УДК 519.853

О ВНУТРЕННЕЙ ОЦЕНКЕ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ЛЕБЕГОВЫМ МНОЖЕСТВОМ ВЫПУКЛОЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

С. И. Дудов[1], **В. В. Абрамова**[2]

[1]Дудов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической экономики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, DudovSI@info.sgu.ru
[2]Абрамова Вероника Валерьевна, аспирант кафедры математической экономики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, veronika0322@rambler.ru

Рассматривается конечномерная задача о вложении наибольшего по включению нижнего Лебегова множества выпуклой функции $f(x)$ в заданное выпуклое тело $D \subset \mathbb{R}^p$. Эта задача является обобщением задачи о вписанном шаре (случай, когда функция является некоторой нормой, а ее лебеговы множества — шары). Функция $f(x)$ должна быть дифференцируемой всюду на $\mathbb{R}^p$, за исключением, возможно, точки 0_p, и иметь ее в качестве единственной точки минимума. Математическая формализация этой задачи предложена в форме отыскания максимина от функции разности аргументов. Доказано, что целевая функция данной максиминной задачи является липшицевой на $\mathbb{R}^p$ и квазивогнутой на множестве D. Кроме того, установлено, что целевая функция супердифференцируема (в смысле определения Демьянова – Рубинова) на внутренности тела D и получена соответствующая формула супердифференциала. На основе этой формулы супердифференциала получены необходимое и достаточное условие решения задачи и условие единственности решения.

Ключевые слова: выпуклое тело, внутренняя оценка, минимакс, супердифференциал, квазивогнутая функция.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-267-275

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим конечномерную максиминную задачу с распадающимися переменными следующего вида:

$$\varphi(x) \equiv \min_{y\in\Omega} f(y-x) \longrightarrow \max_{x\in D}, \tag{1}$$

где $D \subset \mathbb{R}^p$ — заданное выпуклое тело, $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$, а $f(x)$ — выпуклая конечная на $\mathbb{R}^p$ функция, имеющая единственную точку минимума $x^* = 0_p$. Кроме того, далее считаем, что функция $f(x)$ дифференцируема всюду на $\mathbb{R}^p$, за исключением, быть может, точки x^*.

Если обозначим через

$$G^f(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \leqslant \alpha\},$$

то нетрудно видеть, что для фиксированной точки $x \in D$ величина $\alpha = \varphi(x)$ является максимальной, при которой выполняется включение

$$G^f(\alpha) + x = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y-x) \leqslant \alpha\} \subset D.$$

Таким образом, с геометрической точки зрения задача (1) требует вложить в тело D наибольшее (по включению) нижнее лебегово множество функции $f(\cdot)$ (т. е. с наибольшим значением α) через выбор точки $x \in D$. Эту задачу мы будем называть задачей о внутренней оценке выпуклого тела D лебеговым множеством функции $f(\cdot)$. Нетрудно видеть, что задача (1) является обобщением задачи о вписанном шаре (случай, когда функция $f(\cdot)$ удовлетворяет аксиомам нормы, см. например, [1]).

Цель статьи — исследовать свойства функции $\varphi(x)$ и получить необходимые и достаточные условия решения задачи (1). Понятно, что здесь могут найти применение общие методы теории минимаксных задач (например, [2–5]). Кроме того, отметим, что задача вида (1) рассматривалась в работе [6] на предмет получения необходимых и достаточных условий решения в случае, когда множества D и Ω задавались в виде лебеговых множеств функций, дифференцируемых по всем направлениям. Однако наши исходные предположения не позволят напрямую воспользоваться результатами работы [6].

Далее используются следующие обозначения: $\operatorname{int} A$, $\operatorname{co} A$, $\operatorname{cl} A$ — внутренность, выпуклая оболочка, замыкание множества A; $\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение элементов x и y.

2. СВОЙСТВА ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Установим некоторые свойства целевой функции в экстремальной задаче (1).

Теорема 1. *Функция $\varphi(x)$ является*
1) липшицевой на $\mathbb{R}^p$;
2) квазивогнутой на D, т. е.

$$\varphi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \geqslant \min\{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}, \qquad \forall\, x_1, x_2 \in D, \qquad \alpha \in [0,1],$$

причем если $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$, то $\varphi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \varphi(x_1)$ для всех $\alpha \in (0,1)$.

Доказательство. 1. Очевидно, что

$$\varphi(x) \equiv \min_{y\in\Omega} f(y-x) = \min_{y\in\partial\Omega} f(y-x), \qquad \forall\, x \in D, \tag{2}$$

где $\partial\Omega$ — граница множества Ω и одновременно выпуклого тела D. Множества $\partial\Omega$ и D являются ограниченными и замкнутыми. Следовательно, их разность $\partial\Omega - D = \{z_1 - z_2 : \ z_1 \in \partial\Omega, z_2 \in D\}$ также является ограниченным и замкнутым множеством. Как известно [7, гл. 1, § 5], выпуклая и конечная на $\mathbb{R}^p$ функция является липшицевой на любом ограниченном множестве. Поэтому существует $L > 0$ такое, что

$$|f(y-x_1) - f(y-x_2)| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \qquad \forall\, y \in \partial\Omega, \qquad x_1, x_2 \in D. \tag{3}$$

Теперь, используя (2), (3), получаем

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| = |\min_{y\in\partial\Omega} f(y-x_1) - \min_{y\in\partial\Omega} f(y-x_2) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{y\in\partial\Omega} |f(y-x_1) - f(y-x_2)| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \qquad \forall\, x_1, x_2 \in D. \tag{4}$$

Ввиду того что $\varphi(x) \equiv f(0_p)$ для любой точки $x \in \Omega$, случай $x_1 \in D$ и $x_2 \notin D$ легко сводится к уже рассмотренному. При этом константа Липшица та же самая, что и в (4). Случай $x_1 \notin D, x_2 \notin D$ является тривиальным.

Тем самым липшицевость функции $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}^p$ доказана.

2. Теперь докажем квазивогнутость $\varphi(x)$ на D. Очевидно, нетривиальным является только случай $x_1, x_2 \in \operatorname{int} D$. Как следует из определения функции $\varphi(x)$, для любой точки $x \in \operatorname{int} D$ выполняется

$$\{y \in \mathbb{R}^p : f(y-x) < \varphi(x)\} \cap \Omega = \varnothing. \tag{5}$$

Учитывая выпуклость функции$f(\cdot)$ и неравенство $\varphi(x) > f(0_p)$ для $x \in \operatorname{int} D$, нетрудно показать, что

$$\operatorname{cl}\{y \in \mathbb{R}^p : f(y-x) < \varphi(x)\} = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y-x) \leqslant \varphi(x)\} = G^f(\varphi(x)) + x. \tag{6}$$

Поэтому из (5), (6) для $x_1, x_2 \in \operatorname{int} D$ вытекает

$$G^f(\varphi(x_1)) + x_1 \subset D, \tag{7}$$
$$G^f(\varphi(x_2)) + x_2 \subset D. \tag{8}$$

Пусть $\varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$. Тогда из (7), (8) в силу включения $G^f(\varphi(x_1)) \subset G^f(\varphi(x_2))$ и выпуклости D получаем

$$G^f(\varphi(x_1)) + \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y - \alpha x_1 - (1-\alpha)x_2) \leqslant \varphi(x_1)\} \subset D. \tag{9}$$

Поскольку $\Omega = \operatorname{cl}(\mathbb{R}^p \backslash D)$, то ввиду непрерывности функции $f(\cdot)$ из (9) следует

$$\varphi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \min_{y \in \Omega} f(y - \alpha x_1 - (1-\alpha)x_2) \geqslant \varphi(x_1) = \min\{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}.$$

Пусть теперь $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$. Тогда ввиду непрерывности функции $f(\cdot)$ выполняется $G^f(\varphi(x_1)) \subset \operatorname{int} G^f(\varphi(x_2))$. Поэтому из (8) получаем

$$G^f(\varphi(x_1)) + x_2 \subset \operatorname{int} D. \tag{10}$$

Из выпуклости тела D, (7) и (10) вытекает

$$G^f(\varphi(x_1)) + \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in \operatorname{int} D, \qquad \forall\ \alpha \in (0,1). \tag{11}$$

Поскольку

$$G^f(\varphi(x_1)) + \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = \{y \in \mathbb{R}^p :\ f(y - \alpha x_1 - (1-\alpha)x_2) \leqslant \varphi(x_1)\},$$

то, учитывая (11), получаем

$$\varphi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \min_{y \in \Omega} f(y - \alpha x_1 - (1-\alpha)x_2) > \varphi(x_1), \qquad \forall\ \alpha \in (0,1).$$

□

Теперь рассмотрим дифференциальные свойства функции $\varphi(x)$.

Теорема 2. *Функция $\varphi(x)$ является супердифференцируемой в любой точке $x \in \operatorname{int} D$, а формулу ее супердифференциала в точке x можно представить в виде*

$$\overline{\partial}\varphi(x) = \operatorname{co}\{-f'(z-x) : z \in Q(x)\}, \qquad \forall\ x \in \operatorname{int} D, \tag{12}$$

где $Q(x) = \{z \in \Omega : \varphi(x) = f(z-x)\}$.

Доказательство. Напомним, что функция $\varphi(x)$, определенная в окрестности точки x, называется в ней супердифференцируемой в смысле определения В. Ф. Демьянова – А. М. Рубинова [8, гл. 3, § 2], если она в этой точке дифференцируема по любому направлению $g \in \mathbb{R}^p$, и существует такой выпуклый компакт $\overline{\partial}\varphi(x)$, что для ее производной по направлениям справедлива формула

$$\varphi'(x,g) \equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1}[\varphi(x+\alpha g) - \varphi(x)] = \min_{v \in \overline{\partial}\varphi(x)} \langle v, g \rangle, \qquad \forall\, g \in \mathbb{R}^p. \tag{13}$$

Очевидно, нашу целевую функцию $\varphi(x)$ можно представить в виде

$$\varphi(x) = -\max_{y \in \Omega} F(x,y), \;\; F(x,y) = -f(y-x).$$

В силу исходных условий на функцию $f(\cdot)$ функция $F(x,y)$ при любых $y \in \Omega$ является дифференцируемой по x в любой точке $x \in \operatorname{int} D$. Кроме того, как было отмечено (см. (2))

$$\varphi(x) = -\max_{y \in \partial\Omega} F(x,y), \qquad \forall\, x \in \operatorname{int} D,$$

и $\partial\Omega$ является компактом. Поэтому в соответствии с известным фактом из теории минимаксных задач (см. [2, гл. 6, § 1]) функция $\varphi(x)$ является дифференцируемой в точках $x \in \operatorname{int} D$ по любому направлению $g \in \mathbb{R}^p$, причем

$$\varphi'(x,g) = -\max_{z \in Q(x)} \langle F'_x(x,z), g \rangle, \tag{14}$$

где $F'_x(x,z)$ — градиент функции $F(x,z)$ по x, а

$$Q(x) = \{z \in \partial\Omega : \varphi(x) = -F(x,z)\} = \{z \in \Omega : \varphi(x) = f(z-x)\}.$$

Поскольку $F'_x(x,z) = f'(z-x)$, то из (14) в итоге получаем

$$\varphi'(x,g) = \min_{z \in Q(x)} \langle -f'(z-x), g \rangle = \min_{v \in \{-f'(z-x) : z \in Q(x)\}} \langle v, g \rangle =$$
$$= \min_{v \in \operatorname{co}\{-f'(z-x) : z \in Q(x)\}} \langle v, g \rangle, \qquad \forall\, g \in \mathbb{R}^p.$$

Последнее и означает, что в соответствии с (13) функция $\varphi(x)$ супердифференцируема и ее супердифференциал в точке x может быть представлен в виде (12). □

Замечание 1. Простые примеры ($f(x) = \langle x, x \rangle$, D — многогранник) показывают, что функция $\varphi(x)$, являясь в соответствии с теоремой 1 квазивогнутой на D, может не быть при этом вогнутой на D.

Замечание 2. Если функция $f(x)$ удовлетворяет аксиомам нормы, то $\varphi(x)$ является функцией расстояния от точки x до множества Ω. В этом случае формула ее супердифференциала, даже в случае, когда $f(\cdot)$ не обязательно дифференцируема в точках $x \neq 0_p$, получена в [9].

3. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РЕШЕНИЯ

В этом параграфе получим критерий решения задачи, а также достаточное условие единственности и строгого решения.

Из условий на функцию $f(x)$ и определения функции $\varphi(x)$ в (1) вытекает, что $\varphi(x) = 0$ при всех $x \in \Omega$ и $\varphi(x) > 0$ для точек $x \in \operatorname{int} D$. Поэтому если $x_0 \in D$ является точкой максимума функции $\varphi(x)$ на D, то $x_0 \in \operatorname{int} D$.

Теорема 3. *Для того чтобы точка* $x_0 \in \operatorname{int} D$ *была решением задачи* (1)*, т.е.* $\varphi(x_0) = \max\limits_{x\in D} \varphi(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$0_p \in \operatorname{co}\{f'(z - x_0) : z \in Q(x_0)\}. \tag{15}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть для точки $x_0 \in \operatorname{int} D$ выполняется соотношение (15).

Напомним, что конусом Булигана (контингентным конусом) множества A в точке $x \in A$ называется (см. [10, 11])

$$\Gamma(A, x) = \{g \in \mathbb{R}^p : \exists\ \{\alpha_k\} \downarrow 0, \{g_k\} \to g, k \to \infty, x + \alpha_k g_k \in A\}.$$

1. Сначала докажем, что

$$\Gamma(G^{\varphi}(\varphi(x_0)), x_0) = \mathbb{R}^p, \tag{16}$$

где $G^{\varphi}(\varphi(x_0)) = \{x \in \mathbb{R}^p : \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}$.

С этой целью предварительно покажем, что

$$\operatorname{cl} \gamma_{\varphi}(x_0) = \gamma_{1,\varphi}(x_0), \tag{17}$$

где $\gamma_{\varphi}(x_0) = \{g \in \mathbb{R}^p : \varphi'(x_0, g) < 0\}$, $\gamma_{1,\varphi}(x_0) = \{g \in \mathbb{R}^p : \varphi'(x_0, g) \leqslant 0\}$.

Очевидно, для этого достаточно доказать, что любой вектор $g_0 \in \mathbb{R}^p$ такой, что $\varphi'(x_0, g_0) = 0$, является предельным для некоторой последовательности $\{g_k\}_{k=\overline{1,\infty}} \subset \gamma_{\varphi}(x_0)$.

Итак, пусть $\varphi'(x_0, g_0) = 0$. Нетрудно видеть, что множество $Q(x_0) = \partial\Omega \cap \{y \in \mathbb{R}^p : f(y - x_0) \leqslant \varphi(x_0)\}$ является компактным.

Поэтому из теоремы 2 вытекает существование точки $z_0 \in Q(x_0)$ такой, что

$$\varphi'(x_0, g_0) = \min_{v\in\overline{\partial}\varphi(x_0)} \langle v, g_0\rangle = \min_{z\in Q(x_0)} \langle -f'(z - x_0), g_0\rangle = -\langle f'(z_0 - x_0), g_0\rangle = 0. \tag{18}$$

Возьмем произвольную последовательность $\{\varepsilon_k\} \downarrow 0$, $k \to \infty$ и в качестве $g_k = g_0 + \varepsilon_k f'(z_0 - x_0)$. Отметим, что $z_0 \neq x_0$, а тогда из выпуклости функции $f(\cdot)$, обладающей единственной точкой минимума $x^* = 0_p$, следует $f'(z_0 - x_0) \neq 0_p$. Теперь, используя (18), получаем

$$\varphi'(x_0, g_k) = \min_{z\in Q(x_0)} \langle -f'(z - x_0), g_k\rangle \leqslant \langle -f'(z_0 - x_0), g_0 + \varepsilon_k f'(z_0 - x_0)\rangle =$$
$$= -\varepsilon_k \|f'(z_0 - x_0)\|^2 < 0.$$

Таким образом, $\{g_k\}_{k=\overline{1,\infty}} \subset \gamma_{\varphi}(x_0)$ и $g_k \to g_0, k \to \infty$. Тем самым (17) доказано.

Для доказательства (16) остается заметить следующее. Во-первых, очевидно, что

$$\gamma_{\varphi}(x_0) \subset \Gamma(G^{\varphi}(\varphi(x_0)), x_0). \tag{19}$$

Далее, конус Булигана, как это следует из его определения, является замкнутым множеством. Поэтому из (17) и (19) имеем

$$\gamma_{1,\varphi}(x_0) \subset \Gamma(G^{\varphi}(\varphi(x_0)), x_0). \tag{20}$$

Наконец, используя теорему 2 и (15), получаем $0_p \in \overline{\partial}\varphi(x_0)$ и тогда

$$\varphi'(x_0, g) = \min_{x \in \overline{\partial}\varphi(x_0)} < v, g > \leqslant 0, \qquad \forall\ g \in \mathbb{R}^p,$$

т. е. $\gamma_{1,\varphi}(x_0) = \mathbb{R}^p$. Отсюда и из (20) получаем (16).

2. Теперь, используя (16), покажем, что $\varphi(x_0) = \max\limits_{z \in D} \varphi(x)$. Предположим противное, т. е. существует точка $y_0 \in D$, в которой $\varphi(y_0) > \varphi(x_0)$.

Функция $\varphi(x)$ является непрерывной и следовательно существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\varphi(x) > \varphi(x_0), \qquad \forall\ x \in B(y_0, \varepsilon) = \{x : \|x - y_0\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Отсюда, используя п. 2) теоремы 1, получаем

$$\varphi(x_0 + \alpha(x - x_0) = \varphi((1 - \alpha)x_0 + \alpha x) > \varphi(x_0), \qquad \forall\ \alpha \in (0, 1), x \in B(y_0, \varepsilon),$$

или

$$\varphi(x_0 + \alpha g) > \varphi(x_0), \qquad \forall\ \alpha \in (0, 1), g \in B(y_0 - x_0, \varepsilon). \tag{21}$$

В то же время в силу (16) $y_0 - x_0 \in \Gamma(G^{\varphi}(\varphi(x_0)), x_0)$.

Поэтому существуют последовательности $\{\alpha_k\} \downarrow 0$, $\{g_k\} \to y_0 - x_0, k \to \infty$, такие, что $x_0 + \alpha_k g_k \in G^{\varphi}(\varphi(x_0))$, т. е.

$$\varphi(x_0 + \alpha_k g_k) \leqslant \varphi(x_0). \tag{22}$$

Поскольку $g_k \in B(y_0 - x_0, \varepsilon)$ при достаточно больших значениях индекса k, то (22) будет противоречить (21). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть x_0 — точка максимума функции $\varphi(x)$ на D, но $0_p \notin \operatorname{co}\{f'(z - x_0) : z \in Q(x_0)\}$. Тогда в силу теоремы 2 $0_p \notin \overline{\partial}\varphi(x_0)$. Поскольку множество $\overline{\partial}\varphi(x_0)$ является выпуклым компактом, то по теореме отделимости [12, гл. 4] существует вектор $g_0 \neq 0_p$ и $a > 0$ такие, что

$$\langle v, g_0 \rangle \geqslant a > 0, \qquad \forall\ v \in \overline{\partial}\varphi(x_0).$$

Отсюда следует

$$\varphi'(x_0, g_0) = \min_{x \in \overline{\partial}\varphi(x_0)} \langle v, g_0 \rangle \geqslant a > 0.$$

Поскольку $x_0 \in \operatorname{int} D$, то последнее означает, что существует $\alpha_0 > 0$ такое, что

$$\varphi(x_0 + \alpha g_0) > \varphi(x_0), \qquad x_0 + \alpha g_0 \in D, \qquad \alpha \in (0, \alpha_0).$$

Таким образом, получили противоречие с исходным предположением. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Если для точки $x_0 \in \operatorname{int} D$ выполняется соотношение*

$$0_p \in \operatorname{int} \operatorname{co} \{ f'(z - x_0) : \ z \in Q(x_0) \}, \tag{23}$$

то x_0 является единственной точкой максимума функции $\varphi(x)$ на D, причем существуют $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ такие, что

$$\varphi(x) < \varphi(x_0) - \varepsilon \|x - x_0\|, \qquad \forall \ x \neq x_0, x \in B(x_0, \delta). \tag{24}$$

Доказательство. Из (23) и теоремы 2 следует существование $\varepsilon_0 > 0$ такого, что

$$B(0_p, \varepsilon_0) \subset \overline{\partial} \varphi(x_0). \tag{25}$$

Поэтому из (25), очевидно, вытекает

$$\varphi'(x_0, g) = \min_{v \in \overline{\partial} \varphi(x_0)} < v, g > \leqslant -\varepsilon_0, \qquad \forall \ g \in \mathbb{R}^p : \|g\| = 1. \tag{26}$$

Функция $\varphi(x)$ дифференцируема по любому направлению в точке x_0 и является липшицевой в ее окрестности в соответствии с теоремами 1, 2. Поэтому (см. [8, гл. 1, § 3, предложение 3.2, теорема 3]) в асимптотической формуле

$$\varphi(x_0 + \alpha g) = \varphi(x_0) + \alpha \varphi'(x_0, g) + o(\alpha, g) \tag{27}$$

величина $\frac{(\alpha, g)}{\alpha} \to 0$ равномерно по всем $g \in \mathbb{R}^p, \|g\| = 1$. Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\frac{(\alpha, g)}{\alpha}| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \qquad \alpha \in (0, \delta). \tag{28}$$

Тогда из (26)–(28) следует

$$\varphi(x_0 + \alpha g) < \varphi(x_0) - \alpha \frac{\varepsilon_0}{2}, \qquad \forall \ \alpha \in (0, \delta), \|g\| = 1$$

или, что то же самое,

$$\varphi(x) < \varphi(x_0) - \frac{\varepsilon_0}{2} \|x - x_0\|, \qquad \forall \ x \in B(x_0, \delta), \qquad x \neq x_0. \tag{29}$$

Для завершения доказательства остается добавить следующее. Из квазивогнутости функции $\varphi(x)$ на D следует (см. [7, гл. 1, § 1]) выпуклость множества $\{ y \in D : \varphi(y) \geqslant \varphi(x_0) \}$. Поэтому допущение о наличии еще одной точки максимума $y_0 \in D$ ведет к тому, что $\varphi(x) \equiv \varphi(x_0)$, $x \in [x_0, y_0]$. Это, очевидно, противоречит (29).

Таким образом, x_0 — единственная точка максимума функции $\varphi(x)$ на D. □

Библиографический список

1. *Дудов С. И.* Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36, № 5. С. 153–159.
2. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М. : Наука, 1972. 368 с.
3. *Демьянов В. Ф.* Минимакс : дифференцируемость по направлениям. Л. : Изд-во ЛГУ, 1974. 112 с.
4. *Федоров В. В.* Численные методы максимина. М. : Наука, 1979. 280 с.
5. *Сухарев А. Г., Федоров В. В.* Минимаксные задачи и минимаксные аглгоритмы. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1979. 50 с.

6. *Дудов С. И.* Необходимые и достаточные условия максимина функции разности аргументов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32, № 12. С. 1869–1884.
7. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981. 384 с.
8. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М. : Наука, 1990. 432 с.
9. *Дудов С. И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530–542. DOI: 10.4213/mzm1532.
10. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М. : Наука, 1988. 280 с.
11. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М. : Физмалит, 2015. 524 с.
12. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации : в 2 кн. Кн. 2. М. : МЦНМО, 2011. 434 с.

Образец для цитирования:
Дудов С. И., Абрамова В. В. О внутренней оценке выпуклого тела лебеговым множеством выпуклой дифференцируемой функции // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 3. С. 267–275. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-267-275.

On an Inner Estimate of a Convex Body by the Lebesgue Set of Convex Differentiable Function

S. I. Dudov[1], V. V. Abramova[2]

[1]Sergey I. Dudov, ORCID: 0000-0003-0098-3652, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, DudovSI@info.sgu.ru
[2]Veronika V. Abramova, ORCID: 0000-0002-4336-191X, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, veronika0322@rambler.ru

A finite-dimentional problem of embedding the largest by the inclusion of lower Lebesgue set of given convex function $f(x)$ in a given convex body $D \subset \mathbb{R}^p$ is considered. This problem is the generalization of the problem of inscribed ball (function $f(x)$ is some norm, and the Lebesgue sets are the corresponding balls). The function $f(x)$ must be differentiable on $\mathbb{R}^p$ possibly expending the point 0_p and 0_p is the uniqueness point of minimum. Mathematical formalization of this problem is proposed in the form of finding maximin of a function of the difference of arguments. It is proved that the objective function of this maximin problem is Lipschitzian on all space $\mathbb{R}^p$ and quasiconcave on the set D. Also, superdifferentiability (in the sense of V. F. Demyanov – A. M. Rubinov) of objective function on the interior of D is established and the corresponding formula of superdifferential is derived. The necessary and sufficient solution conditions and the condition for uniqueness of solution are obtained on the basis of this formula of superdifferential.

Key words: convex body, inner estimate, minimax, supperdifferential, quasiconcave function.

References

1. Dudov S. I. Inner estimation of a convex set by a norm body. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1996, vol. 36, no. 5. pp. 683–688.
2. Dem'yanov V. F., Malozemov V. N. *Introduction to minimax*. New York, John Wiley & Sons, 1974. 307 p. (Russ. ed. : Moscow, Nauka, 1972. 368 p.)
3. Dem'yanov V. F. *Minimaks : differentsiruemost' po napravleniiam* [Minimax: directional differentiability]. Leningrad, Leningrad Univ. Press, 1974. 112 p. (in Russian).

4. Fedorov V. V. *Chislennye metody maksimina* [Computational Methods of Maksimin]. Moscow, Nauka, 1979. 280 p. (in Russian).
5. Suharev A. G., Fedorov V. V. *Minimax Problems and Minimax algorithms*. Moscow, Moscow Univ. Press, 1979. 50 p. (in Russian).
6. Dudov S. I. Necessary and Sufficient Conditions for the Maximin of a Function of the Difference of Arguments. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1992, vol. 32, no. 12, pp. 1701–1714.
7. Dem'yanov V. F., Vasil'ev L. V. *Non-differentiable optimization*. New York, Springer-Verlag, 1985. 452 p. (Russ. ed. : Moscow, Nauka, 1981. 384 p.)
8. Dem'yanov V. F., Rubinov A. M. *Osnovy negladkogo analiza i kvazidifferentsial'noe ischislenie* [Foundation of Non-smooth Analysis and Quasidifferential Calculus]. Moscow, Nauka, 1990. 432 p. (in Russian).
9. Dudov S. I. Subdifferentiability and Superdifferentiability of Distance Function. *Math. Notes*, 1997, vol. 61, no. 4, pp. 440–450. DOI: 10.1007/BF02354988.
10. Clarke F. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. New York, Wiley Interscience, 1983. 308 p. (Russ. ed. : Moscow, Nauka, 1988. 280 p.)
11. Polovinkin E. S. *Mnogoznachnyi analiz i differentsial'nye vkliucheniia* [Set-value Analysis and Differential Inclusion]. Moscow, Fizmatlin, 2014. 524 p. (in Russian).
12. Vasil'ev F. P. *Metody optimizatsii, v 2 kn. Kn. 2.* [Optimization Methods. Book 2]. Moscow, MCNMO, 2011. 434 p. (in Russian).

Cite this article as:
Duduv S. I., Abramova V. V. On an Inner Estimate of a Convex Body by the Lebesgue Set of Convex Differentiable Function. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 3, pp. 267–275 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-267-275.
