УДК 517.9

ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И РАСЩЕПЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ

Л. Ю. Кабанцова

Кабанцова Лариса Юрьевна, преподаватель кафедры нелинейных колебаний, Воронежский государственный университет, 394006, Россия, Воронеж, Университетская пл., 1, dlju@yandex.ru

В классических учебниках по дифференциальным и разностным уравнениям описан прием сведения дифференциальных и разностных уравнений n-го порядка стандартной заменой к системе дифференциальных и соответственно разностных уравнений первого порядка. Каждое из этих уравнений можно записать в операторном виде. Естественным образом возникает вопрос о совпадении ряда свойств дифференциальных и разностных уравнений (операторов) второго порядка и соответствующих операторных уравнений (операторов) первого порядка. В статье рассматривается линейное разностное уравнение второго порядка в комплексном банаховом пространстве с ограниченными операторными коэффициентами. В первой теореме установлена одновременная обратимость разностного оператора второго порядка и соответствующего разностного оператора первого порядка, приведена формула для обратного оператора. Все дальнейшие исследования проводятся в условиях наличия разделённых корней соответствующего «алгебраического» операторного уравнения. В этих условиях в теореме 2 установлено подобие операторной матрицы второго порядка блочно-диагональной операторной матрице. При условии разделённости пары операторных корней в теореме 3 получено необходимое и достаточное условие обратимости разностных операторов второго и первого порядка. В теореме 4 получено представление (формулы) обратных операторов к рассматриваемым. В теоремах 5 и 6 для ограниченных решений на множестве целых неотрицательных чисел получено асимптотическое представление этих решений с помощью операторнозначных функций, которое можно назвать разложением на бесконечности.

Ключевые слова: банахово пространство, разностное уравнение второго порядка, расщепление операторов.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-285-293

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство и $\mathrm{End}\mathscr{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{X}$. Через $\mathscr{X}^2 = \mathscr{X} \times \mathscr{X}$ обозначается банахово пространство, элементами которого являются упорядоченные пары $x = (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathscr{X}$, а норма задаётся формулой $\|(x_1, x_2)\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$. Символом $l^p = l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначается банахово пространство двухсторонних последовательностей векторов из $\mathscr{X}$ с нормой

$$\|x\| = \|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|^p\right)^{1/p}, \qquad x \in l^p, \qquad p \in [1, \infty),$$
$$\|x\| = \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|, \qquad x \in l^\infty.$$

Каждому оператору $X \in \operatorname{End}\mathscr{X}^2$ поставим в соответствие операторную матрицу $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$, где $X_{ij} \in \operatorname{End}\mathscr{X}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 2)$. Действие оператора X на элемент $(x_1, x_2) \in \mathscr{X}^2$ определяется формулой $X(x_1, x_2) = (X_{11}x_1 + X_{12}x_2, X_{21}x_1 + X_{22}x_2)$.

В пространстве $l^p = l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X})$ рассматривается разностное уравнение второго порядка

$$x(n+2) + B_1x(n+1) + B_2x(n) = g(n), \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где B_1, $B_2 \in \operatorname{End}\mathscr{X}$, $g \in l^p$. Это уравнение запишем в виде $\mathrm{L}x = g$, где разностный оператор второго порядка $\mathrm{L} : l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}) \to l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X})$ действует по правилу

$$(\mathrm{L}x)(n) = x(n+2) + B_1x(n+1) + B_2x(n), \qquad x \in l^p, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Наряду с уравнением (1) выпишем разностное уравнение первого порядка вида

$$y(n+1) + \mathbb{B}y(n) = f(n), \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad f = (f_1, f_2) \in l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2), \tag{2}$$

рассматриваемое в банаховом пространстве $l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2)$ (изоморфном пространству $l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}) \times l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X})$). Оператор $\mathbb{B} \in \operatorname{End}\mathscr{X}^2$ определяется матрицей

$$\mathbb{B} \sim \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix},$$

т. е. $\mathbb{B}(y_1, y_2) = (-y_2, B_2y_1 + B_1y_2)$ для $(y_1, y_2) \in \mathscr{X}^2$.

Отметим, что разностное уравнение (1) переходит в уравнение (2) (ему эквивалентно), если $f(n) = (0, g(n))$.

Уравнение (2) допускает запись в операторном виде

$$(\mathbb{L}y)(n) = f(n), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

где оператор $\mathbb{L} : l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2) \to l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2)$ действует по правилу

$$\mathbb{L} : \begin{pmatrix} x \\ Sx \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} S & -I \\ B_2 & S + B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ Sx \end{pmatrix}, \qquad x \in l^p.$$

Здесь через S обозначен оператор сдвига последовательностей из l^p: $S \in \operatorname{End}l^p$, $(Sx)(n) = x(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l^p$.

В классических учебниках по дифференциальным уравнениям описан прием сведения дифференциального уравнения n-го порядка стандартной заменой к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Каждое из соответствующих уравнений можно записать в операторном виде. Естественным образом возникает вопрос о совпадении ряда свойств соответствующих дифференциальных операторов. Такая же проблема возникает при рассмотрении разностных уравнений. В статье [1] были получены результаты о совпадении ряда свойств введенных в рассмотрение операторов $\mathrm{L} : l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}) \to l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X})$ и оператора $\mathbb{L} : l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2) \to l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2)$. В частности, было установлено, что эти операторы одновременно обратимы, одновременно фредгольмовы и т. д.

Основные результаты статьи содержатся в шести теоремах.

В теореме 1 установлена одновременная обратимость операторов L и $\mathbb{L}$ и получена формула для обратного оператора $\mathbb{L}^{-1}$.

Дальнейшее исследование разностных уравнений (1), (2) проводится с использованием корней «алгебраического» операторного уравнения:

$$X^2 + B_1 X + B_2 = 0, \tag{3}$$

рассматриваемого в банаховой алгебре $\mathrm{End}\mathscr{X}$. Подобный метод изучения дифференциальных уравнений второго порядка был предложен в [2] и показал свою эффективность.

Уравнение (3) может иметь, вообще говоря, бесчисленное множество корней. Два корня Λ_1 и Λ_2 назовём *разделёнными*, если оператор $\Lambda_1 - \Lambda_2$ обратим в алгебре $\mathrm{End}\mathscr{X}$. Условия существования таких корней приведены, например, в [3, гл. II, § 4, с. 134–135]. В монографии [4, гл. I, § 5] определены дробные степени операторов. В частности, уравнение (3), где $B_1 = 0$ имеет два разделённых корня $\pm\sqrt{-B_2}$, если оператор B_2 обратим и число нуль лежит в одной компоненте связности резольвентного множества $\varrho(-B_2)$ оператора $-B_2$ и точки ∞ (из расширенной плоскости).

В теореме 2 в условии разделенных корней Λ_1 и Λ_2 уравнения (3) доказано подобие оператора $\mathbb{B}$ блочно-диагональному оператору и выписана формула для оператора преобразования.

В теореме 3 получено необходимое и достаточное условие обратимости операторов L и $\mathbb{L}$ в терминах спектра операторных корней.

В теореме 4 получены формулы для обратных операторов к L и $\mathbb{L}$ с использованием корней Λ_1 и Λ_2.

В теоремах 5 и 6 получено асимптотическое представление для ограниченного решения рассматриваемого однородного разностного уравнения.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Естественным образом возникает вопрос об одновременной обратимости оператора $\mathrm{L} : l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}) \to l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X})$ и оператора $\mathbb{L} : l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2) \to l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2)$. Ответ на этот вопрос даёт

Теорема 1. *Оператор* $\mathrm{L} : l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}) \to l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X})$ *обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор* $\mathbb{L} : l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2) \to l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2)$.

Если оператор $\mathrm{L} : l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}) \to l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X})$ *обратим, то обратный к* $\mathbb{L} : l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2) \to l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2)$ *оператор* $\mathbb{L}^{-1} \in \mathrm{End}\mathscr{X}^2$ *определяется матрицей*

$$\begin{pmatrix} S^{-1} - \mathrm{L}^{-1} B_2 S^{-1} & \mathrm{L}^{-1} \\ -S\,\mathrm{L}^{-1} B_2 S^{-1} & S\,\mathrm{L}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Теорема 1 позволяет использовать результаты работ [3–9].

Через $A_1 \oplus A_2$, $A_1, A_2 \in \mathrm{End}\mathscr{X}$ обозначим прямую сумму операторов, определяемых блочно-диагональной матрицей $A_1 \oplus A_2 \sim \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

Одним из основных результатов статьи является

Теорема 2. *Если уравнение* (3) *имеет два разделённых корня* $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathrm{End}\mathscr{X}$, *то оператор* $\mathbb{B} \in \mathrm{End}\mathscr{X}^2$ *подобен блочно-диагональному оператору* $\Lambda \in \mathrm{End}\mathscr{X}^2$, *задаваемому матрицей*

$$\Lambda \sim \begin{pmatrix} -\Lambda_1 & 0 \\ 0 & -\Lambda_2 \end{pmatrix}.$$

При этом имеют место соотношения

$$\mathbb{B} = U^{-1}\Lambda U, \qquad \mathbb{B}^n = U^{-1}(\Lambda_1^n \oplus \Lambda_2^n)U. \tag{5}$$

Здесь операторы U, $U^{-1} \in \mathrm{End}\mathscr{X}^2$ *определяются соответственно матрицами*

$$U \sim \mathscr{U} = \begin{pmatrix} I & I \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad U^{-1} \sim \mathscr{U}^{-1} = \begin{pmatrix} -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Из подобия операторов $\mathbb{B}$ и Λ, а также из соотношения (5) следует

Теорема 3. *Пусть* Λ_1, Λ_2 — *разделённая пара корней уравнения* (3). *Тогда для обратимости операторов* $\mathrm{L} : l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}) \to l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X})$ *и* $\mathbb{L} : l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2) \to l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2)$ *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$(\sigma(\Lambda_1) \cup \sigma(\Lambda_2)) \cap \mathbb{T} = \varnothing, \tag{7}$$

где $\sigma(\Lambda_k)$ — *спектры операторов* Λ_k, $k = 1, 2$, $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

В условиях следующей теоремы рассматривается разделённая пара корней Λ_1, Λ_2 уравнения (3), для которых выполнено условие (7). Так как спектр каждого из операторов Λ_1, Λ_2 не пересекается с единичной окружностью $\mathbb{T}$, то имеет место представление $\sigma(\Lambda_k) = \sigma_k^- \bigcup \sigma_k^+$, $k = 1, 2$, где спектральные множества определяются следующим образом $\sigma_k^- = \{\lambda \in \sigma(\Lambda_k) : \ |\lambda| < 1\}$, $\sigma_k^+ = \{\lambda \in \sigma(\Lambda_k) : |\lambda| > 1\}$, $k = 1, 2$. Множества σ_k^-, σ_k^+ являются непересекающимися и замкнутыми [10, следствие леммы 1]. Через $P_k^{\mp}$ обозначим спектральные проекторы Рисса, отвечающие спектральным множествам $\sigma_k^{\mp}$, $k = 1, 2$.

Рассмотрим два оператора свёртки

$$(G_k * g)(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G_k(n-m)g(m), \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad g \in l^p, \qquad k = 1, 2,$$

где

$$G_k(n) = \begin{cases} -\Lambda_k^n P_k^+, & n \leqslant 0, \\ \Lambda_k^n P_k^-, & n \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \end{cases} \tag{8}$$

есть функция Грина, построенная по соответствующему разностному уравнению:

$$x(n+1) = \Lambda_k x(n), \qquad k = 1, 2, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (7). *Обратные к* L *и* $\mathbb{L}$ *операторы имеют вид*

$$\mathrm{L}^{-1}g = (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2(G_2 - G_1) * g, \qquad g \in l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}), \tag{9}$$

$$\mathbb{L}^{-1}f = \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2), \qquad f = (f_1, f_2) \in l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2),$$

где

$$\varphi_1 = (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(-\Lambda_2 G_1 * (f_1 + f_2) + G_2 * (\Lambda_1 f_1 + \Lambda_2 f_2)),$$
$$\varphi_2 = (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(\Lambda_1 G_1 * (f_1 + f_2) - G_2 * (\Lambda_1 f_1 + \Lambda_2 f_2)).$$

Полученное в теореме 2 представление (5) операторной степени позволяет (с использованием результатов статьи [11]) получить асимптотическое представление ограниченных при $n \in \mathbb{Z}_+$ решений однородного разностного уравнения:

$$x(n+2) + B_1 x(n+1) + B_2 x(n) = 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{10}$$

Имеет место

Теорема 5. *Пусть* Λ_1, Λ_2 *— разделённые корни уравнения* (3), *все решения разностного уравнения* (10) *ограничены на* $\mathbb{Z}_+$, *и множество*

$$(\sigma(-\Lambda_1) \cup \sigma(-\Lambda_2)) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\} \tag{11}$$

является конечным. Тогда существуют проекторнозначные функции:

$$\mathbb{P}_k : \mathbb{Z}_+ \to \mathrm{End}\mathscr{X}^2, \qquad \mathbb{P}_k \in l^\infty(\mathbb{Z}_+, \mathrm{End}\mathscr{X}^2), \qquad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

такие, что для любого ограниченного решения $x : \mathbb{Z}_+ \to \mathscr{X}$ *однородного разностного уравнения* (10) *имеет место представление*

$$(x(n), x(n+1)) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^n \mathbb{P}_k(n)(x(0), x(1)), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Функции $\mathbb{P}_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, *обладают следующими свойствами:*

1) операторы $\mathbb{P}_k(n) \in \mathrm{End}\mathscr{X}^2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant k \leqslant m$, *принадлежат наименьшей замкнутой подалгебре, порождённой оператором* $\mathbb{B}$ *и тождественным оператором* $\mathbb{I} \in \mathrm{End}\mathscr{X}^2$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbb{P}_k(n+1) - \mathbb{P}_k(n)\| = 0$, $1 \leqslant k \leqslant m$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbb{B}\mathbb{P}_k(n) - \gamma_k \mathbb{P}_k(n)\| = 0$, $1 \leqslant k \leqslant m$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbb{P}_k(n)\mathbb{P}_j(n)\| = 0$ *для* $k \neq j$, $1 \leqslant k, j \leqslant m$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^m \mathbb{P}_k(n) - \mathbb{I}\| = 0$.

Теорема 5 следует из [11, теорема 1].

Теорема 6. *При выполнении условия* (11) *каждое ограниченное решение* $x_0 : \mathbb{Z}_+ \to \mathscr{X}$ *однородного разностного уравнения* (10) *представимо в виде*

$$x_0(n) = \sum_{k=1}^{m} a_k(n) \gamma_k^n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{12}$$

где функции $a_k : \mathbb{Z}_+ \to \mathscr{X}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, *принадлежат* $l^\infty(\mathbb{Z}_+, \mathscr{X})$ *и обладают свойством*

$$\lim_{n\to\infty} (a_k(n+1) - a_k(n)) = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Заметим, что в условиях теорем 5 и 6 числа $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ могут находиться в одной компоненте связности множества $(\sigma(-\Lambda_1) \cup \sigma(-\Lambda_2)) \cap \mathbb{T}$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1–6

Доказательство теоремы 1. Пусть оператор L обратим. Вначале докажем инъективность оператора $\mathbb{L}$, т. е. установим равенство $\operatorname{Ker}\mathbb{L} = \{0\}$, где $\operatorname{Ker}\mathbb{L} = \{y(n) = (y_1(n), y_2(n)) \in l^p \times l^p = D(\mathbb{L}) \mid (\mathbb{L}y)(n) = 0\}$. Пусть $y(n) = (y_1(n), y_2(n)) \in \operatorname{Ker}\mathbb{L}$. Тогда $y_1(n+1) = y_2(n)$, $y_2(n+1) = -B_2y_1(n) - B_1y_2(n)$ и, следовательно, $y_1(n) \in l^p = D(\mathrm{L})$ и $(\mathrm{L}y_1)(n) = 0$, т. е. $y_1(n) \in \operatorname{Ker}\mathrm{L} = \{0\}$. Поэтому $y_2(n) = 0$ и $y(n) = (y_1(n), y_2(n)) = 0$, таким образом, $\operatorname{Ker}\mathbb{L} = \{0\}$.

Проверим теперь, что оператор $\mathbb{L}$ сюръективен. Рассмотрим уравнение $(\mathbb{L}y)(n) = f(n)$, где $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = (f_1(n), f_2(n))$ — произвольная последовательность из $l^p(\mathbb{R}, \mathscr{X}^2) \simeq l^p \times l^p$. Оператор S обратим в l^p (см. [7]), а оператор L допускает представление в виде

$$\mathrm{L} = S^2 + B_1S + B_2.$$

Непосредственно проверяется, что уравнение $(\mathbb{L}y)(n) = f(n)$ разрешимо, и его решение $y(n) = (y_1(n), y_2(n)) \in l^p \times l^p$ имеет вид

$$y_1(n) = (S^{-1} - \mathrm{L}^{-1}B_2S^{-1})f_1(n) + \mathrm{L}^{-1}f_2(n),$$
$$y_2(n) = (-S\mathrm{L}^{-1}B_2S^{-1})f_1(n) + S\mathrm{L}^{-1}f_2(n).$$

Из указанного представления решения следует, что обратный к оператору $\mathbb{L}$ задаётся матрицей (4).

Пусть теперь обратим оператор $\mathbb{L}$. Проверим, что оператор L инъективен. Пусть $x(n) \in \operatorname{Ker}\mathrm{L}$. Покажем, что $x(n) = 0$. Заметим, что $(x(n), x(n+1)) \in D(\mathbb{L}) = l^p \times l^p$ и $\mathbb{L}(x(n), x(n+1)) = (Sx(n) - Sx(n), B_2x(n) + (S + B_1)Sx(n)) = (0, \mathrm{L}x(n)) = (0, 0)$. Из инъективности оператора $\mathbb{L}$ следует, что $x(n) = 0$.

Докажем сюръективность оператора L. Рассмотрим уравнение $(\mathrm{L}x)(n) = g(n)$, где $g(n)$ — произвольная последовательность из l^p. Из обратимости оператора $\mathbb{L}$ следует, что существует решение $y(n) = (x_1(n), x_2(n)) \in l^p \times l^p$ уравнения $(\mathbb{L}y)(n) = (0, g(n))$. Таким образом, имеют место равенства

$$x_1(n+1) - x_2(n) = 0, \qquad x_2(n+1) + B_2x_1(n) + B_1x_2(n) = g(n).$$

Следовательно, $x_1(n) \in l^p = D(\mathrm{L})$ и $(\mathrm{L}x_1)(n) = g(n)$, что и доказывает сюръективность оператора L. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 2. Условие разделённости корней Λ_1 и Λ_2 влечёт обратимость оператора $\Lambda_1 - \Lambda_2$. Непосредственная проверка показывает, что обратным к оператору U является оператор с матрицей $\mathscr{U}^{-1}$ из (6) и имеет место первое из равенств (5). Второе равенство для операторных степеней вытекает из подобия операторов $\mathbb{B}$ и Λ. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 3 следует из равенств $\sigma(\mathbb{B}) = \sigma(\Lambda)$ (подобные операторы имеют одинаковые спектры), $\sigma(\Lambda) = -\sigma(\Lambda_1) \cup (-\sigma(\Lambda_2))$, выполнения условия (7) и соответствующего результата из [10, терема 7]. □

Доказательство теоремы 4. Введём в рассмотрение операторы $\mathrm{L}_k : l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}) \to l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X})$, определяемые равенствами $(\mathrm{L}_kx)(n) = x(n+1) - \Lambda_kx(n)$, $x \in l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X})$, $k = 1, 2$, $n \in \mathbb{Z}$. Согласно [10, терема 7] при выполнении условия (7) каждый из разностных операторов L_k, $k = 1, 2$, обратим, и обратные к ним операторы являются операторами свёртки

$$(\mathrm{L}_k^{-1}y)(n) = (G_k * y)(n), \qquad y \in l^p, \qquad k = 1, 2, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

где G_k, $k = 1, 2$, задаётся равенством (8). Из теоремы 2 вытекает подобие разностного оператора $\mathbb{L}$ прямой сумме $\mathrm{L}_1 \oplus \mathrm{L}_2 : l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2) \to l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2)$, а оператором преобразования оператора $\mathbb{L}$ в оператор $\mathrm{L}_1 \oplus \mathrm{L}_2$ является оператор $\widetilde{U} : l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2) \to l^p(\mathbb{Z}, \mathscr{X}^2)$ умножения на оператор U из (6). Таким образом, имеют место равенства

$$\mathbb{L} = U^{-1}(\mathrm{L}_1 \oplus \mathrm{L}_2)U, \qquad \mathbb{L}^{-1} = U^{-1}(\mathrm{L}_1^{-1} \oplus \mathrm{L}_2^{-1})U.$$

Отсюда с учётом представлений для L_k^{-1}, $k = 1, 2$, вытекает указанное в теореме представление для оператора $\mathbb{L}^{-1}$. Из него следует формула (9) для оператора L^{-1}, если положить $f_1 = 0$, $f_2 = g$ и учесть перестановочность оператора Λ_2 с функцией Грина G_2. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 5. Ограниченность на $\mathbb{Z}_+$ всех решений однородного разностного уравнения (10) влечёт ограниченность всех решений однородного разностного уравнения:

$$y(n+1) + \mathbb{B}y(n) = 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{13}$$

Поскольку спектр $\sigma(\mathbb{B})$ оператора $\mathbb{B}$ согласно теореме 2 совпадает с множеством $\sigma(-\Lambda_1) \cup \sigma(-\Lambda_1)$, то условие (11) означает, что

$$\sigma(\mathbb{B}) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}. \tag{14}$$

Каждое ограниченное на $\mathbb{Z}_+$ решение $x \in l^p(\mathbb{Z}_+, \mathscr{X})$ уравнения (10) можно представить в виде

$$(x(n), x(n+1)) = \mathbb{B}^n(x(0), x(1)), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{15}$$

Из ограниченности всех решений уравнения (13) и представления (15), а также принципа равномерной ограниченности (теорема Банаха – Штейнгауза [12, гл. II]) следует, что

$$\sup_{n \geqslant 0} \|\mathbb{B}^n\| = M(\mathbb{B}) < \infty, \tag{16}$$

где $\mathbb{B}$ — оператор из $\mathrm{End}\mathscr{X}^2$. Из (16) следует, что спектральный радиус оператора $\mathbb{B}$ не превосходит единицы, т. е.

$$\sigma(\mathbb{B}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant 1\}.$$

Выполнение условия (14) позволяет воспользоваться результатом из [11, теорема 1], согласно которому существует семейство операторнозначных функций $\mathbb{P}_k : \mathbb{Z}_+ \to \mathrm{End}\mathscr{X}^2$ с указанными в теореме 5 свойствами. Теорема доказана. □

Теорема 6 является непосредственным следствием теоремы 5. Свойства функций a_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, из представления (12) вытекают из свойства 2) функций $\mathbb{P}_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$. □

Библиографический список

1. *Баскаков А. Г., Дуплищева А. Ю.* Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79, № 2. С. 3–20. DOI: 10.4213/im8248.
2. *Крейн М. Г., Лангер Г. К.* О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуума // Приложение теории функций в механике сплошной среды : тр. междунар. симпозиума в Тбилиси, 1963 : в 2 т. Т. 2 : Механика жидкости и газа, математические методы. М. : Наука, 1965. С. 283–322.

3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука, 1970. 536 с.
4. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М. : Наука, 1967. 464 с.
5. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных алгебраических уравнений. М. : Мир, 1985. 376 с.
6. *Левитан Б. М., Жиков В. Б.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 206 с.
7. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил. 1996. Т. 30, № 3. С. 1–11. DOI: 10.4213/faa534.
8. *Баскаков А. Г.* Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов // Матем. заметки. 1996. Т. 59, № 6. С. 811–820. DOI: 10.4213/mzm1780.
9. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. 2013. Т. 68, № 1. С. 77—128. DOI: 10.4213/rm9505.
10. *Баскаков А. Г., Пастухов А. И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42, № 6. С. 1231—1243.
11. *Баскаков А. Г.* Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 174–190. DOI: 10.4213/mzm10285.
12. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы : в 3 т. Т. 1. Общая теория. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 896 с.

Образец для цитирования:
Кабанцова Л. Ю. Линейные разностные уравнения второго порядка в банаховом пространстве и расщепление операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 3. С. 285–293. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-285-293.

Linear Difference Equation of Second Order in a Banach Space and Operators Splitting

L. Yu. Kabantsova

Larisa Yu. Kabantsova, ORCID: 0000-0003-4479-1062, Voronezh State University, 1, University Square, Voronezh, Russia, 394006, dlju@yandex.ru

In differential and difference equations classical textbooks, the n-th order differential and difference equations reducing by standard substitution to first-order differential and difference equations system is described. Each of the cohering equations can be written in the operator form. Naturally there is a question of coincidence of a number of properties of differential and difference equations (operators) of the second order and the corresponding functional equations (operators) of first order. In this paper we study the second order linear difference equation in the complex Banach space with bounded operator coefficients. The first theorem establishes the simultaneous invertibility of the second-order difference operator and the corresponding first-order difference operator, and the inverse operator formula is given. The research is conducted under conditions of the corresponding „algebraic“ operator equation with separated roots. Theorem2 establishes the second-order operator matrix and block-diagonal operator matrix similarity. In pair of operator roots separation condition in Theorem 3, the necessary and sufficient condition for the second and the first order difference operators invertibility is obtained. In Theorem 4 we obtain the operators under consideration inverse operators formalism (formula). In Theorems 5 and 6 for bounded solutions on the set of non-negative integers an asymptotic formalism of these solutions is obtained using operator-valued functions, this formalism can be called splitting at infinity.

Key words: Banach space, difference equation of second order, operators splitting.

References

1. Baskakov A. G., Duplishcheva A. Yu. Difference operators and operator-valued matrices of the second order. *Izv. Math.*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 217–232. DOI: 10.4213/im8248.
2. Krein M. G., Langer G. K. Certain mathematical principles of the linear theory of damped vibrations of continua. *Appl. Theory of Functions in Continuum Mechanics* (Proc. Intern. Sympos., Tbilisi, 1963), Vol. II, Fluid and Gas Mechanics, Math. Methods. Moscow, Nauka, 1965, pp. 283–322 (in Russian).
3. Daleckij Ju. L., Krejn M. G. *Ustojchivost' reshenij differencial'nyh uravnenij v banahovom prostranstve* [Stability of solutions of differential equations in a Banach space]. Moscow, Nauka, 1970. 536 p. (in Russian).
4. Krejn S. G. *Linejnye differencial'nye uravnenija v banahovom prostranstve* [Linear differential equations in Banach space]. Moscow, Nauka, 1967. 464 p. (in Russian).
5. Henry D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1981. 358 p. (Russ. ed. : Moscow, Mir, 1985. 376 p.)
6. Levitan B. M., Zikov V. V. *Pochti-periodicheskie funktsii i differentsial'nye uravneniya* [Almost-periodic functions and differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1978. 206 p. (in Russian).
7. Baskakov A. G. Semigroups of difference operators in spectral analysis of linear differential operators. *Functional Analysis and Its Applications*. 1996, vol. 30, no. 3, pp. 149–157. DOI: 10.4213/faa534.
8. Baskakov A. G. Linear differential operators with unbounded operator coefficients and semigroups of bounded operators. *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 6, pp. 586–593. DOI: 10.4213/mzm1780.
9. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Math. Surveys*. 2013, vol. 68, no. 1, pp. 69–116. DOI: 10.4213/rm9505.
10. Baskakov A. G., Pastukhov A. I. Spectral Analysis of a Weighted Shift Operator with Unbounded Operator Coefficients. *Siberian Math. J.*, 2001, vol. 42, no. 6, pp. 1026–1036. DOI: 10.1023/A:1012832208161.
11. Baskakov A. G. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. *Math. Notes*. 2015, vol. 97, no. 2, pp. 164–178. DOI: 10.4213/mzm10285.
12. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. Vol. I: General theory*. Pure Appl. Math., 7, Interscience Publ., Inc., New York; Interscience Publ., Ltd., London, 1958. 858 p. (Russ. ed. : Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1962. 896 p.)

Cite this article as:

Kabantsova L. Yu. Linear Difference Equation of Second Order in a Banach Space and Operators Splitting. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 3, pp. 285–293 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-285-293.