УДК 517.984

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОМПАКТНЫХ ГРАФАХ

В.А. Юрко

Саратовский государственный университет,
кафедра математической физики и вычислительной математики
E-mail: yurkova@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для операторов Штурма – Лиувилля на произвольных компактных графах со стандартными условиями склейки во внутренних вершинах. Доказана теорема единственности восстановления потенциалов по спектрам.

Ключевые слова: операторы Штурма – Лиувилля, пространственные сети, обратные спектральные задачи.

Uniqueness of the Solution of the Inverse Problem for Differential Operators on Arbitrary Compact Graphs

V.A. Yurko

Saratov State University,
Chair of Mathematical Physics and Calculus Mathematics
E-mail: yurkova@info.sgu.ru

An inverse spectral problem is studied for Sturm – Liouville operators on arbitrary compact graphs with standard matching conditions in internal vertices. A uniqueness theorem of recovering operator's coefficients from spectra is proved.

Key words: Sturm – Liouville operators, spatial networks, inverse spectral problems.

1. Исследуется нелинейная обратная задача восстановления потенциалов операторов Штурма – Лиувилля на произвольных компактных графах по спектрам. Обратная спектральная задача для дифференциальных операторов на *деревьях* (т. е. на графах без циклов) изучалась в [1–7] и других работах. Для графов с циклами задача становится существенно более сложной. В частности, в работах [8, 9] решена обратная задача для графов, имеющих только один цикл. В данной статье исследуются компактные графы общего вида с произвольным числом циклов. Доказана теорема единственности решения обратной задачи по спектрам. Отметим, что обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов на *интервале* достаточно подробно представлены в монографиях [10–16].

Рассмотрим компактный связный граф G в $\mathbf{R}^\ell$ с множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_s\}$, с множеством вершин $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_m\}$ и с отображением σ, которое каждому ребру $e_j \in \mathcal{E}$ ставит в соответствие упорядоченную пару (возможно равных) вершин: $\sigma(e_j) := [u_{2j-1}, u_{2j}]$, $u_j \in \mathcal{V}$. Вершины $u_{2j-1} =: \sigma^-(e_j)$ и $u_{2j} =: \sigma^+(e_j)$ называются *начальной* и *конечной* вершинами e_j соответственно. Будем говорить, что ребро e_j *начинается* в точке u_{2j-1} и *заканчивается* в u_{2j}. Точки $U := \{u_j\}_{j=\overline{1,2s}}$ называются *концевыми* для $\mathcal{E}$. Каждая вершина $v \in \mathcal{V}$ порождает класс эквивалентности (который обозначается тем же символом v): $v = \{u_{j_1}, \dots, u_{j_\nu}\}$ так, что $v = u_{j_1} = \ldots = u_{j_\nu}$. Другими словами, множество U разделяется на m классов эквивалентности $v_1, \dots, v_m$. Число концевых точек в классе v_k называется *валентностью* вершины v_k и обозначается $val\,(v_k)$. Вершина $v_k \in \mathcal{V}$ называется *граничной*, если $val\,(v_k) = 1$. Остальные вершины называются *внутренними*. Пусть $\mathcal{V}_0 = \{v_1, \dots, v_p\}$ — граничные вершины, а $\mathcal{V}_1 = \{v_{p+1}, \dots, v_m\}$ — внутренние вершины. Ребро e_j называется *граничным*, если одна из его концевых точек лежит в $\mathcal{V}_0$. Остальные ребра называются внутренними. Пусть $\mathcal{E}_0 = \{e_1, \dots, e_p\}$ — граничные ребра и $v_k \in e_k$ при $k = \overline{1,p}$. Ребро $e_k \in \mathcal{E}$ называется *примыкающим* к $v \in \mathcal{V}$, если $v \in e_k$. Через $R(v, G)$ обозначим множество ребер графа G, примыкающих к v. Пусть l_j — длина ребра e_j. Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$ так, что начальная точка u_{2j-1} соответствует $x_j = 0$, а конечная точка u_{2j} соответствует $x_j = l_j$.

Цепочка ребер $\{e_{\nu_1}, \dots, e_{k,\nu_\eta}\}$ называется *циклом*, если она образует замкнутую кривую. Ребро $e_j \in \mathcal{E}$ называется *простым*, если оно не является частью цикла. В частности, все граничные ребра $e_1, \dots, e_p$ являются простыми. Занумеруем ребра следующим образом: $\mathcal{E}_1 = \{e_1, \dots, e_r\}$ — простые ребра, $\mathcal{E}_2 = \{e_{r+1}, \dots, e_s\}$ — ребра, которые образуют множество циклов. Пусть для определенности $p > 1$ (случаи $p = 0$ и $p = 1$ требуют небольших изменений; см. замечание в конце статьи). Возьмем граничную вершину v_p в качестве корня. Соответствующее ребро e_p будем называть *корневым*. Для определенности условимся, что если $e_j \in \mathcal{E}_1$ — простое ребро, то u_{2j} расположена ближе к корню, чем u_{2j-1}. Стягивая каждый цикл в точку, получим новый граф G^* с множеством ребер $\mathcal{E}_1$. Ясно, что G^* — дерево (т. е. граф без циклов). Зафиксируем $e_k \in G^*$. Наименьшее число ω_k ребер G^* между корневым ребром и e_k (включая e_k) называется *порядком* ребра e_k. Порядок корневого ребра равен нулю. Число $\omega := \max\limits_{e_k \in G^*} \omega_k$ называется порядком G^*. Пусть $\mathcal{E}^{(\mu)}$, $\mu = \overline{0, \omega}$ — множество простых ребер порядка μ.

2. Интегрируемая функция Y на G имеет вид $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,s}}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, l_j]$ определена на ребре e_j. Обозначим $Y_{|u_{2j-1}} := y_j(0)$, $Y_{|u_{2j}} := y_j(l_j)$, $\partial Y_{|u_{2j-1}} := y_j'(0)$, $\partial Y_{|u_{2j}} := -y_j'(l_j)$. Если $v \in \mathcal{V}$, то $Y_{|v} = 0$ означает, что $Y_{|u_j} = 0$ для всех $u_j \in v$. Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{1,s}}$ — интегрируемая вещественная функция на G; q называется потенциалом. Рассмотрим дифференциальное уравнение на G:

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j) y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \qquad x_j \in [0, l_j], \tag{1}$$

где $j = \overline{1,s}$, λ — спектральный параметр, функции y_j, y_j', $j = \overline{1,s}$ абсолютно непрерывны на $[0, l_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки (УС) в каждой внутренней вершине $v_\xi \in \mathcal{V}_1$:

$$Y_{|u_i} = Y_{|u_j} \quad \text{для всех} \quad u_i,\ u_j \in v_\xi, \qquad \sum_{u_i \in v_\xi} \partial Y_{|u_i} = 0. \tag{2}$$

УС (2) называются стандартными УС. Зафиксируем $e_k \in \mathcal{E}_2$ и $\varepsilon_k = 0 \vee 1$. Положим $w_k := u_{2k-\varepsilon_k}$. Если (2) верно для множества $U \setminus \{w_k\}$, то будем называть эти условия w_k-УС. Рассмотрим краевую задачу $L_0(G)$ для уравнения (1) с УС (2) во внутренних вершинах $\mathcal{V}_1$ и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах $\mathcal{V}_0$:

$$Y_{|v_j} = 0, \qquad j = \overline{1,p}. \tag{3}$$

Рассмотрим также краевые задачи $L_k(G)$, $k = \overline{1, p-1}$, для уравнения (1) с УС (2) и с краевыми условиями $\partial Y_{|v_k} = 0$, $Y_{|v_j} = 0$, $j = \overline{1,p} \setminus k$. Таким образом, $L_k(G)$ получается из $L_0(G)$ заменой краевого условия Дирихле в вершине $v_k = \sigma^-(e_k)$ на условия Неймана в v_k. Обозначим $\Lambda_k = \{\lambda_{kn}\}_{n \ge 1}$, $k = \overline{0, p-1}$ — собственные значения (с учетом кратностей) задач $L_k(G)$. Пусть $L_\nu^\xi(G)$, $\xi = \overline{r+1, s}$, $\nu = 0, 1$ — краевые задачи для уравнения (1) с w_ξ-УС и с краевыми условиями $\partial^\nu Y_{|w_\xi} = 0$, $Y_{|v_j} = 0$, $j = \overline{1,p}$, где $\partial^0 Y := Y$, $\partial^1 Y := \partial Y$. Через $\Lambda_\nu^\xi = \{\lambda_{\nu n}^\xi\}_{n \ge 1}$ обозначим собственные значения (с учетом кратностей) задач $L_\nu^\xi(G)$. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. *Даны спектры* Λ_k, $k = \overline{0, p-1}$, Λ_ν^ξ, $\xi = \overline{r+1, s}$, $\nu = 0, 1$, *построить потенциал* q *на* G.

Эта обратная задача является обобщением классических обратных задач для операторов Штурма – Лиувилля на *интервале* и на *деревьях*. Основным результатом статьи является теорема единственности решения обратной задачи 1. Для формулировки теоремы условимся, что наряду с q рассмотрим потенциал $\tilde{q}$. Везде в дальнейшем считаем, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к q, то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{q}$.

Теорема 1. *Если* $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{0, p-1}$, $\Lambda_\nu^\xi = \tilde{\Lambda}_\nu^\xi$, $\xi = \overline{r+1, s}$, $\nu = 0, 1$, *то* $q = \tilde{q}$.

Эта теорема будет доказана в пункте 5. В п. 3–4 вводятся основные понятия и доказываются вспомогательные утверждения.

3. Пусть $S_j(x_j, \lambda)$, $C_j(x_j, \lambda)$, $j = \overline{1,s}$, $x_j \in [0, l_j]$ — решения уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях $S_j(0, \lambda) = C_j'(0, \lambda) = 0$, $S_j'(0, \lambda) = C_j(0, \lambda) = 1$. При каждом фиксированном $x_j \in [0, l_j]$ функции $S_j^{(\nu)}(x_j, \lambda)$, $C_j^{(\nu)}(x_j, \lambda)$, $j = \overline{1,s}$, $\nu = 0, 1$ являются целыми по λ порядка 1/2, причем $\langle C_j(x_j, \lambda),\ S_j(x_j, \lambda) \rangle \equiv 1$, где $\langle y, z \rangle := y z' - y' z$ — вронскиан функций y и z. Пусть $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,s}}$ — решение уравнения (1) на G. Тогда

$$y_j(x_j, \lambda) = a_{j1}(\lambda) C_j(x_j, \lambda) + a_{j2}(\lambda) S_j(x_j, \lambda), \qquad j = \overline{1,s}, \tag{4}$$

где $a_{j1}(\lambda)$ и $a_{j2}(\lambda)$ не зависят от x_j. Подставляя (4) в (2) и (3), получаем линейную алгебраическую систему s_0 относительно $a_{j1}(\lambda)$, $a_{j2}(\lambda)$, $j = \overline{1,s}$. Определитель $\Delta_0(\lambda, G)$ системы s_0 является целой функцией порядка 1/2. Нули $\Delta_0(\lambda, G)$ совпадают с собственными значениями задачи $L_0(G)$. Функция $\Delta_0(\lambda, G)$ называется *характеристической функцией* для $L_0(G)$. Аналогично определяются характеристические функции $\Delta_k(\lambda, G)$, $k = \overline{1, p-1}$ для задач $L_k(G)$. Так как $x_k = 0$ в вершине v_k, то $\Delta_k(\lambda, G)$ получается из $\Delta_0(\lambda, G)$ заменой $S_k^{(\nu)}(l_k, \lambda)$, $\nu = 0, 1$ на $C_k^{(\nu)}(l_k, \lambda)$. Через $\Delta_\nu^\xi(\lambda, G)$ обозначим характеристическую функцию задачи $L_\nu^\xi(G)$.

Пусть e_k, $k = \overline{p, r}$ — фиксированное простое ребро графа G и пусть $v = \sigma^-(e_k) \in \mathcal{V}$ — начальная точка ребра e_k. Вершина v делит граф G на две части: $G = Q \cup \hat{G}$, где $Q \cap \hat{G} = v$, $\hat{G} \cap R(v, G) = e_k$. Рассмотрим краевую задачу $L_0(Q, v)$ для уравнения (1) на Q с УС (2) для $v_\xi \in \mathcal{V}_1 \setminus \{v\}$ и с краевыми условиями $Y_{|v_j} = 0$, $v_j \in \mathcal{V}_0 \cup \{v\}$. Пусть $\Delta(\lambda, Q, v)$ — характеристическая функция задачи $L_0(Q, v)$. Разлагая определитель $\Delta_0(\lambda, G)$ системы s_0 по столбцам, соответствующим $a_{j1}(\lambda)$ и $a_{j2}(\lambda)$ для $e_j \in \hat{G}$,, получаем следующие соотношения.

Случай 1. Пусть v — внутренняя вершина для Q. Тогда

$$\Delta_0(\lambda, G) = \Delta_0(\lambda, \hat{G})\Delta_0(\lambda, Q) + \Delta_k(\lambda, \hat{G})\Delta_0(\lambda, Q, v). \tag{5}$$

Аналогично

$$\Delta_j(\lambda, G) = \Delta_0(\lambda, \hat{G})\Delta_j(\lambda, Q) + \Delta_k(\lambda, \hat{G})\Delta_j(\lambda, Q, v), \qquad e_j \in \mathcal{E}_0 \cap Q. \tag{6}$$

Случай 2. Пусть v — граничная вершина для Q, т. е. $R(v, Q) =: e_i \in \mathcal{E}_1$ состоит из одного простого ребра e_i, и $v = \sigma^+(e_i)$. Тогда

$$\Delta_0(\lambda, G) = \Delta_0(\lambda, \hat{G})\Delta_i(\lambda, Q) + \Delta_k(\lambda, \hat{G})\Delta_0(\lambda, Q). \tag{7}$$

Аналогично

$$\Delta_j(\lambda, G) = \Delta_0(\lambda, \hat{G})\Delta_{ij}(\lambda, Q) + \Delta_k(\lambda, \hat{G})\Delta_j(\lambda, Q), \qquad e_j \in \mathcal{E}_0 \cap Q. \tag{8}$$

Здесь $\Delta_{ij}(\lambda, Q)$ — характеристическая функция краевой задачи $L_{ij}(Q)$, которая получается из $L_0(Q)$ заменой граничных условий Дирихле в граничных вершинах $\sigma^-(e_j)$ и $\sigma^+(e_i)$ на условия Неймана. Поэтому $\Delta_{ij}(\lambda, Q)$ получается из $\Delta_0(\lambda, Q)$ заменой $S_j^{(\nu)}(l_j, \lambda)$, $\nu = 0, 1$ на $C_j^{(\nu)}(l_j, \lambda)$ и заменой $S_i(l_i, \lambda)$, $C_i(l_i, \lambda)$ на $S_i'(l_i, \lambda)$, $C_i'(l_i, \lambda)$ соответственно.

Зафиксируем $k = \overline{1, p-1}$. Пусть $\Phi_k = \{\Phi_{kj}\}_{j=\overline{1,s}}$ — решение уравнения (1) на G, удовлетворяющее УС (2) и граничным условиям

$$\Phi_{k|v_j} = \delta_{kj}, \qquad j = \overline{1, p}, \tag{9}$$

где δ_{kj} — символ Кронекера. Положим $M_k(\lambda) := \partial\Phi_{k|v_k} = \Phi_{kk}'(0, \lambda)$. Функция $M_k(\lambda)$ называется функцией Вейля относительно граничного ребра e_k.

Обозначим $M_{kj}^0(\lambda) = \Phi_{kj}'(0, \lambda)$, $M_{kj}^1(\lambda) = \Phi_{kj}(0, \lambda)$, $j = \overline{1, s}$. Тогда

$$\Phi_{kj}(x_j, \lambda) = M_{kj}^1(\lambda)C_j(x_j, \lambda) + M_{kj}^0(\lambda)S_j(x_j, \lambda), \qquad j = \overline{1, s}. \tag{10}$$

В частности, $M_{kk}^0(\lambda) = M_k(\lambda)$, $M_{kk}^1(\lambda) = 1$,

$$\Phi_{kk}(x_k, \lambda) = C_k(x_k, \lambda) + M_k(\lambda)S_k(x_k, \lambda), \tag{11}$$

и, следовательно,

$$\langle \Phi_{kk}(x_k, \lambda),\, S_k(x_k, \lambda)\rangle \equiv 1. \tag{12}$$

Подставляя (10) в (2) и (9), получаем линейную алгебраическую систему s_k относительно $M_{kj}^0(\lambda), M_{kj}^1(\lambda)$, $j = \overline{1, s}$. Определитель системы s_k есть $\Delta_0(\lambda, G)$. Решая систему s_k по формулам Крамера, получаем $M_{kj}^\nu(\lambda) = \Delta_{kj}^\nu(\lambda, G)/\Delta_0(\lambda, G)$, $\nu = 0, 1$, $j = \overline{1, s}$, где определитель $\Delta_{kj}^\nu(\lambda, G)$ получается из $\Delta_0(\lambda, G)$ заменой столбца, соответствующего $M_{kj}^\nu(\lambda)$, на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\lambda) = -\frac{\Delta_k(\lambda, G)}{\Delta_0(\lambda, G)}, \qquad k = \overline{1, p-1}, \tag{13}$$

где $\Delta_k(\lambda, G)$ — характеристическая функция задачи $L_k(G)$. Из (13) следует, что функции Вейля $M_k(\lambda)$ являются мероморфными по λ с множеством полюсов Λ_0 и множеством нулей Λ_k.

Пусть $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Im}\rho \geq 0$. Обозначим $\Lambda := \{\rho : \operatorname{Im}\rho \geq 0\}$, $\Lambda^\delta := \{\rho : \arg\rho \in [\delta, \pi - \delta]\}$. При каждом фиксированном $x_k \in [0, l_k)$ имеем

$$\Phi_{kk}^{(\nu)}(x_k,\lambda)=(i\rho)^\nu\exp(i\rho x_k)[1],\qquad \rho\in\Lambda^\delta,\ |\rho|\to\infty. \tag{14}$$

Кроме того, равномерно по $x_j\in[0,l_j]$

$$\left.\begin{aligned} S_j^{(\nu)}(x_j,\lambda)&=\frac{1}{2i\rho}\Big((i\rho)^\nu\exp(i\rho x_j)[1]-(-i\rho)^\nu\exp(-i\rho x_j)[1]\Big),\ \rho\in\Lambda,\ |\rho|\to\infty,\\ C_j^{(\nu)}(x_j,\lambda)&=\frac{1}{2}\Big((i\rho)^\nu\exp(i\rho x_j)[1]+(-i\rho)^\nu\exp(-i\rho x_j)[1]\Big),\ \rho\in\Lambda,\ |\rho|\to\infty.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Пусть $\lambda_{kn}^0=(\rho_{kn}^0)^2$, $n\ge1$ — собственные значения краевой задачи $L_k(G)$ с нулевым потенциалом $q=0$. Эту краевую задачу будем обозначать $L_k^0(G.)$ Пусть $\Delta_k^0(\lambda,G)$ — характеристическая функция задачи $L_k^0(G)$. Ясно, что $\Delta_k^0(\lambda,G)$ имеет тот же вид, что и $\Delta_k(\lambda,G)$, но с $S_j(x_j,\lambda)\equiv\dfrac{\sin\rho x_j}{\rho}$, $C_j(x_j,\lambda)\equiv\cos\rho x_j$, $j=\overline{1,s}$. Известным методом (см., например, [17, 18]), можно получить следующие свойства характеристических функций и собственных значений задач $L_k(G)$.

1. Существует $h>0$ такое, что числа $\lambda_{kn}=\rho_{kn}^2$ лежат в полосе $|\mathrm{Im}\,\rho|<h$.

2. Число $N_{\xi k}$ нулей $\Delta_k(\lambda,G)$ в прямоугольнике $\Pi_\xi=\{\rho:\ |\mathrm{Im}\,\rho|\le h,\ \mathrm{Re}\,\rho\in[\xi,\xi+1]\}$ ограничено по ξ.

3. При $\rho\in\Lambda^\delta$, $|\rho|\to\infty$, $\Delta_k(\lambda,G)=\Delta_k^0(\lambda,G)(1+O(\rho^{-1}))$.

4. При $n\to\infty$, $\rho_{kn}=\rho_{kn}^0+O\Big((\rho_{kn}^0)^{-1}\Big)$.

Характеристические функции $\Delta_\nu^\xi(\lambda,G)$ имеют аналогичные свойства. Рассмотрим теперь восстановление характеристических функций по их нулям. Обозначим

$$\mu_{kn}^0=\begin{cases}\lambda_{kn}^0, & \text{если}\quad \lambda_{kn}^0\ne0,\\ 1, & \text{если}\quad \lambda_{kn}^0=0.\end{cases},\qquad \mu_{kn}=\begin{cases}\lambda_{kn}, & \text{если}\quad \lambda_{kn}\ne0,\\ 1, & \text{если}\quad \lambda_{kn}=0.\end{cases}$$

Используя факторизационную теорему Адамара [19, с. 289] и свойства характеристических функций, можно показать, что задание спектра $\Lambda_k=\{\lambda_{kn}\}_{n\ge1}$ однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta_k(\lambda,G)$ по формуле

$$\Delta_k(\lambda,G)=A_k^0\prod_{n=1}^\infty\frac{\lambda_{kn}-\lambda}{\mu_{kn}^0},\qquad A_k^0=(-1)^{s_k}\frac{1}{s_k!}\Big(\frac{\partial^{s_k}}{\partial\lambda^{s_k}}\,\Delta_k^0(\lambda,G)\Big)_{|\lambda=0},$$

где $s_k\ge0$ — кратность нулевого собственного значения $L_k^0(G)$. Аналогично задание спектра $\Lambda_\nu^\xi=\{\lambda_{\nu n}^\xi\}_{n\ge1}$ однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta_\nu^\xi(\lambda,G)$.

4. Зафиксируем $k=\overline{1,p-1}$ и рассмотрим следующую обратную задачу на ребре e_k, которую назовем $IP(e_k,G)$.

$IP(e_k,G)$. *Даны $\Delta_0(\lambda,G)$ и $\Delta_k(\lambda,G)$, построить потенциал q на e_k.*

В обратной задаче $IP(e_k,G)$ мы строим потенциал только на ребре e_k, но характеристические функции $\Delta_0(\lambda,G)$ и $\Delta_k(\lambda,G)$ несут глобальную информацию со всего графа.

Докажем теорему единственности для задачи $IP(e_k,G)$.

Теорема 2. *Зафиксируем $k=\overline{1,p-1}$. Если $\Delta_0(\lambda,G)\equiv\tilde\Delta_0(\lambda,G)$ и $\Delta_k(\lambda,G)\equiv\tilde\Delta_k(\lambda,G)$, то $q_k(x_k)=\tilde q_k(x_k)$ п.в. на $[0,l_k]$. Таким образом, задание двух характеристических функций однозначно определяет потенциал q_k на ребре e_k.*

Доказательство. В силу (13) имеем $M_k(\lambda)\equiv\tilde M_k(\lambda)$. Рассмотрим функции

$$\left.\begin{aligned} P_{k1}(x_k,\lambda)&=\Phi_{kk}(x_k,\lambda)\tilde S_k'(x_k,\lambda)-\tilde\Phi_{kk}'(x_k,\lambda)S_k(x_k,\lambda),\\ P_{k2}(x_k,\lambda)&=\tilde\Phi_{kk}(x_k,\lambda)S_k(x_k,\lambda)-\Phi_{kk}(x_k,\lambda)\tilde S_k(x_k,\lambda).\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Из (14)–(16) вытекает, что

$$P_{ks}(x_k,\lambda)=\delta_{1s}+O(\rho^{-1}),\qquad \rho\in\Lambda^\delta,\ |\rho|\to\infty,\ x_k\in(0,l_k], \tag{17}$$

где δ_{ks} — символ Кронекера. Используя (16), вычисляем

$$P_{k1}(x_k,\lambda)\tilde{S}_k(x_k,\lambda)+P_{k2}(x_k,\lambda)\tilde{S}'_k(x_k,\lambda)=S_k(x_k,\lambda)\Big(\tilde{\Phi}_{kk}(x_k,\lambda)\tilde{S}'_k(x_k,\lambda)-\tilde{\Phi}'_{kk}(x_k,\lambda)\tilde{S}_k(x_k,\lambda)\Big).$$

Учитывая (12), выводим

$$S_k(x_k,\lambda)=P_{k1}(x_k,\lambda)\tilde{S}_k(x_k,\lambda)+P_{k2}(x_k,\lambda)\tilde{S}'_k(x_k,\lambda). \tag{18}$$

Подставляя (11) в (16), получаем

$$P_{k1}(x_k,\lambda)=C_k(x_k,\lambda)\tilde{S}'_k(x_k,\lambda)-\tilde{C}'_k(x_k,\lambda)S_k(x_k,\lambda)+(M_k(\lambda)-\tilde{M}_k(\lambda))S_k(x_k,\lambda)\tilde{S}'_k(x_k,\lambda),$$

$$P_{k2}(x_k,\lambda)=\tilde{C}_k(x_k,\lambda)S_k(x_k,\lambda)-C_k(x_k,\lambda)\tilde{S}_k(x_k,\lambda)-(M_k(\lambda)-\tilde{M}_k(\lambda))S_k(x_k,\lambda)\tilde{S}_k(x_k,\lambda).$$

Так как $M_k(\lambda)\equiv\tilde{M}_k(\lambda)$, то при каждом фиксированном x_k функции $P_{ks}(x_k,\lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/2$. Вместе с (17) это дает $P_{k1}(x_k,\lambda)\equiv 1$, $P_{k2}(x_k,\lambda)\equiv 0$. Подставляя эти соотношения в (18), получаем $S_k(x_k,\lambda)\equiv\tilde{S}_k(x_k,\lambda)$ при всех x_k и λ, и, следовательно, $q_k(x_k)=\tilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0,l_k]$. □

Зафиксируем $\xi=\overline{r+1,s}$. Рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу, которую назовем $IP(e_\xi,G)$.

$IP(e_\xi,G)$. *Даны* $\Delta_0^\xi(\lambda,G)$ *и* $\Delta_1^\xi(\lambda,G)$, *построить потенциал* q *на* e_ξ.

Сдвигая немного концевую точку w_ξ в точку $w_\xi^0\notin G$ (без изменения других концевых точек G и без изменения длины e_ξ), получим вместо графа G граф G^ξ с ребром e_ξ^0 вместо e_ξ. Ребро e_ξ^0 является граничным ребром для G^ξ, а w_ξ^0 — граничная вершина для G^ξ. Тогда обратная задача $IP(e_\xi,G)$ равносильна обратной задаче $IP(e_\xi^0,G^\xi)$. Поэтому задача $IP(e_\xi,G)$, $\xi=\overline{r+1,s}$ решается точно так же, как и задача $IP(e_k,G)$.

Зафиксируем $k=\overline{p,r}$. Пусть $e_k\in\mathcal{E}^{(\mu)}$ — фиксированное простое ребро порядка μ и пусть $v=\sigma^-(e_k)\in\mathcal{V}$ — начальная точка ребра e_k. Вершина v делит граф G на две части $G=Q\cup\hat{G}$, где $Q\cap\hat{G}=v$, $\hat{G}\cap R(v,G)=e_k$. Тогда верны (5)–(6) или (7)–(8). Предположим, что потенциал q известен на Q. Зафиксируем $e_j\in\mathcal{E}_0\cap Q$. Пусть заданы $\Delta_0(\lambda,G)$ и $\Delta_j(\lambda,G)$.

1. Решая алгебраическую систему (5)–(6) или (7)–(8), вычисляем $\Delta_0(\lambda,\hat{G})$ и $\Delta_k(\lambda,\hat{G})$.
2. Решая обратную задачу $IP(e_k,\hat{G})$, строим потенциал q на e_k.

Эта процедура вычисления q на e_k называется *процедурой спуска*.

5. Докажем теперь теорему 1, которая является основным результатом статьи. Пусть $\Lambda_k=\tilde{\Lambda}_k$, $k=\overline{0,p-1}$, $\Lambda_\nu^\xi=\tilde{\Lambda}_\nu^\xi$, $\xi=\overline{r+1,s}$, $\nu=0,1$. Так как задание спектров однозначно определяет их характеристические функции, то получаем $\Delta_k(\lambda,G)\equiv\tilde{\Delta}_k(\lambda,G)$, $k=\overline{0,p-1}$ и $\Delta_\nu^\xi(\lambda,G)\equiv\tilde{\Delta}_\nu^\xi(\lambda,G)$, $\xi=\overline{r+1,s}$, $\nu=0,1$. Далее действуем по следующей схеме:

1) для каждого фиксированного $\xi=\overline{r+1,s}$ применяем теорему единственности решения обратной задачи $IP(e_\xi,G)$ и находим, что $q=\tilde{q}$ на e_ξ;

2) для каждого фиксированного $k=\overline{1,p-1}$ применяем теорему единственности решения обратной задачи $IP(e_k,G)$ и находим, что $q=\tilde{q}$ на e_k;

3) при $\mu=\omega-1,\omega-2,\dots,1,0$ последовательно выполняем следующие операции: для каждого фиксированного простого ребра $e_k\in\mathcal{E}^{(\mu)}$, $p\le k\le r$, пользуясь процедурой спуска, находим, что $q=\tilde{q}$ на e_k. □

Замечание 1. Пусть $p\le 1$ (т.е. $p=0$ или $p=1$). Тогда обратная задача ставится следующим образом: даны спектры Λ_ν^ξ, $\xi=\overline{r+1,s}$, $\nu=0,1$, построить потенциал q на G. Для $p=1$ все вышеприведенные рассуждения и результаты остаются верными; в частности, для доказательства теоремы единственности может быть использована та же схема, но без шага 3. Если $p=0$, $r>0$, то дерево G^* не пусто. Тогда выбираем одну из граничных вершин G^* в качестве корня и повторяем вышеприведенные рассуждения. Если $r=0$, то дерево G^* пусто, и мы опускаем шаг 3 в доказательстве теоремы.

Замечание 2. Доказательство теоремы 1 конструктивно и дает алгоритм построения решения обратной задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 *и* 10-01-92001-*ННС).

Библиографический список

1. *Belishev, M. I.* Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method / M. I. Belishev // Inverse Problems. – 2004. – V. 20. – P. 647–672.
2. *Yurko, V. A.* Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators on graphs / V. A. Yurko // Inverse Problems. – 2005. – V. 21. – P. 1075–1086.
3. *Brown, B. M.* A Borg – Levinson theorem for trees / B. M. Brown, R. Weikard // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. – 2005. V. 461, № 2062. – P. 3231–3243.
4. *Freiling, G.* Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators on noncompact trees / G. Freiling, V.A. Yurko // Results in Mathematics. – 2007. – V. 50. – P. 195–212.
5. *Yurko, V. A.* Recovering differential pencils on compact graphs / V. A. Yurko // J. Diff. Equations. – 2008. – V. 244. – P. 431–443.
6. *Юрко, В. А.* Обратные задачи для дифференциальных операторов произвольных порядков на деревьях / В. А. Юрко // Мат. заметки. – 2008. – Т. 83, вып. 1. – С. 139–152.
7. *Юрко, В. А.* Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов на некомпактных пространственных сетях / В. А. Юрко // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 12. – С. 1658–1666.
8. *Yurko, V. A.* Inverse problems for Sturm – Liouville operators on bush-type graphs / V. A. Yurko // Inverse Problems. – 2009. – V. 25, № 10, 105008. – 14 p.
9. *Юрко, В. А.* Об обратной спектральной задаче для дифференциальных операторов на графе-еже / В. А. Юрко // Докл. АН. – 2009. – Т. 425, № 4. – С. 466–470.
10. *Марченко, В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. – Киев: Наук. думка, 1977. – 331 с.
11. *Левитан, Б. М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля / Б. М. Левитан. – М.: Наука, 1984. – 240 с.
12. *Freiling, G.* Inverse Sturm – Liouville Problems and their Applications / G. Freiling, V. A. Yurko. – N. Y.: NOVA Science Publishers, 2001. – 305 p.
13. *Yurko, V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory / V. A. Yurko. Inverse and Ill-posed Problems Series. – Utrecht: VSP, 2002. – 303 p.
14. *Beals, R.* Direct and Inverse Scattering on the Line / R. Beals, P. Deift, C. Tomei. – Math. Surveys and Monographs. – V. 28. – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1988. – 275 p.
15. *Yurko, V. A.* Inverse Spectral Problems for Differential Operators and their Applications / V. A. Yurko. – Amsterdam: Gordon and Breach, 2000. – 253 p.
16. *Юрко, В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач / В. А. Юрко. – М.: Физматлит, 2007. – 384 с.
17. *Наймарк, М. А.* Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
18. *Bellmann, R.* Differential-difference Equations / R. Bellmann, K. Cooke. – N. Y.: Academic Press, 1963. – 548 p.
19. *Conway, J. B.* Functions of One Complex Variable. 2nd ed., V. I / J.B. Conway. – N. Y.: Springer-Verlag, 1995. – 445 p.