda)$ получается из $\Delta_0(\lambda)$ заменой столбца, соответствующего $M^s_{kj}(\lambda)$, на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\lambda)=-\frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)},\qquad k=\overline{1,r},\tag{9}$$

где

$$\Delta_k(\lambda)=d(\lambda)\alpha_kC_k(T_k,\lambda)\prod_{j=1,\,j\neq k}^r\alpha_jS_j(T_j,\lambda)+\alpha_0h(\lambda)D_k(\lambda),\tag{10}$$

$$D_k(\lambda)=\beta_kC'_k(T_k,\lambda)\prod_{j=1,\,j\neq k}^r\alpha_jS_j(T_j,\lambda)+\alpha_kC_k(T_k,\lambda)\sum_{i=1,\,i\neq k}^r\beta_iS'_i(T_i,\lambda)\prod_{j=1,\,j\neq i,k}^r\alpha_jS_j(T_j,\lambda).\tag{11}$$

Отметим, что $\Delta_k(\lambda)$ получается из $\Delta_0(\lambda)$ заменой $S^{(\nu)}_k(T_k,\lambda),\ \nu=0,1$, на $C^{(\nu)}_k(T_k,\lambda)$. Функция $\Delta_k(\lambda)$ является целой λ порядка $1/2$ и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи $B_k(q)$. Функции $\Delta_k(\lambda),\ k=\overline{0,r}$ называются характеристическими функциями задач $B_k(q)$.

Пусть $\lambda=\rho^2,\ \operatorname{Im}\rho\geq 0$. Обозначим $\Lambda=\{\rho:\ \operatorname{Im}\rho\geq 0\},\ \Lambda^\delta=\{\rho:\ \arg\rho\in[\delta,\pi-\delta]\}$. Известно (см. [9]), что при каждом фиксированном $j=\overline{0,r}$ на ребре e_j существует фундаментальная система решений уравнения (1) $\{e_{j1}(x_j,\rho),e_{j2}(x_j,\rho)\},\ x_j\in[0,T_j],\ \rho\in\Lambda,\ |\rho|\geq\rho^*$ со свойствами:

1) функции $e^{(\nu)}_{js}(x_j,\rho),\ \nu=0,1$, непрерывны при $x_j\in[0,T_j],\ \rho\in\Lambda,\ |\rho|\geq\rho^*$;

2) для каждого $x_j\in[0,T_j]$ функции $e^{(\nu)}_{js}(x_j,\rho),\ \nu=0,1$, являются аналитическими при $\operatorname{Im}\rho>0,\ |\rho|>\rho^*$;

3) равномерно по $x_j\in[0,T_j]$ имеют место асимптотические формулы

$$e^{(\nu)}_{j1}(x_j,\rho)=(i\rho)^\nu\exp(i\rho x_j)[1],\ e^{(\nu)}_{j2}(x_j,\rho)=(-i\rho)^\nu\exp(-i\rho x_j)[1],\ \rho\in\Lambda,\ |\rho|\to\infty,\tag{12}$$

где $[1]=1+O(\rho^{-1})$.

Зафиксируем $k=\overline{1,r}$. Имеем

$$\Phi_{kj}(x_j,\lambda)=A^1_{kj}(\rho)e_{j1}(x_j,\rho)+A^0_{kj}(\rho)e_{j2}(x_j,\rho),\qquad x_j\in[0,T_j].\tag{13}$$

Подставляя (13) в (2) и (3), получаем линейную алгебраическую систему s^0_k относительно $A^\nu_{kj}(\lambda)$, $\nu=0,1,\ j=\overline{0,r}$. Определитель $\delta_0(\rho)$ системы s^0_k не зависит от k и имеет вид $\delta_0(\rho)=2(-2i\rho)^r\Delta_0(\lambda)$, $\rho\in\Lambda$. Кроме того,

$$\delta_0(\rho)=z_r\exp\Big(-i\rho\sum_{j=0}^rT_j\Big)[1],\qquad\rho\in\Lambda^\delta,\ |\rho|\in\infty.\tag{14}$$

Решая алгебраическую систему s_k^0 по формулам Крамера и используя (12) и (14), вычисляем

$$A_{kk}^1(\rho) = [1], \ A_{kk}^0(\rho) = a_k \exp(2i\rho T_k)[1], \qquad \rho \in \Lambda^\delta, \ |\rho| \in \infty,$$

где a_k — константа. Вместе с (12) и (13) это дает при фиксированном $x_k \in [0, T_k)$:

$$\Phi_{kk}^{(\nu)}(x_k, \lambda) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x_k)[1], \qquad \rho \in \Lambda^\delta, \ |\rho| \in \infty. \tag{15}$$

В частности, $M_k(\lambda) = (i\rho)[1], \ \rho \in \Lambda^\delta, \ |\rho| \in \infty$. Кроме того, равномерно по $x_j \in [0, T_j]$,

$$S_j^{(\nu)}(x_j, \lambda) = \frac{1}{2i\rho}\Big((i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1] - (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1]\Big), \ \rho \in \Lambda, \ |\rho| \to \infty, \tag{16}$$

$$C_j^{(\nu)}(x_j, \lambda) = \frac{1}{2}\Big((i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1] + (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1]\Big), \ \rho \in \Lambda, \ |\rho| \to \infty. \tag{17}$$

Пусть $\lambda_{kn}^0 = (\rho_{nk}^0)^2, \ k = \overline{0, r},$ — собственные значения краевых задач $B_k(0)$ с нулевым потенциалом и $h_0 = 0$, и пусть $\Delta_k^0(\lambda)$ — характеристические функции задач $B_k(0)$. Согласно (6)–(8) и (10)–(11) имеем

$$\Delta_0^0(\lambda) = \Big((\alpha_0 + \beta_0)\cos\rho T_0 - (\alpha_0\beta_0 + 1)\Big)\prod_{j=1}^r \alpha_j \frac{\sin\rho T_j}{\rho} +$$
$$+\alpha_0 \frac{\sin\rho T_0}{\rho}\sum_{i=1}^r \beta_i \cos\rho T_i \prod_{j=1,\, j\neq i}^r \alpha_j \frac{\sin\rho T_j}{\rho}\,, \tag{18}$$

$$\Delta_k^0(\lambda) = \Big((\alpha_0 + \beta_0)\cos\rho T_0 - (\alpha_0\beta_0 + 1)\Big)\alpha_k \cos\rho T_k \prod_{j=1,\, j\neq k}^r \alpha_j \frac{\sin\rho T_j}{\rho} +$$
$$+\alpha_0 \frac{\sin\rho T_0}{\rho}\Big(\beta_k(-\rho\sin\rho T_k)\prod_{j=1,\, j\neq k}^r \alpha_j \frac{\sin\rho T_j}{\rho} + \alpha_k\cos\rho T_k \sum_{i=1,\, i\neq k}^r \beta_i\cos\rho T_i \prod_{j=1,\, j\neq i,k}^r \alpha_j\frac{\sin\rho T_j}{\rho}\Big). \tag{19}$$

Пусть $\tau = \operatorname{Im}\rho$. Из (6)–(8), (10)–(11), (16) и (17) вытекает, что при $|\rho| \to \infty$

$$\begin{gathered}\Delta_0(\lambda) = \Delta_0^0(\lambda) + O\Big(\rho^{-r-1}\exp\Big(|\tau|\sum_{j=0}^r T_j\Big)\Big),\\ \Delta_k(\lambda) = \Delta_k^0(\lambda) + O\Big(\rho^{-r}\exp\Big(|\tau|\sum_{j=0}^r T_j\Big)\Big), \qquad k = \overline{1, r}.\end{gathered} \tag{20}$$

Используя (18)–(20), известным методом (см., напр. [10]), можно получить следующие свойства характеристических функций $\Delta_k(\lambda)$ и собственных значений Λ_k краевых задач $B_k(q)$, $k = \overline{0, r}$.

1) При $\rho \in \Lambda, \ |\rho| \to \infty,$

$$\Delta_0(\lambda) = O\Big(|\rho|^{-r}\exp\Big(|\tau|\sum_{j=0}^r T_j\Big)\Big), \qquad \Delta_k(\lambda) = O\Big(|\rho|^{1-r}\exp\Big(|\tau|\sum_{j=0}^r T_j\Big)\Big), \ k = \overline{1, r}.$$

2) Существуют $h > 0, \ C_h > 0$, такие, что

$$|\Delta_0(\lambda)| \geq C_h|\rho|^{-r}\exp\Big(|\tau|\sum_{j=0}^r T_j\Big), \qquad |\Delta_k(\lambda)| \geq C_h|\rho|^{1-r}\exp\Big(|\tau|\sum_{j=0}^r T_j\Big), \ k = \overline{1, r},$$

при $|\tau| \geq h$. Следовательно, собственные значения $\lambda_{kn} = \rho_{nk}^2$ лежат в полосе $|\operatorname{Im}\rho| < h$.

3) Число $N_{\xi k}$ нулей функции $\Delta_k(\lambda)$ в прямоугольнике $\Pi_\xi = \{\rho : \ |\operatorname{Im}\rho| \leq h, \ \operatorname{Re}\rho \in [\xi, \xi+1]\}$ ограничено по ξ.

4) Обозначим $G_\delta = \{\rho : \ |\rho - \rho_{0n}| \geq \delta \ \ \forall n \geq 0\}$, $\delta > 0$. Тогда

$$|\Delta_0(\lambda)| \geq C_\delta|\rho|^{-r}\exp\Big(|\tau|\sum_{j=0}^r T_j\Big), \qquad \rho \in G_\delta.$$

5) Существуют числа $r_N \to \infty$ такие, что при достаточно малом $\delta > 0$ окружности $|\rho| = r_N$ лежат в G_δ при всех N.

6) При $n \to \infty$

$$\rho_{nk} = \rho^0_{nk} + O\Big(\frac{1}{\rho^0_{nk}}\Big).$$

Исследуем теперь восстановление характеристических функций по их нулям. Обозначим

$$\lambda^{01}_{kn} = \begin{cases} \lambda^0_{kn}, & \text{если} \quad \lambda^0_{kn} \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad \lambda^0_{kn} = 0. \end{cases} \tag{21}$$

По теореме Адамара [11, с. 289] имеем

$$\Delta^0_k(\lambda) = A^0_k \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^0_{kn} - \lambda}{\lambda^{01}_{kn}}\,, \tag{22}$$

где

$$A^0_k = (-1)^{s_k} \Big(\frac{\partial^{s_k}}{\partial \lambda^{s_k}}\, \Delta^0_k(\lambda)\Big)_{|\lambda=0} \tag{23}$$

и $s_k \geq 0$ — кратность нулевого собственного значения.

Покажем, что

$$\Delta_k(\lambda) = A^0_k \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{kn} - \lambda}{\lambda^{01}_{kn}}\,. \tag{24}$$

В самом деле, по теореме Адамара

$$\Delta_k(\lambda) = A_k \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{kn} - \lambda}{\lambda^{1}_{kn}}\,, \tag{25}$$

где $A_k \neq 0$ — константа,

$$\lambda^{1}_{kn} = \begin{cases} \lambda_{kn}, & \text{если} \quad \lambda_{kn} \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad \lambda_{kn} = 0. \end{cases}$$

Из (22) и (25) вытекает, что

$$\frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta^0_k(\lambda)} = \frac{A_k}{A^0_k} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{01}_{kn}}{\lambda^1_{kn}} \prod_{n=0}^{\infty} \Big(1 + \frac{\lambda_{kn} - \lambda^0_{kn}}{\lambda^0_{kn} - \lambda}\Big).$$

Используя свойства характеристических функций и собственных значений, получаем для больших отрицательных λ:

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta^0_k(\lambda)} = 1, \qquad \lim_{\lambda \to -\infty} \prod_{n=0}^{\infty} \Big(1 + \frac{\lambda_{kn} - \lambda^0_{kn}}{\lambda^0_{kn} - \lambda}\Big) = 1,$$

следовательно,

$$A_k = A^0_k \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^1_{kn}}{\lambda^{01}_{kn}}\,.$$

Подставляя это соотношение в (25), приходим к (24).

Таким образом, задание спектра $\Lambda_k = \{\lambda_{kn}\}_{n \geq 0}$ однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta_k(\lambda)$ по формуле (24), где A^0_k и $\{\lambda^{01}_{kn}\}$ определены согласно (21), (23), (18) и (19).

3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 1

В этом разделе мы даем конструктивную процедуру решения обратной задачи 1 и доказываем единственность решения. Сначала мы изучим вспомогательные обратные задачи.

Зафиксируем $k = \overline{1, r}$ и рассмотрим следующую обратную задачу на ребре e_k, которую назовем IP(k).

IP(k). По заданной $M_k(\lambda)$ построить $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, T_k]$.

В обратной задаче IP(k) мы строим потенциал только на ребре e_k. Однако функция Вейля $M_k(\lambda)$ несет глобальную информацию со всего графа. Другими словами, IP(k) не является локальной обратной задачей, относящейся только к ребру e_k. Установим единственность решения задачи IP(k).

Теорема 2. *Если $M_k(\lambda) = \tilde{M}_k(\lambda)$, то $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0, T_k]$. Таким образом, задание функции Вейля M_k однозначно определяет потенциал q_k на ребре e_k.*

Доказательство. Определим матрицу $P^k(x_k, \lambda) = [P^k_{js}(x_k, \lambda)]_{j,s=1,2}$ по формуле

$$P^k(x_k,\lambda)\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{kk}(x_k,\lambda) & \tilde{S}_k(x_k,\lambda) \\ \tilde{\Phi}'_{kk}(x_k,\lambda) & \tilde{S}'_k(x_k,\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{kk}(x_k,\lambda) & S_k(x_k,\lambda) \\ \Phi'_{kk}(x_k,\lambda) & S'_k(x_k,\lambda) \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Тогда (26) дает

$$\begin{gathered} \Phi_{kk}(x_k,\lambda) = P^k_{11}(x_k,\lambda)\tilde{\Phi}_{kk}(x_k,\lambda) + P^k_{12}(x_k,\lambda)\tilde{\Phi}'_{kk}(x_k,\lambda), \\ S_k(x_k,\lambda) = P^k_{11}(x_k,\lambda)\tilde{S}_k(x_k,\lambda) + P^k_{12}(x_k,\lambda)\tilde{S}'_k(x_k,\lambda). \end{gathered} \tag{27}$$

Так как $\langle \Phi_{kk}(x_k,\lambda),\, S_k(x_k,\lambda)\rangle \equiv 1$, то

$$P^k_{1s}(x_k,\lambda) = (-1)^s\Big(\Phi_{kk}(x_k,\lambda)\tilde{S}^{(2-s)}_k(x_k,\lambda) - \tilde{\Phi}^{(2-s)}_{kk}(x_k,\lambda)S_k(x_k,\lambda)\Big). \tag{28}$$

Из (15), (16) и (28) вытекает, что

$$P^k_{1s}(x_k,\lambda) = \delta_{1s} + O(\rho^{-1}), \qquad \rho \in \Lambda^\delta,\ |\rho| \to \infty,\ x_k \in (0, T_k]. \tag{29}$$

Согласно (4) и (28) имеем

$$P^k_{1s}(x_k,\lambda) = (-1)^s\Big(\Big(C_k(x_k,\lambda)\tilde{S}^{(2-s)}_k(x_k,\lambda) - \tilde{C}^{(2-s)}_k(x_k,\lambda)S_k(x_k,\lambda)\Big)+$$

$$+(M_k(\lambda) - \tilde{M}_k(\lambda))S_k(x_k,\lambda)\tilde{S}^{(2-s)}_k(x_k,\lambda)\Big).$$

Так как $M_k(\lambda) = \tilde{M}_k(\lambda)$, то при каждом фиксированном x_k функции $P^k_{1s}(x_k,\lambda)$ являются целыми по λ порядка 1/2. Вместе с (29) это дает $P^k_{11}(x_k,\lambda) \equiv 1$, $P^k_{12}(x_k,\lambda) \equiv 0$. Подставляя эти соотношения в (27), получаем $\Phi_{kk}(x_k,\lambda) \equiv \tilde{\Phi}_{kk}(x_k,\lambda)$ и $S_k(x_k,\lambda) \equiv \tilde{S}_k(x_k,\lambda)$ при всех x_k и λ, следовательно, $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0, T_k]$. $\square$

Используя метод спектральных отображений [5], можно построить конструктивную процедуру решения обратной задачи IP(k). Здесь мы дадим краткие пояснения; подробнее см. [5]. Возьмем $\tilde{q} = 0$. Тогда $\tilde{S}_k(x_k,\lambda) = \dfrac{\sin\rho x_k}{\rho}$. Положим $\lambda' = \min\limits_{l\geq 0}(\lambda_{0l}, \tilde{\lambda}_{0l})$ и возьмем фиксированное $\delta > 0$. В λ-плоскости рассмотрим контур γ (с обходом против часовой стрелки) вида $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^- \cup \gamma'$, где $\gamma^\pm = \{\lambda:\ \pm\mathrm{Im}\,\lambda = \delta;\ \mathrm{Re}\,\lambda \geq \lambda'\}$, $\gamma' = \{\lambda:\ \lambda - \lambda' = \delta\exp(i\alpha),\ \alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)\}$. При каждом фиксированном $x_k \in [0, T_k]$ функция $S_k(x_k,\lambda)$ является единственным решением линейного интегрального уравнения:

$$S_k(x_k,\lambda) = \tilde{S}_k(x_k,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tilde{D}_k(x_k,\lambda,\mu)S_k(x_k,\mu)\,d\mu, \tag{30}$$

где $\tilde{D}_k(x,\lambda,\mu) = \displaystyle\int_0^x \tilde{S}_k(t,\lambda)\tilde{S}_k(t,\mu)\hat{M}_k(\mu)\,dt$, $\hat{M}_k(\mu) = M_k(\mu) - \tilde{M}_k(\mu)$. Потенциал q_k на ребре e_k может быть построен из решения интегрального уравнения (30) по формуле

$$q_k(x_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (S_k(x_k,\lambda)\tilde{S}_k(x_k,\lambda))'\hat{M}_k(\lambda)\,d\lambda$$

или по формуле $q_k(x_k) = \lambda + S''_k(x_k,\lambda)/S_k(x_k,\lambda)$. Также возможно построить потенциал по дискретным спектральным данным. Для этого надо вычислить интеграл в (30) по теореме о вычетах и привести (30) к уравнению в пространстве последовательностей; подробнее см. [5].

Рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу на ребре e_0, которую назовем IP(0).

IP(0). По заданным $d(\lambda), h(\lambda), \Omega$ построить $q_0(x_0)$, $x_0 \in [0, T_0]$.

Эта обратная задача изучалась в [12–13] и других работах в несколько другой эквивалентной постановке. Для удобства опишем здесь кратко решение задачи IP(0).

Обозначим $G(\lambda) = \alpha_0 C_0(T_0, \lambda) + \beta_0 S_0'(T_0, \lambda)$. Имеем

$$G(\alpha) = d(\lambda) - \alpha_0 h_0 h(\lambda) + (\alpha_0 \beta_0 + 1). \tag{31}$$

Напомним, что $H(\lambda) = \alpha_0 C_0(T_0, \lambda) - \beta_0 S_0'(T_0, \lambda)$, $\omega_n = \operatorname{sign} H(\nu_n)$, где $\{\nu_n\}_{n\geq 1}$ — нули функции $h(\lambda)$. Ясно, что

$$S_0'(T_0, \nu_n) = \frac{1}{2\beta_0}\Big(G(\nu_n) - H(\nu_n)\Big). \tag{32}$$

Так как $\langle C_0(T_0, \lambda), S_0(T_0, \lambda)\rangle \equiv 1$, то

$$H^2(\lambda) - G^2(\lambda) = -4\alpha_0\beta_0(1 + C_0'(T_0, \lambda)h(\lambda)),$$

следовательно,

$$H(\nu_n) = \omega_n \sqrt{G^2(\nu_n) - 4\alpha_0\beta_0}. \tag{33}$$

Обозначим $\alpha_n = \displaystyle\int_0^{T_0} S_0^2(t, \nu_n)\, dt$. Тогда (см. [4])

$$\alpha_n = \dot{h}(\nu_n) S_0'(T_0, \nu_n), \qquad \dot{h}(\lambda) = \frac{dh(\lambda)}{d\lambda}. \tag{34}$$

Множество $\{\nu_n, \alpha_n\}_{n\geq 1}$ называется спектральными данными called для потенциала q_0. Известно (см. [1–6]), что функция q_0 однозначно строится по спектральным данным $\{\nu_n, \alpha_n\}_{n\geq 1}$. Таким образом, IP(0) решена, и справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Задание $d(\lambda), h(\lambda), \Omega$ однозначно определяет потенциал $q_0(x_0)$ на $[0, T_0]$. Функция q_0 может быть построена по следующему алгоритму.*

Алгоритм 1. Заданы $d(\lambda), h(\lambda), \Omega$.

1) Находим $\{\nu_n\}_{n\geq 1}$ — нули функции $h(\lambda)$.
2) Строим $G(\lambda)$ по формуле (31).
3) Вычисляем $H(\nu_n)$ согласно (33).
4) Находим $S_0'(T_0, \nu_n)$ по формуле (32).
5) Вычисляем $\{\alpha\}_{n\geq 1}$, используя (34).
6) Строим q_0 по спектральным данным $\{\nu_n, \alpha_n\}_{n\geq 1}$, решая классическую обратную задачу Штурма – Лиувилля.

Перейдем теперь к решению обратной задачи 1. Сначала дадим доказательство теоремы 1. Предположим, что $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{0, r}$ и $\Omega = \tilde{\Omega}$. Тогда, согласно результатов пункта 2, имеем

$$\Delta_k(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_k(\lambda), \qquad k = \overline{0, r}.$$

В силу (9) это дает

$$M_k(\lambda) \equiv \tilde{M}_k(\lambda), \qquad k = \overline{1, r}.$$

Применяя теорему 2 при каждом фиксированном $k = \overline{1, r}$, получаем

$$q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k) \text{ п.в. на } [0, T_k], \qquad k = \overline{1, r},$$

следовательно,

$$C_k(x_k, \lambda) \equiv \tilde{C}_k(x_k, \lambda),\ S_k(x_k, \lambda) \equiv \tilde{S}_k(x_k, \lambda), \qquad k = \overline{1, r}, \qquad x_k \in [0, T_k].$$

Учитывая (6) и (10), имеем

$$d(\lambda) = \tilde{d}(\lambda), \qquad h(\lambda) = \tilde{h}(\lambda).$$

Так как $\Omega = \tilde{\Omega}$, то из теоремы 3 вытекает $q_0(x_0) = \tilde{q}_0(x_0)$ п.в. на $[0, T_0]$, и теорема 1 доказана.

Решение обратной задачи 1 может быть построено по следующему алгоритму.

Алгоритм 2. Заданы $\Lambda_k,\ k=\overline{0,r}$ и Ω.

1) Построим $\Delta_k(\lambda),\ k=\overline{0,r}$ по формуле (24), где A_k^0 и $\{\lambda_{kn}^{01}\}$ определены в (21), (23), (18) и (19).

2) Находим $M_k(\lambda),\ k=\overline{1,r}$ по формуле (9).

3) При каждом $k=\overline{1,r}$ решаем задачу IP(k) и находим $q_k(x_k),\ x_k\in[0,T_k]$ на ребре e_k.

4) При каждом $k=\overline{1,r}$ строим $C_k(x_k,\lambda), S_k(x_k,\lambda),\ x_k\in[0,T_k]$.

5) Вычисляем $d(\lambda)$ и $h(\lambda)$, используя (6) и (10).

6) Строим $q_0(x_0),\ x_0\in[0,T_0]$ по $d(\lambda), H(\lambda), \Omega$, используя алгоритм 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 07-01-00003, 07-01-92000-*ННС-а*).

Библиографический список

1. *Марченко В.А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977.

2. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М.: Наука, 1984.

3. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and Inverse Scattering on the Line, Math. Surveys and Monographs. V.28. Amer. Math. Soc. Providence: RI, 1988.

4. *Freiling G., Yurko V.A.* Inverse Sturm – Liouville Problems and their Applications. N.Y.: NOVA Science Publishers, 2001.

5. *Yurko V.A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.

6. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

7. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004.

8. *Yurko V.A.* Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. V. 21. P. 1075–1086.

9. *Naimark M.A.* Linear Differential Operators, 2nd ed., M.: Nauka, 1969; English transl. of 1st ed. P. I, II. N.Y.: Ungar, 1967, 1968.

10. *Bellmann R., Cooke K.* Differential-difference Equations. N.Y.: Academic Press, 1963.

11. *Conway J.B.* Functions of One Complex Variable, 2nd ed. V. I. N.Y.: Springer-Verlag, 1995.

12. *Станкевич И.В.* Об одной обратной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 1. С. 34–37.

13. *Марченко В.А., Островский И.В.* Характеристика спектра оператора Хилла // Мат. сб. 1975. Т. 97. С. 540–606.