УДК 517.984

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПО ФУНКЦИИ ВЕЙЛЯ

М. Ю. Игнатьев[1], **С. Ю. Советникова**[2]

[1]Игнатьев Михаил Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики. Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, IgnatievMU@info.sgu.ru

[2]Советникова Светлана Юрьевна, старший преподаватель кафедры математической физики и вычислительной математики. Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, sovetnikovasy@mail.ru

Исследуются обратные спектральные задачи для интегродифференциальных операторов второго порядка, которые являются возмущением оператора Штурма – Лиувилля интегральным вольтерровским оператором. Основное внимание уделяется нелинейной обратной задаче восстановления потенциала по заданной функции Вейля при условии, что ядро интегрального оператора известно априори. Получены свойства спектральных характеристик и функции Вейля, приведен алгоритм решения обратной задачи и установлена единственность решения. Для решения обратной задачи используется метод эталонных моделей.

Ключевые слова: интегродифференциальные операторы, обратные спектральные задачи, единственность, алгоритм.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-276-284

1. Исследуются обратные задачи спектрального анализа для следующего интегродифференциального оператора:

$$\ell y := -y''(x) + q(x)y(x) + \int\limits_0^x M(x,t)y(t)\,dt, \qquad x \in [0,T]$$

на конечном интервале с краевыми условиями:

$$y'(0) - hy(0) = y'(T) + Hy(T) = 0.$$

Вводится и изучается функция Вейля для этого класса интегродифференциальных операторов. Получен алгоритм построения потенциала q по заданной функции Вейля при условии, что ядро M известно априори. Обратные спектральные задачи состоят в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Такие задачи часто возникают в математике, механике, физике, электронике, геофизике и других областях естествознания и техники. Обратная задача для дифференциальных операторов достаточно полно изучена (см. монографии [1–6] и библиографию в них). Для интегродифференциальных и других классов нелокальных операторов обратные задачи являются более трудными для исследования; для таких операторов классические методы (метод оператора преобразования и метод спектральных отображений [1–6]) либо совсем не работают, либо требуют существенной модификации. Поэтому для интегродифференциальных операторов теория решения обратных задач еще не построена. В то же время нелокальные, в частности интегродифференциальные операторы, вызывают интерес исследователей, так как они имеют много приложений (см., например, [7]). Отметим, что некоторые аспекты теории решения обратных задач для интегродифференциальных операторов исследовались в [8–11] и др. работах.

2. Объектом исследования является краевая задача $L = L(q, M, h, H)$ для интегродифференциального уравнения:

$$\ell y := -y''(x) + q(x)y(x) + \int_0^x M(x,t)y(t)\,dt = \lambda y(x), \qquad x \in [0,T], \tag{1}$$

с краевыми условиями:

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \qquad V(y) := y'(T) + Hy(T) = 0,$$

где $q(x)$ и $M(x,t)$ — интегрируемые комплекснозначные функции, а h и H — комплексные числа. Пусть функции $C(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ являются решениями уравнения (1) при начальных условиях $\varphi(0,\lambda) = C(0,\lambda) = S'(0,\lambda) = 1$, $C'(0,\lambda) = S(0,\lambda) = 0$, $\varphi'(0,\lambda) = h$. При каждом фиксированном $x \in [0,T]$ функции $C^{(\nu)}(x,\lambda)$, $S^{(\nu)}(x,\lambda)$ и $\varphi^{(\nu)}(x,\lambda)$, $\nu = 0,1$, являются целыми по λ порядка 1/2. Ясно, что

$$\varphi(x,\lambda) = C(x,\lambda) + hS(x,\lambda).$$

Обозначим $\Delta(\lambda) := V(\varphi) = \varphi'(T,\lambda) + H\varphi(T,\lambda)$. Нули $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ целой функции $\Delta(\lambda)$ совпадают с собственными значениями краевой задачи L. Функция $\Delta(\lambda)$ называется характеристической функцией для L.

Пусть функция $\Phi(x,\lambda)$ является решением уравнения (1) при условиях $U(\Phi) = 1$, $V(\Phi) = 0$. Обозначим $N(\lambda) := \Phi(0,\lambda)$. Тогда

$$\Phi(x,\lambda) = S(x,\lambda) + N(\lambda)\varphi(x,\lambda), \qquad N(\lambda) = -\Delta_1(\lambda)/\Delta(\lambda), \tag{2}$$

где $\Delta_1(\lambda) := V(S) = S'(T,\lambda) + HS(T,\lambda)$. Нули $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ целой функции $\Delta_1(\lambda)$ совпадают с собственными значениями краевой задачи L_1 для уравнения (1) с краевыми условиями $y(0) = V(y) = 0$. Функция $N(\lambda)$ называется функцией Вейля. Из (2) следует, что функция $N(\lambda)$ является мероморфной по λ с полюсами $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ и нулями $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$. Пусть $M(x,t), h$ и H известны априори. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. *Дана $N(\lambda)$, построить $q(x)$.*

Эта обратная задача является аналогом классической обратной задачи восстановления оператора Штурма – Лиувилля по заданной функции Вейля [3].

3. Пусть $\lambda = \rho^2$, $\tau = \operatorname{Im}\rho$. Известным методом (см., например, [3]) получаем, что при $|\rho| \to \infty$ имеют место асимптотические формулы:

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin\rho x}{\rho} - \frac{\cos\rho x}{2\rho^2}\int_0^x q(t)\,dt + o\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho^2}\right),$$

$$C(x,\lambda) = \cos\rho x + \frac{\sin\rho x}{2\rho}\int\limits_0^x q(t)\,dt + o\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho}\right),$$

$$S'(x,\lambda) = \cos\rho x + \frac{\sin\rho x}{2\rho}\int\limits_0^x q(t)\,dt + o\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{\rho}\right),$$

$$C'(x,\lambda) = -\rho\sin\rho x + \frac{\cos\rho x}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt + o(\exp(|\tau|x))$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered}\Delta(\lambda) = -\sin\rho T + \omega\cos\rho T + o(\exp(|\tau|T)),\\ \Delta_1(\lambda) = \cos\rho T + \frac{\omega_1\sin\rho T}{\rho} + o\left(\frac{\exp(|\tau|T)}{\rho}\right),\end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\omega := h + H + \frac{1}{2}\int\limits_0^T q(t)\,dt, \qquad \omega_1 := H + \frac{1}{2}\int\limits_0^T q(t)\,dt.$$

Используя (3), вычисляем

$$\rho_n := \sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{T} + \frac{\omega}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \rho_{n1} := \sqrt{\mu_n} = \frac{\pi}{T}\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\omega_1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Кроме того, задание чисел $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ и $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$ однозначно определяет характеристические функции $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_1(\lambda)$ по формулам [3]:

$$\Delta(\lambda) = T(\lambda_0 - \lambda)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n - \lambda}{(n\pi/T)^2}, \qquad \Delta_1(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_n - \lambda}{((n+1/2)\pi/T)^2}. \tag{4}$$

Учитывая (2) и (4), заключаем, что обратная задача 1 эквивалентна следующей обратной задаче.

Обратная задача 2. *Даны два спектра* $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ *и* $\{\mu_n\}_{n\geqslant 0}$, *построить* $q(x)$.

Обозначим

$$\ell^* z := -z''(x) + q(x)z(x) + \int\limits_x^\pi M(t,x)z(t)\,dt.$$

Очевидно, что

$$\int\limits_0^\pi \ell y(x)\cdot z(x) = \Big|_0^\pi (yz' - y'z) + \int\limits_0^\pi y(x)\cdot \ell^* z(x). \tag{5}$$

Если $y(x,\lambda)$ и $z(x,\mu)$ — решения уравнений $\ell y = \lambda y$ и $\ell^* z = \mu z$ соответственно, то (5) дает

$$(\lambda - \mu)\int\limits_0^\pi y(x,\lambda)z(x,\mu)\,dx = \Big|_0^\pi (yz' - y'z). \tag{6}$$

Пусть $C_*(x,\lambda), S_*(x,\lambda)$ и $\psi_*(x,\lambda)$ — решения уравнения

$$\ell^* z = \lambda z \tag{7}$$

при начальных условиях:

$$C_*(T,\lambda) = -S'_*(T,\lambda) = \psi_*(T,\lambda) = 1, \qquad C'_*(\pi,\lambda) = S_*(\pi,\lambda) = 0, \qquad \psi'_*(T,\lambda) = -H.$$

Тогда

$$V(\psi_*) = 0, \qquad \psi_*(x,\lambda) = C_*(x,\lambda) + HS_*(x,\lambda).$$

Из (6) при $\mu = \lambda$ вытекает, что

$$\begin{aligned} S(\pi,\lambda) &\equiv S_*(0,\lambda), & S'(\pi,\lambda) &\equiv C_*(0,\lambda),\\ C(\pi,\lambda) &\equiv -S'_*(0,\lambda), & C'(\pi,\lambda) &\equiv -C_*(0,\lambda). \end{aligned} \tag{8}$$

Обозначим

$$\Delta^*(\lambda) := -U(\psi_*) = -\psi'_*(0,\lambda) + h\psi_*(0,\lambda), \qquad \Delta_1^*(\lambda) := \psi_*(0,\lambda).$$

Используя (8), вычисляем

$$\begin{gathered} \Delta_1^*(\lambda) = C_*(0,\lambda) + HS_*(0,\lambda) = S'(T,\lambda) + HS(T,\lambda) = \Delta_1(\lambda),\\ \Delta^*(\lambda) = -C'_*(0,\lambda) - HS'_*(0,\lambda) + hC_*(0,\lambda) + hHS_*(0,\lambda) =\\ = C'(T,\lambda) + HC(T,\lambda) + hS'(T,\lambda) + hHS(T,\lambda) = \varphi'(T,\lambda) + H\varphi(T,\lambda) = \Delta_1(\lambda) \end{gathered}$$

и, следовательно,

$$\Delta_1^*(\lambda) \equiv \Delta_1(\lambda), \qquad \Delta^*(\lambda) \equiv \Delta(\lambda). \tag{9}$$

Пусть $\Phi_*(x,\lambda)$ — решение уравнения (7) при условиях $U(\Phi_*) = 1$, $V(\Phi_*) = 0$. Обозначим $N^*(\lambda) := \Phi_*(0,\lambda)$. Тогда

$$\Phi_*(x,\lambda) = \frac{\psi_*(x,\lambda)}{U(\psi)}, \qquad N^*(\lambda) = \frac{\psi_*(0,\lambda)}{U(\psi)} = -\frac{\Delta_1^*(\lambda)}{\Delta^*(\lambda)}\,.$$

Вместе с (9) это дает $N^*(\lambda) \equiv N(\lambda)$.

Известно, что существует фундаментальная система решений $\{y_1(x,\rho), y_2(x,\rho)\}$, $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, $x \in [0,\pi]$, уравнения (1) такая, что при $|\rho| \to \infty$, $\nu = 0,1$, имеем:

$$y_1^{(\nu)}(x,\rho) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x) + O(\rho^{-1}), \qquad y_2^{(\nu)}(x,\rho) = (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x)(1 + O(\rho^{-1})).$$

Аналогично существует фундаментальная система решений $\{z_1(x,\rho), z_2(x,\rho)\}$, $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, $x \in [0,\pi]$, уравнения (7) такая, что при $|\rho| \to \infty$, $\nu = 0,1$, имеем:

$$\begin{gathered} z_1^{(\nu)}(x,\rho) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x)(1 + O(\rho^{-1})),\\ z_2^{(\nu)}(x,\rho) = (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x) + O(\rho^{-1}\exp(-i\rho\pi)). \end{gathered}$$

Зафиксируем δ, $\varepsilon \in (0,\pi/2)$. Обозначим $Q := \{\rho :\ \arg\rho \in [\delta, \pi-\delta]\}$. Используя эти фундаментальные системы решений, получаем

$$\Phi(x,\lambda) = A_1(\rho)y_1(x,\rho) + A_2(\rho)y_2(x,\rho), \qquad \Phi_*(x,\lambda) = A_1^*(\rho)z_1(x,\rho) + A_2^*(\rho)z_2(x,\rho),$$

где $A_k(\rho)$ и $A_k^*(\rho)$ не зависят от x. Коэффициенты $A_k(\rho)$ и $A_k^*(\rho)$ вычисляются с помощью краевых условий $U(\Phi) = 1$, $V(\Phi) = 0$, $U(\Phi_*) = 1$, $V(\Phi_*) = 0$. Это дает следующую асимптотику при $\rho \in Q$, $|\rho| \to \infty$, равномерно по $x \in [0, \pi - \varepsilon]$:

$$\begin{gathered}\Phi(x,\lambda) = (i\rho)^{-1}\exp(i\rho x)(1 + O(\rho^{-1})) + O(\rho^{-1}),\\ \Phi_*(x,\lambda) = (i\rho)^{-1}\exp(i\rho x)(1 + O(\rho^{-1})).\end{gathered} \tag{10}$$

4. Получим теперь алгоритм решения обратной задачи 1. Для этого наряду с L рассмотрим краевую задачу $\tilde{L} := L(M, \tilde{q}, \tilde{h}, \tilde{H})$ того же вида, но с другими коэффициентами. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к L, то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{L}$, и $\hat{\alpha} := \alpha - \tilde{\alpha}$.

Лемма 1. *Пусть $M(x,t) \equiv \tilde{M}(x,t)$, $h = \tilde{h}$, $H = \tilde{H}$. Тогда*

$$\int_0^T \hat{q}(x)\Phi(x,\lambda)\tilde{\Phi}_*(x,\lambda)\,dx \equiv \hat{N}(\lambda), \tag{11}$$

где $\hat{q}(x) = q(x) - \tilde{q}(x)$, $\hat{N}(\lambda) = N(\lambda) - \tilde{N}(\lambda)$.

Доказательство. Имеем

$$-\Phi''(x,\lambda) + q(x)\Phi(x,\lambda) + \int_0^x M(x,t)\Phi(t,\lambda)\,dt = \lambda\Phi(x,\lambda),$$

$$-\tilde{\Phi}_*''(x,\lambda) + \tilde{q}(x)\tilde{\Phi}_*(x,\lambda) + \int_x^T M(t,x)\tilde{\Phi}_*(t,\lambda)\,dt = \lambda\tilde{\Phi}_*(x,\lambda).$$

Умножим первое соотношение на $\tilde{\Phi}_*(x,\lambda)$, затем вычтем второе соотношение, умноженное на $\Phi(x,\lambda)$, и проинтегрируем по x :

$$\int_0^T \hat{q}(x)\Phi(x,\lambda)\tilde{\Phi}_*(x,\lambda)\,dx + \int_0^T \tilde{\Phi}_*(x,\lambda)\,dx \int_0^x M(x,t)\Phi(t,\lambda)\,dt -$$

$$- \int_0^T \Phi(x,\lambda)\,dx \int_x^T M(t,x)\tilde{\Phi}_*(t,\lambda)\,dt = \Big|_0^T \Big(\Phi'(x,\lambda)\tilde{\Phi}_*(x,\lambda) - \Phi(x,\lambda)\tilde{\Phi}_*'(x,\lambda)\Big).$$

Учитывая соотношение $N^*(\lambda) \equiv N(\lambda)$, приходим к (11). □

Лемма 2. *Пусть*

$$r(x) = \frac{x^k}{k!}\Big(\gamma + p(x)\Big), \quad H(x,\rho) = \exp(2i\rho x)\Big(1 + \frac{\xi(x,\rho)}{\rho}\Big) + \exp(i\rho x)\frac{\eta(x,\rho)}{\rho}, \quad x \in [0,T],$$

где $p(x) \in C[0,T]$, $p(0) = 0$, а функции $\xi(x,\rho)$, $\eta(x,\rho)$ являются непрерывными и ограниченными при $x \in [0,T]$, $\rho \in Q$, $|\rho| \geqslant \rho^*$. Тогда при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in Q$, имеем:

$$\int_0^T r(x)H(x,\rho)\,dx = \frac{1}{(-2i\rho)^{k+1}}(\gamma + o(1)).$$

Доказательство. Вычисляем

$$(-2i\rho)^{k+1}\int\limits_0^T r(x)H(x,\rho)\,dx = I_1(\rho)+I_2(\rho)+I_3(\rho)+I_4(\rho),$$

где

$$I_1(\rho)=\gamma(-2i\rho)^{k+1}\int\limits_0^T \frac{x^k}{k!}\exp(2i\rho x)\,dx,$$

$$I_2(\rho)=(-2i\rho)^{k+1}\int\limits_0^T \frac{x^k}{k!}p(x)\exp(2i\rho x)\,dx,$$

$$I_3(\rho)=(-2i)^{k+1}\rho^k\int\limits_0^T r(x)\exp(2i\rho x)\xi(x,\rho)\,dx,$$

$$I_4(\rho)=(-2i)^{k+1}\rho^k\int\limits_0^T r(x)\exp(i\rho x)\eta(x,\rho)\,dx,$$

Так как

$$(-2i\rho)^{k+1}\int\limits_0^\infty \frac{x^k}{k!}\exp(2i\rho x)\,dx = 1,\qquad \rho\in Q,$$

$$(-2i\rho)^{k+1}\int\limits_T^\infty \frac{x^k}{k!}\exp(2i\rho x)\,dx = o(1),\qquad \rho\in Q,\qquad |\rho|\to\infty,$$

то $I_1(\rho)-\gamma\to 0$ при $|\rho|\to\infty$, $\rho\in Q$. Если $\rho\in Q$, то существует $\varepsilon_0>0$ такое, что

$$|\operatorname{Im}\rho|\geqslant\varepsilon_0|\rho|\qquad\text{при}\qquad\rho\in Q. \tag{12}$$

Возьмем $\varepsilon>0$ и выберем $\delta=\delta(\varepsilon)$ так, чтобы $|p(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}\,\varepsilon_0^{k+1}$ при $x\in[0,\delta]$, где ε_0 определено в (12). Тогда, используя (12), вычисляем

$$|I_2(\rho)|<\frac{\varepsilon}{2}(2|\rho|\varepsilon_0)^{k+1}\int\limits_0^\delta \frac{x^k}{k!}\exp(-2\varepsilon_0|\rho|x)\,dx+(2|\rho|)^{k+1}\int\limits_\delta^T \frac{x^k}{k!}|p(x)|\exp(-2\varepsilon_0|\rho|x)\,dx<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+(2|\rho|)^{k+1}\exp(-2\varepsilon_0|\rho|\delta)\int\limits_0^{T-\delta}\frac{(x+\delta)^k}{k!}|p(x+\delta)|\exp(-2\varepsilon_0|\rho|x)\,dx.$$

В силу произвольности ε получаем $I_2(\rho)\to 0$ при $|\rho|\to\infty$, $\rho\in Q$.

Так как $|(\gamma+p(x))\xi(x,\rho)|<C$, то при $|\rho|\to\infty$, $\rho\in Q$ имеем

$$|I_3(\rho)|<C|\rho|^k\int\limits_0^T \frac{x^k}{k!}\exp(-2\varepsilon_0|\rho|x)\,dx\leqslant\frac{C}{|\rho|\varepsilon_0^{k+1}},$$

следовательно, $I_3(\rho) \to 0$ при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in Q$. Аналогично получаем $I_4(\rho) \to 0$ при $|\rho| \to \infty$, $\rho \in Q$. $\square$

Для простоты предположим, что функция $q(x)$ является аналитической на $[0, T]$. Пусть при некотором фиксированном $k \geqslant 0$ коэффициенты Тейлора $q_j := q^{(j)}(0)$, $j = \overline{0, k-1}$ уже найдены. Выберем модельный потенциал $\tilde{q}(x)$ так, чтобы первые k коэффициентов Тейлора функций q и $\tilde{q}$ совпадали, т. е. $\tilde{q}_j = q_j$, $j = \overline{0, k-1}$. Тогда, используя (10), (11) и лемму 2, можно вычислить следующий коэффициент Тейлора $q_k = q^{(k)}(0)$. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Зафиксируем k. Пусть функции $q(x)$ и $\tilde{q}(x)$ являются аналитическими при $x \in [0, T]$ с $\hat{q}_j := q_j - \tilde{q}_j = 0$ для $j = \overline{0, k-1}$. Тогда*

$$\hat{q}_k = (-2)^{k+1} \lim_{\substack{|\rho| \to \infty \\ \rho \in Q}} (i\rho)^{k+3} \hat{N}(\lambda). \tag{13}$$

Таким образом, мы приходим к следующему алгоритму решения обратной задачи 1.

Алгоритм. Пусть задана функция Вейля $N(\lambda)$.

1. Вычисляем $q_k = q^{(k)}(0)$, $k \geqslant 0$. Для этого последовательно выполняем следующие операции при $k = 0, 1, 2, \ldots$: выбираем модельный потенциал $\tilde{q}(x)$ так, чтобы $\tilde{q}_j = q_j$, $j = \overline{0, k-1}$, и вычисляем $q_k = q^{(k)}(0)$ by (13).

2. Строим функцию $q(x)$ по формуле

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \frac{x^k}{k!}, \quad 0 < x < R,$$

где

$$R = \left(\overline{\lim_{k \to \infty}} \left(\frac{|q_k|}{k!} \right)^{1/k} \right)^{-1}.$$

Если $R < \pi$, то при $R < x < \pi$ функция $q(x)$ строится по аналитическому продолжению.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01193).

Библиографический список

1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 393 с.
2. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М. : Наука, 1984. 246 с.
3. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse Sturm – Liouville Problems and their Applications. N. Y. : NOVA Sci. Publ., 2001. 305 p.
4. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and Inverse Scattering on the Line. (Math. Surveys and Monographs. Vol. 28). Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1988. 209 p.
5. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002. 316 p.
6. *Yurko V. A.* Inverse Spectral Problems for Differential Operators and their Applications. Amsterdam : Gordon and Breach, 2000. 265 p.
7. *Lakshmikantham V., Rama Mohana Rao M.* Theory of Integro-differential Equations. (Stability and Control : Theory and Applications. Vol. 1). Singapure : Gordon and Breach, 1995. 308 p.

8. *Юрко В. А.* Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1991. Т. 50, вып. 5. С. 134–146.
9. *Kuryshova Yu.* An inverse spectral problem for differential operators with integral delay // Tamkang J. Math. 2011. Vol. 42, № 3. P. 295–303.
10. *Buterin S.* On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Results in Math. 2007. Vol. 50. P. 173–181.
11. *Бутерин С. А.* О восстановлении сверточного возмущения оператора Штурма – Лиувилля по спектру // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 1. С. 146–149.

Образец для цитирования:
Игнатьев М. Ю., Советникова С. Ю. О восстановлении интегродифференциальных операторов по функции Вейля // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 3. С. 276–284. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-276-284.

On Recovering Integro-Differential Operators from the Weyl Function

M. Yu. Ignatiev[1], S. Yu. Sovetnikova[2]

[1]Mikhail Yu. Ignatiev, ORCID: 0000-0002-4354-9197, Saratov State University, Astrakhanskaya Str., 83, Saratov, Russia, 410012, IgnatievMU@info.sgu.ru
[2]Svetlana Yu. Sovetnikova, ORCID: 0000-0002-5703-8195, Saratov State University, Astrakhanskaya Str., 83, Saratov, Russia, 410012, sovetnikovasy@mail.ru

We study inverse problems of spectral analysis for second order integro-differential operators, which are a perturbation of the Sturm – Liouville operator by the integral Volterra operator. We pay the main attention to the nonlinear inverse problem of recovering the potential from the given Weyl function provided that the kernel of the integral operator is known a priori. We obtain properties of the spectral characteristics and the Weyl function, provide an algorithm for constructing the solution of the inverse problem and establish the uniqueness of the solution. For solving the inverse problem we use the method of standard models.

Key words: integro-differential operators, inverse spectral problems, uniqueness result, algorithm.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01193).

References

1. Marchenko V. A. *Sturm – Liouville operators and their applications*. Birkhäuser, 1986. 393 p. (Russ. ed. : Kiev, Naukova Dumka, 1977. 393 p.)
2. Levitan B. M. *Inverse Sturm – Liouville problems*. Utrecht, VNU Sci. Press, 1987. 246 p. (Russ. ed. : Moscow, Nauka, 1984. 246 p.)
3. Freiling G., Yurko V. A. *Inverse Sturm – Liouville Problems and their Applications*. New York, NOVA Sci. Publ., 2001. 305 p.
4. Beals R., Deift P., Tomei C. *Direct and Inverse Scattering on the Line*. (Math. Surveys and Monographs, vol. 28), Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1988. 209 p.
5. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, VSP, 2002. 316 p.
6. Yurko V. A. *Inverse Spectral Problems for Differential Operators and their Applications*. Amsterdam, Gordon and Breach, 2000. 265 p.

7. Lakshmikantham V., Rama Mohana Rao M. *Theory of integro-differential equations*. (Stability and Control: Theory and Applications, vol.1), Singapure, Gordon and Breach, 1995. 308 p.
8. Yurko V. A. An inverse problem for integro-differential operators. *Math. Notes*, 1991, vol. 50, iss. 5–6, pp. 1188–1197.
9. Kuryshova Yu. An inverse spectral problem for differential operators with integral delay. *Tamkang J. Math.*, 2011, vol. 42, no. 3, pp. 295–303.
10. Buterin S. A. On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator. *Results in Math.*, 2007, vol. 50, pp. 173–181.
11. Buterin S. A. On the reconstruction of a convolution perturbation of the Sturm – Liouville operator from the spectrum. *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 1, pp. 150–154.

Cite this article as:

Ignatiev M. Yu., Sovetnikova S. Yu. On Recovering Integro-differential Operators From the Weyl Function. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 3, pp. 276–284 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-276-284.