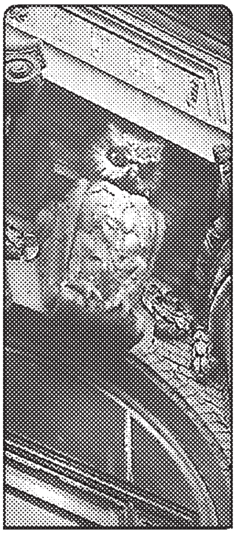

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

Алдашев Серик Аймурзаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный педагогический университет им. Абая, 480012, Казахстан, Алматы, Толе Би, 86, aldash51@mail.ru

Адамар показал, что одна из фундаментальных задач математической физики — изучение поведения колеблющейся струны — некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе области. Как заметили А. В. Бицадзе, А. М. Нахушев, задача Дирихле некорректна (в смысле однозначной разрешимости) не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. Автором ранее изучена задача Дирихле для многомерных гиперболических уравнений, где показана однозначная разрешимость этой задачи, существенно зависящая от высоты рассматриваемой цилиндрической области. В данной статье используется метод, предложенный в ранних работах автора, показана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений. Получен также критерий единственности решения. Предложенный метод позволяет свести изучаемую задачу к задаче Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений, исследованных автором.

Ключевые слова: корректность, задача Дирихле, вырождающихся уравнения, критерия, функция Бесселя.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-244-254

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТ

Теория краевых задач для вырождающихся гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучена [1]. Их многомерные аналоги в пространстве обобщенных функций исследованы в [2, 3].

Классические решения задачи Дирихле для многомерных гиперболо-параболических уравнений изучены в [4, 5].

В данной работе, в отличие от [4, 5], задача Дирихле изучается в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений. Показано, что эта задача имеет единственное классическое решение и получен ее явный вид, а также критерий единственности решения.

В работе используется метод, предложенный в работах [6, 7].

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β — части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_α, Ω_β, представляющая множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающиеся многомерные гиперболо-параболические уравнения:

$$0 = \begin{cases} t^q \Delta_x u - u_t + \sum\limits_{i=1}^{m} d_i(x,t) u_{x_i} + e(x,t) u, & t > 0, \\ |t|^p \Delta_x u - u_{tt} + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $p, q = \text{const}$, $p > 0$, $q \geqslant 0$, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geqslant 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$, $i = 1, 2, \ldots, m-2$, $0 \leqslant \theta_{m-1} < 2\pi$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$.

Задача 1 (Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\overline{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u\Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r, \theta), \qquad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta), \qquad u\Big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r, \theta), \tag{3}$$

при этом $\varphi_1(1, \theta) = \psi_1(\alpha, \theta)$, $\varphi_2(1, \theta) = \psi_2(\beta, \theta)$, $\psi_1(0, \theta) = \psi_2(0, \theta)$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \ldots$ — пространства Соболева.

Имеет место [8]

Лемма 1. *Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geqslant m-1$, то ряд*

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. *Для того чтобы* $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (1) *удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)|\leqslant c_1,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f_n^k(r)|^2\leqslant c_2,\qquad c_1,\,c_2=\mathrm{const}.$$

Через $\widetilde{d}_{in}^k(r,t)$, $d_{in}^k(r,t)$, $\widetilde{e}_n^k(r,t)$, $\widetilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\overline{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\overline{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\psi_{1n}^k(t)$, $\psi_{2n}^k(t)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (1), соответственно функций $d_i(r,\theta,t)\rho$, $d_i\frac{x_i}{r}\rho$, $e(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i=1,\ldots,m$, $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$, причем $\rho(\theta)\in C^\infty(H)$, $H-$ единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t)\in W_2^l(\Omega_\beta)\subset C(\bar{\Omega}_\beta)$, $d_i(r,\theta,t)$, $e(r,\theta,t)\in W_2^l(\Omega_\alpha)$, $i=1,\ldots,m$, $l\geqslant m+1$, $e(r,\theta,t)\leqslant 0$ для всех $(r,\theta,t)\in\Omega_\alpha$.

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если* $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)\in W_2^p(S)$, $\psi_1(t,\theta)\in W_2^p(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta)\in W_2^p(\Gamma_\beta)$, $p>3m/2$ *и*

$$\cos\mu_{s,n}\beta'\neq 0,\qquad s=1,2,\ldots,\tag{4}$$

то задача 1 *однозначно разрешима, где* $\mu_{s,n}$ — *положительные нули функций Бесселя первого рода* $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$, $\beta'=\frac{2}{2+p}|\beta|^{(2+p)/2}$.

Теорема 2. *Решение задачи* 1 *единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие* (4).

2. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ 1

Сначала покажем разрешимость задачи (1), (2). В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_α имеет вид

$$L_1u\equiv t^q\Big(u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u\Big)-u_t+\sum_{i=1}^{m}d_i(r,\theta,t)u_{x_i}+e(r,\theta,t)u=0,\tag{5}$$

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$g_1=1,\qquad g_j=(\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{j-1})^2,\qquad j>1.$$

Известно [8], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n=n(n+m-2)$, $n=0,1,\ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 в области Ω_α будем искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta),\tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), умножив полученное выражение на $\rho(\theta)\neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\overline{u}_n^k$ получим [4, 5]

$$t^q\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\bar{u}_{0t}^1+\left(\frac{m-1}{r}t^q\rho_0^1+\sum_{i=1}^{m}d_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1+\tilde{e}_0^1\bar{u}_0^1+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{t^q\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{nt}^k+\left(\frac{m-1}{r}t^q\rho_n^k+\sum_{i=1}^m d_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k+\right.$$

$$\left.+\left[\tilde{e}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}t^q+\sum_{i=1}^m(\tilde{d}_{in-1}^k-nd_{in}^k)\right]\bar{u}_n^k\right\}=0. \qquad (7)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений:

$$t^q\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\bar{u}_{0t}^1+\frac{(m-1)}{r}t^q\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1=0, \qquad (8)$$

$$t^q\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k-\rho_1^k\bar{u}_{1t}^k+\frac{(m-1)}{r}t^q\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}t^q\rho_1^k\bar{u}_1^k=-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m d_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1+\tilde{e}_0^1\bar{u}_0^1\right), \qquad (9)$$

$$n=1, \qquad k=\overline{1,\,k_1},$$

$$t^q\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{nt}^k+\frac{(m-1)}{r}t^q\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}t^q\rho_n^k\bar{u}_n^k=-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m d_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k+\right.$$

$$\left.+\left[\tilde{e}_{n-1}^k+\sum_{i=1}^m(\tilde{d}_{in-2}^k-(n-1)d_{in-1}^k)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\}, \qquad k=\overline{1,\,k_n}, \qquad n=2,3\ldots. \qquad (10)$$

Суммируя уравнение (9) от 1 до k_1, а уравнение (10) — от 1 до k_n, затем сложив полученные выражения вместе с (8), приходим к уравнению (7).

Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots$, — решение системы (8)–(10), то оно является решением уравнения (7).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)–(10) можно представить в виде

$$t^q\left(\bar{u}_{nrr}^k+\frac{(m-1)}{r}\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k\right)-\bar{u}_{nt}^k=\bar{f}_n^k(r,t), \qquad (11)$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, причем $\bar{f}_0^1(r,t)\equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (6) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha)=\bar{\varphi}_{1n}^k(r), \qquad \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_{1n}^k(t), \qquad k=\overline{1,k_n}, \qquad n=0,1,\ldots. \qquad (12)$$

В (11), (12), произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\psi_{1n}^k(t)$, получим

$$t^q\left(\bar{\upsilon}_{nrr}^k+\frac{(m-1)}{r}\bar{\upsilon}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\upsilon}_n^k\right)-\bar{\upsilon}_{nt}^k=f_n^k(r,t), \qquad (13)$$

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,\alpha)=\varphi_{1n}^k(r), \qquad \bar{\upsilon}_n^k(1,t)=0, \qquad k=\overline{1,k_n}, \qquad n=0,1,\ldots, \qquad (14)$$

$$f_n^k(r,t)=\bar{f}_n^k(r,t)+\psi_{1nt}^k+\frac{\lambda_n t^q}{r^2}\psi_{1n}^k, \qquad \varphi_{1n}^k(r)=\bar{\varphi}_{1n}^k(r)-\psi_{1n}^k(\alpha).$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$, задачу (13), (14) приведем к следующей задаче:

$$L\upsilon_n^k\equiv t^q\left(\upsilon_{nrr}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k\right)-\upsilon_{nt}^k=\tilde{f}_n^k(r,t), \qquad (15)$$

$$\upsilon_n^k(r,\alpha)=\tilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \upsilon_n^k(1,t)=0, \qquad (16)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m)-4\lambda_n}{4}, \quad \widetilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} f_n^k(r,t), \quad \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \varphi_{1n}^k(r).$$

Решение задачи (15), (16) ищем в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t), \tag{17}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k = \widetilde{f}_n^k(r,t), \tag{18}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\alpha) = 0, \qquad \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{19}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k = 0, \tag{20}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\alpha) = \tilde{\varphi}_{1n}^k(r), \qquad \upsilon_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{21}$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \tag{22}$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) R_s(r), \qquad \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} R_s(r). \tag{23}$$

Подставляя (22) в (18), (19), с учетом (23) получим

$$R_{srr} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \qquad 0 < r < 1, \tag{24}$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \tag{25}$$

$$T_{st} + \mu t^q T_s = -a_{s,n}(t), \quad 0 < t < \alpha, \tag{26}$$

$$T_s(\alpha) = 0. \tag{27}$$

Ограниченным решением задачи (24), (25) является [9]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{28}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (26), (27) является

$$T_{s,n}(t) = \left(\exp(-\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} t^{q+1})\right) \int_t^\alpha a_{s,n}(\xi) \left(\exp \frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} \xi^{q+1}\right) d\xi. \tag{29}$$

Подставляя (28) в (23) получим

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad r^{-1/2} \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \tag{30}$$

Ряды (30) — разложения в ряды Фурье – Бесселя [10], если

$$a_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{f}_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{31}$$

$$b_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{32}$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \ldots$, — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (22), (28), (29) получим решение задачи (18), (19)

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{33}$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяются из (31).

Далее, подставляя (22) в (20), (21), с учетом (23) будем иметь задачу

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 t^q T_s = 0, \qquad 0 < t < \alpha, \qquad T_{s,n}(\alpha) = b_{s,n}^k,$$

решением которой является

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n} \exp \frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} (\alpha^{q+1} - t^{q+1}). \tag{34}$$

Из (28), (34) будем иметь

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} \sqrt{r} (\exp \frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} (\alpha^{q+1} - t^{q+1}) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{35}$$

где $b_{s,n}$ находятся из (32).

Следовательно, сначала, решив задачу (8), (12) $(n = 0)$, а затем (9), (12) $(n = 1)$ и т. д., найдем последовательно все $\upsilon_n^k(r,t)$ из (17), где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (33) и (35).

Итак, в области Ω_β имеет место

$$\int\limits_H \rho(\theta) L_1 u \, dH = 0. \tag{36}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 — плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ — плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$, V_1 — плотна в $L_2((0,\alpha))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ — плотна в $L_2(\Omega_\alpha)$ [11].

Отсюда и из (36) следует, что $\int\limits_{\Omega_\alpha} f(r,\theta,t) L_1 u \, d\Omega_\alpha = 0$ и $L_1 u = 0$ для всех $(r,\theta,t) \in \Omega_\alpha$.

Таким образом, решением задачи (1), (2) в области Ω_α является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{1n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} \left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{37}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ находятся из (33), (35).

Учитывая формулу [10] $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, оценки [8, 12]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \qquad \nu \geqslant 0,$$

$$k_n \leqslant c_1 n^{m-2}, \qquad \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta)\right| \leqslant c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \qquad j = \overline{1, m-1}, \qquad q = 0, 1, \dots ,$$

а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\psi_1(t,\theta)$, $\varphi_1(t,\theta)$, так же как в [4,5], можно доказать, что полученное решение (37) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$.

Далее, из (33), (35), (37) при $t \to +0$ имеем

$$u(r,\theta,0) = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{38}$$

$$\tau_n^k(r) = \psi_{1n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} \left[\int_0^\alpha a_{s,n}(\xi) \left(\exp \frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} \xi^{q+1}\right) d\xi + \right.$$

$$\left. + b_{s,n} \left(\exp \frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} \alpha^{q+1}\right)\right] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_s r).$$

Из (31)–(35), а также из лемм вытекает, что $\tau(r,\theta) \in W_2^l(S)$, $l > 3m/2$.

Таким образом, учитывая краевые условия (3) и (38), в области Ω_β приходим к задаче Дирихле для гиперболических уравнений:

$$L_2 u \equiv |t|^p \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t) u_{x_i} + b(r,\theta,t) u_t + c(r,\theta,t) u = 0 \tag{39}$$

с данными

$$u\Big|_S = \tau(r,\theta), \quad u\Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), \qquad u\Big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r,\theta). \tag{40}$$

В [7] доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. *Если $\tau(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta) \in W_2^l(S)$, $\psi_2(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $l > 3m/2$, и выполняется соотношение* (4), *то задача* (39), (40) *в классе $C^1(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$ однозначно разрешима.*

Теорема 4. *Решение задачи* (39), (40) *единственно, тогда и только тогда, когда имеет место условие* (4).

Используя теорему 3, получим разрешимость задачи 1.

В [7] приводится явный вид решения задачи (39),(40), поэтому можно записать представления решения и для задачи 1.

3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Сначала рассмотрим задачу (1), (2) в области Ω_α и докажем единственность ее решения. Для этого сначала построим решение первой краевой задачи для уравнения

$$L_1^* \upsilon \equiv t^q \Delta_x \upsilon + \upsilon_t - \sum_{i=1}^{m} d_i \upsilon_{x_i} + d\upsilon = 0 \tag{41}$$

с данными

$$\upsilon\big|_S = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar\tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \qquad \upsilon\big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \tag{42}$$

где $d(x,t) = e - \sum_{i=1}^{m} d_{ix_i}$, $\bar\tau_n^k(r) \in G$, G — множество функций $\tau(r)$ из класса $C([0,1]) \cap C^1((0,1))$. Множество G плотно всюду в $L_2((0,1))$ [11]. Решение задачи (41), (42) будем искать в виде (6), где функции $\bar\upsilon_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда аналогично параграфу 2 функции $\bar\upsilon_n^k(r,t)$ удовлетворяют систему уравнений вида (8)–(10), где $\tilde d_{in}^k$, d_{in}^k заменены соответственно на $-\tilde d_{in}^k$, $-d_{in}^k$, а $\tilde e_n^k$ на $\tilde d_n^k$, $i = 1,\ldots,m$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\ldots$.

Далее, из краевого условия (42) в силу (6) получим

$$\bar\upsilon_n^k(r,0) = \bar\tau_n^k(r), \qquad \bar\upsilon_n^k(1,t) = 0, \qquad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots . \tag{43}$$

Как замечено ранее, каждое уравнение системы (8)–(10) представимо в виде (11). Задачу (11),(43) приведем к следующей задаче:

$$L\upsilon_n^k \equiv t^q\left(\upsilon_{nrr}^k + \frac{\overline{\lambda_n}}{r^2}\upsilon_n^k\right) + \upsilon_{nt}^k = \widetilde{f}_n^k(r,t), \tag{44}$$

$$\upsilon_n^k(r,0) = \tau_n^k(r), \qquad \upsilon_n^k(1,t) = 0, \tag{45}$$

$$\upsilon_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar\upsilon_n^k(r,t), \qquad \widetilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar f_n^k(r,t), \qquad \tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar\tau_n^k(r).$$

Решение задачи (44), (45) будем искать в виде (17), где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи для уравнения (18) с данными

$$\upsilon_{1n}^k(r,0) = 0, \qquad \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{46}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи для уравнения (20) с условием

$$\upsilon_{2n}^k(r,0) = \tau_n^k(r), \qquad \upsilon_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{47}$$

Решения задач (18), (46) и (20), (47) соответственно имеют вид

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}\left[\left(\exp\left(+\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}t^{q+1}\right)\right)\int_0^t a_{s,n}(\xi)\left(\exp\left(-\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}\xi^{q+1}\right)\right)d\xi\right] J_\nu(\mu_{s,n}r),$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\tau_{s,n}\sqrt{r}\left(\exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1}t^{q+1}\right)\right)J_\nu(\mu_{s,n}r),$$

где

$$\tau_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_s)]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\tau_n^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \qquad \nu = n + \frac{(m-2)}{2}.$$

Таким образом, решение задачи (41), (42) в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t)\right]Y_{n,m}^k(\theta)$$

построено, в силу оценок оно принадлежит классу $C(\bar\Omega_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$.

В результате интегрирования по области Ω_β тождества [13]

$$vL_1u - uL_1^*v = -vP(u) + uP(v) - uvQ,$$

где

$$P(u) = t^q \sum_{i=1}^m u_{x_i} \cos\left(N^\perp, x_i\right), Q = \cos\left(N^\perp, t\right) - \sum_{i=1}^m d_i \cos\left(N^\perp, x_i\right),$$

а $N^\perp$ — внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$, по формуле Грина получим

$$\int_S \tau(r,\theta)u(r,\theta,0)ds = 0. \tag{48}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна в $L_2(S)$ [11], то из (48) заключаем, что $u(r,\theta,0) = 0$ для всех $(r,\theta) \in S$. Стало быть, по принципу экстремума для параболического уравнения (5) [14] $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_\alpha$.

Далее, используя теорему 4, получим единственность решения задачи 1, а также справедливость теоремы 2.

Отметим, что доказанные теоремы для модельного многомерного вырождающегося гиперболо-параболического уравнения получены в [15].

Библиографический список

1. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных. М. : Наука, 2006. 287 с.
2. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск : Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1983. 84 с.
3. *Каратопраклиев Г. Д.* Краевые задачи для уравнения смешанного типа в многомерных областях // Partial Diffential Equations Banach Center Publications. 1983. Vol. 10. P. 261–269.
4. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле для одного класса многомерных гиперболо-параболических уравнений // Укр. матем. вестн. 2013. Т. 10, № 2. С. 147–157.
5. *Aldashev S. A.* Correctntss of the Dirichlet problem for a class of multidimensional hyperbolic-parabolic equations // J. Math. Sci. 2013. Vol. 194, iss. 5. P. 491–498. DOI: 10.1007/s10958-013-1542-z.
6. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Геллерстедта // Укр. матем. журн. 2012. Т. 64, № 3. С. 426–432.
7. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Геллерстедта // Нелинейные колебания. 2015. Т. 18, № 1. С. 10–19.
8. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. : Физматгиз, 1962. 254 с.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1965. 703 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции : в 2 т. Т. 2. М. : Наука, 1974. 297 с.
11. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1976. 543 с.
12. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1966. 724 с.

13. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики : в 5 т. Т. 4, ч. 2. М. : Наука, 1981. 550 с.
14. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М. : Мир, 1968. 527 с.
15. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле для вырождающегося многомерного гиперболо-параболического уравнения // Изв. НАН РК. Сер. физ.-матем. 2014. Vol. 5, № 297. С. 7–11.

Образец для цитирования:
Алдашев С. А. Задача Дирихле для одного класса вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 3. С. 244–254. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-244-254.

Well-posedness of the Dirichlet Problem for One Class of Degenerate Multi-dimensional Hyperbolic-parabolic Equations

S. A. Aldashev

Serik A. Aldashev, ORCID: 0000-0002-8223-6900, Abai Kazakh National Pedagogical University, 86, Tole Be Str., Almaty, Kazakhstan, 480012, aldash51@mail.ru

It has been shown by Hadamard that one of the fundamental problems of mathematical physics, the analysis of the behavior of oscillating string is an ill-posed problem when the boundary-value conditions are imposed on the entire boudary of the domain. As noted by A. V. Bitsadze and A. M. Nakhushev, the Dirichlet problem is ill-posed not only for the wave equation but for hyperbolic PDEs in general. This author has earlier studied the Dirichlet problem for multi-dimensional hyperbolic PDEs, where he has shown that the well-posedness of this problem crucially depends on the height of the analyzed cylindric domain. This paper, using the method developed in the authors previous papers, shows the unique solvability (and obtains an explicit form of the classical solution) of the Dirichlet problem in the cylindric domain for one class of degenerate multi-dimensional hyperbolic-parabolic equations. We also obtain a criterion for the uniqueness of the solution.

Key words: well-posedness, Dirichlet problems, degenerate equations, criterion, Bessel function.

References

1. Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravneniia v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Shift for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2006. 287 p. (in Russian).
2. Vragov V. N. *Kraevye zadachi dlia neklassicheskikh uravnenii matematicheskoi fiziki* [Boundary-Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, Novosibirsk State Univ. Press, 1983. 84 p. (in Russian).
3. Karatoprakliev G. D. Boundary Value Problems for Mixed Type Equations in Multi-dimensional Domains. *Partial Differential Equations Banach Center Publications*, 1983, vol. 10, pp. 261–269 (in Russian).
4. Aldashev S. A. Well-posedness of Dirichlet problem for one class of multi-dimensional hyperbolic-parabolic equations. *Ukrainskii Matematicheskii Vestnik*, 2013, vol. 10, no. 2, pp. 147–157 (in Russian).
5. Aldashev S. A. Correctness of the Dirichlet Problem for a Class of Multidimensional Hyperbolic-Parabolic Equations. *J. Math. Sci.*, 2013, vol. 194, iss. 5, pp. 491–498. DOI: 10.1007/s10958-013-1542-z.

6. Aldashev S. A. Well-posedness of the Dirichlet and Poincare problems for a multidimensional Gellerstedt equation in a cylindrical domain. *Ukr. Math. J.*, 2012, vol. 64, iss. 3, pp. 484–490. DOI: 10.1007/s11253-012-0660-y.
7. Aldashev S. A. Well-posedness of Dirichlet and Poincare problems in a cylindrical domain for degenerate many dimensional hyperbolic equations with Gellerstedt operator. *Nonlinear Oscilations*, 2015, vol. 18, no. 1, pp. 10–19 (in Russian).
8. Mikhlin S. G. *Multidimensional singular integrals and integral equations*. Oxford, New York, Paris, Pergamon Press, 1965. 255 p. (Russ. ed. : Moscow, Fizmatgiz, 1962. 254 p.)
9. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Manual of ordinary differential equations]. Moscow, Nauka, 1965. 703 p. (in Russian).
10. Beitmen G., Erdeii A. *Vysshie transtsendentnye funktsii* [Higher Transcendental Functions]. Moscow, Nauka, 1974, vol. 2. 297 p. (in Russian).
11. Kolmogorov A., Fomin S. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Mineola, New York, USA, Dover Publ., 1999. 288 p. (Russ. ed. : Moscow, Nauka, 1976. 543 p.)
12. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Equations of mathematical physics. New York, Dover, 1990. 800 p. (Russ. ed. : Moscow, Nauka, 1966. 724 p.)
13. Smirnov V. I. *Kurs vysshei matematiki* [Higher Mathematics Course]. Moscow, Nauka, 1981, vol. 4, pt. 2. 550 p. (in Russian)
14. Fridman A. *Uravneniia s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial differential Equations of parabolic type]. Moscow, Mir, 1968. 527 p. (in Russian).
15. Aldashev S. A. The Well-Posedness of the Dirichlet Problem for Degenerate Multi-Dimensional Hyperbolic-Parabolic Eguation. *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-Mathematical Ser.*, 2014, vol. 5, no. 297, pp. 7–11 (in Russian).

Cite this article as:

Aldashev S. A. Well-posedness of the Dirichlet Problem for One Class of Degenerate Multidimensional Hyperbolic-parabolic Equations. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 3, pp. 244–254 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-244-254.