УДК 514.17

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, СОХРАНЯЮЩИХ ОРИЕНТАЦИЮ СИМПЛЕКСОВ

В. А. Клячин, Н. А. Чебаненко[2]

[1]Клячин Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой компьютерных наук и экспериментальной математики, Волгоградский государственный университет, 400062, Россия, Волгоград, просп. Университетский, 100, klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru

[2]Чебаненко Никита Алексеевич, ассистент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики, Волгоградский государственный университет, 400062, Россия, Волгоград, просп. Университетский, 100, windbagy@gmail.com

Несложно показать, что если непрерывное и открытое отображение сохраняет ориентацию всех симплексов, то оно является аффинным. В статье рассматривается класс непрерывных, открытых отображений $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, сохраняющих ориентацию симплексов из заданного подмножества множества симплексов с вершинами в области $D \subset \mathbb{R}^m$. В работе исследуются вопросы геометрического строения линейных прообразов таких отображений. В основу данного исследования положено доказываемое в статье ключевое свойство: если отображение сохраняет ориентацию симплексов из некоторого подмножества B множества всех симплексов с вершинами в области D, то прообраз гиперплоскости при таком отображении не может содержать вершины симплекса из B. На основе анализа структуры множества, обладающего таким свойством, можно получить результаты о его геометрическом строении. В частности, в статье доказано, что если непрерывное и открытое отображение сохраняет ориентацию достаточно широкого класса симплексов, то оно является аффинным. Для некоторых специальных классов треугольников в $\mathbb{R}^2$ с заданным условием на его максимальный угол показано, что прообраз прямой локально является графиком (в некотором случае липшицевой) функции в подходящей декартовой системе координат.

Ключевые слова: симплекс, непрерывное отображение, ориентация симплекса, монотонные функции.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-294-303

ВВЕДЕНИЕ

Классическая теорема Лебега [1, с. 199] утверждает, что неубывающая функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ почти всюду дифференцируема. Это же справедливо и для любых монотонных функций. Сложность распространения этого результата на многомерный случай связана с тем, что в многомерном случае понятие монотонности отображения является неоднозначным. Например, отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется монотонным по Лебегу [2, 3] если

$$\operatorname{osc}\{f, D'\} \leqslant \operatorname{osc}\{f, \partial D'\},$$

для всякой подобласти $D' \subset D$. Здесь

$$\operatorname{osc}\{f, D'\} = \sup_{x,y \in D'} |f(x) - f(y)|.$$

Исследованию такого рода отображений посвящено множество публикаций. В частности, в работе С. К. Водопьянова [4] изучались монотонные по Лебегу функции и отображения на группах Карно и было установлено N-свойство Лузина таких отображений. В работах В. М. Миклюкова [5, 6] было доказано, что монотонное по Лебегу отображение, принадлежащее весовому пространству Соболева, почти всюду имеет полный дифференциал при определенных условиях на весовую функцию. Отметим также работу [7], в которой свойство дифференцируемости доказывается для класса Q-гомеоморфизмов, которые в каком-то смысле близки к отображениям, монотонным по Лебегу. В то же время определенный интерес представляют отображения, для которых понятие монотонности имеет иную форму. Этот подход к понятию монотонности основан на понятии ориентации симплексов и, в частности, имеет важное значение в теории построения расчетных сеток [8].

Рассмотрим для примера одномерный случай. Будем говорить, что невырожденный отрезок $[P_0, P_1]$ числовой прямой имеет положительную ориентацию, если $P_0 < P_1$, и отрицательную ориентацию, если $P_0 > P_1$. Тогда функция $y = f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, является неубывающей, если $f(x)$ сохраняет ориентацию каждого отрезка $[P_0, P_1] \subset [a, b]$. Если аналогичное построение сделать для многомерного случая, получается следующее понятие, аналогичное понятию монотонного отображения по Лебегу. Пусть в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, заданы точки $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Выпуклую оболочку этих точек назовем симплексом $S = S(P_0, \ldots, P_n)$. Симплекс называется невырожденным, если векторы $P_1 - P_0$, $P_2 - P_0, \ldots, P_n - P_0$ линейно независимы или, что то же самое

$$\det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_n - P_0) \neq 0.$$

Здесь $\det(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ обозначает определитель матрицы, столбцами которой являются векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что невырожденный симплекс $S(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ имеет положительную (отрицательную) ориентацию, если $\det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_n - P_0) > 0$ ($\det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_n - P_0) < 0$). Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — область.

Обозначим через $S(D)$ совокупность всех невырожденных симплексов с вершинами из области D.

Зададимся вопросом определения геометрических и дифференциальных свойств непрерывных отображений $f : D \to \mathbb{R}^n$, которые сохраняют ориентацию симплексов из некоторого, заранее данного подмножества множества $S(D)$. Более точно нас будет интересовать структура прообраза плоскости в $\mathbb{R}^n$. Отметим работу [9], в которой получены условия сохранения ориентации симплексов при их квазиизометричном преобразовании.

Обозначим множество непрерывных отображений $f : D \to \mathbb{R}^n$, сохраняющих ориентацию симплексов $S \in B \subset S(D)$ через $C_B(D)$. В работе авторов [10] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если открытое отображение $f \in C_{S(D)}(D)$, то f — аффинное преобразование.*

Из этого результата следует, что большинство отображений не может сохранять ориентацию всех симплексов. Рассмотрим некоторое подмножество $B \subset S(D)$.

1. КЛЮЧЕВОЕ СВОЙСТВО НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В [10] был доказан следующий ключевой результат о структуре прообраза гиперплоскости непрерывного отображения $f \in C_B(D)$. Мы приводим немного измененное доказательство этого утверждения, устранив тем самым некоторые не существенные пробелы в доказательстве.

Теорема 2. *Если множество $B \subset S(D)$ открыто и отображение $f \in C_B(D)$ не является аффинным, то прообраз любой гиперплоскости не содержит вершин симплекса из B.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. предположим, что найдется невырожденный симплекс $S(P_0, \dots, P_n) \in B$ такой, что $P_i \in f^{-1}(L)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Пусть $P'_i = f(P_i)$. Тогда $S(P'_0, \dots, P'_n)$ — вырожденный симплекс, так как точки P'_i, $i = 0, \dots, n$ лежат в одной гиперплоскости. Для всех $\varepsilon > 0$, не ограничивая общности, будем считать, что симплексы

$$S^{\pm} = S(P'_0, \dots, P'_{n-1}, P'_n \pm \varepsilon\xi),$$

где ξ — нормаль к L, не вырождены. Ясно, что ориентации этих симплексов для $\varepsilon > 0$ и для $\varepsilon < 0$ противоположны. Положим

$$M^{\pm} = f^{-1}\left(\bigcup_{\varepsilon \geqslant 0} (P'_n \pm \varepsilon\xi)\right).$$

Множество $M^{\pm}$ замкнуто, причем $P_n \in M^{\pm}$.

Рассмотрим окрестность $V(P_n)$ точки P_n такой, что для любой точки $P \in V(P_n)$ симплекс $S(P_0, \dots, P_{n-1}, P)$ имеет ту же ориентацию, что и симплекс $S(P_0, \dots, P_n)$. Поскольку множество B открыто, то найдется окрестность $U(S(P_0, \dots, P_n)) \subset B$. В частности, можно найти такую окрестность $V'(P_n) \subset V(P_n)$, что для всех точек $P \in V'(P_n)$ выполняется $S(P_0, \dots, P_{n-1}, P) \in U(S(P_0, \dots, P_n))$. По предположению теоремы отображение f открыто. Следовательно, образ окрестности $V'(P_n)$ есть окрестность точки $P'_n = f(P_n)$. Тогда можно найти такие

$$P^+ \in M^+ \cap \{V'(P_n) \backslash P_n\}, \qquad P^- \in M^- \cap \{V'(P_n) \backslash P_n\},$$

что для некоторых $\varepsilon_+, \varepsilon_- > 0$ будет выполнено $f(P^+) = P'_n + \varepsilon_+\xi$, $f(P^-) = P'_n - \varepsilon_-\xi$. Из этих построений следует, что симплексы $S(P_0, \dots, P_{n-1}, P^+)$ и $S(P_0, \dots, P_{n-1}, P^-)$ принадлежат B и имеют одинаковую ориентацию, а симплексы $S(P'_0, \dots, P'_{n-1}, P'_n + \varepsilon_+\xi)$ и $S(P'_0, \dots, P'_{n-1}, P'_n - \varepsilon_-\xi)$ имеют разные ориентации. Таким образом, мы пришли к противоречию с условием теоремы о том, что $f \in C(B)$. Теорема доказана. $\square$

В настоящей статье мы доказываем некоторые обобщения и следствия этих результатов. Предварительно дадим необходимые определения.

Пусть $m \leqslant n$ и $E = \{e_1, \dots, e_{n-m}\}$ — некоторая система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что m-мерный симплекс $S(p_0, p_1, \dots, p_m)$ с вершинами $p_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, m$ имеет положительную (отрицательную) ориентацию относительно системы E, если $\det(p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0, e_1, \dots, e_{n-m}) > 0$ (< 0 соответственно).

Набор систем $E_1 = \{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1n-m}\}, \ldots, E_k = \{e_{k1}, e_{k2}, \ldots, e_{kn-m}\}$ назовем полным, если размерность суммы ортогональных дополнений к системам E_i равна n. Пусть Π_i, $i = 1, \ldots, N$, — m-мерная плоскость, ортогональная векторам из системы E_i, и $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \Pi_i$ обозначает ортогональную проекцию на эту плоскость. Рассмотрим отображение $h_i = \pi_i \circ f : \mathbb{R}^m \to \Pi_i$.

Теорема 3. *Пусть E_i, $i = 1, \ldots, N$, — полный набор систем в $\mathbb{R}^n$ и $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, сохраняющее ориентацию любого m-мерного симплекса относительно каждой системы $E_1, \ldots, E_N$. Если все сквозные отображения h_i, $i = 1, \ldots, N$, открыты, то f — аффинное отображение.*

Доказательство. Покажем, что для каждого $i = 1, \ldots, N$ отображение $h = h_i$ сохраняет ориентацию любого симплекса. Чтобы в этом убедиться построим положительно ориентированный ортонормированный базис $b_1, \ldots, b_n$ в $\mathbb{R}^n$ таким образом, чтобы векторы $b_1, \ldots, b_m$ были ортогональны векторам $e_{i1}, \ldots, e_{in-m}$, причем

$$\det(b_1^i, \ldots, b_m^i, e_{i1}, \ldots, e_{in-m}) > 0.$$

Пусть симплекс $S = S(p_0, \ldots, p_m)$ с вершинами в D имеет положительную ориентацию. В силу условия теоремы симплекс $S' = S(f(p_0), \ldots, f(p_m))$ тоже имеет положительную ориентацию относительно системы E_i, т.е.

$$\det(f(p_1) - f(p_0), \ldots, f(p_m) - f(p_0), e_{i1}, \ldots, e_{in-m}) > 0.$$

При переходе к базису $\{b_k^i,\ k = 1, \ldots, n\}$ это условие не изменится. В то же время в новом базисе такой определитель будет равен

$$\det(h(p_1) - h(p_0), \ldots, h(p_m) - h(p_0)) > 0.$$

В силу теоремы 1 мы можем сделать вывод, что сквозное отображение $h : \mathbb{R}^m \to \Pi_i$ является аффинным. Отсюда получаем, что для каждого $i = 1, \ldots, N$ и каждого $k = 1, \ldots, m$ скалярное произведение $\langle f(u), b_k^i \rangle$ является аффинной функцией переменной $u \in D$.

Рассмотрим произвольную пару векторов v, w такую, что точки $u + w + v$, $u + v$, $u + w$, u принадлежат области D. Построим вектор

$$G = f(u + v + w) - f(u + v) - f(u + w) + f(u).$$

Из аффинности функции $\langle f(u), b_k^i \rangle$ следует, что $\langle G, b_k^i \rangle = 0$. А из условия полноты набора систем E_i можно сделать вывод, что $\langle G, y \rangle = 0$ для любого $y \in \mathbb{R}^n$. Откуда следует, что $G = 0$ и отображение f аффинно. $\square$

Замечание. Поскольку функция $\det(p_0 - p_1, \ldots, p_n - p_0)$ непрерывна по переменным $p_0, \ldots, p_n$, то из того, что непрерывное отображение сохраняет ориентацию заданного симплекса, следует, что сохраняется ориентация всех симплексов из некоторой окрестности данного симплекса. Это, в свою очередь, влечет, что множество симплексов, ориентация которых сохраняется данным непрерывным отображением открыто. Поэтому мы ограничимся рассмотрением открытых подмножеств $B \subset S(D)$.

Теорема 4. *Пусть E_i, $i = 1, \dots, N$, — полный набор систем в $\mathbb{R}^n$ и $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $m \leqslant n$ — непрерывное отображение, сохраняющее ориентацию любого m-мерного симплекса из некоторого открытого подмножества $B \subset S(D)$. Если все сквозные отображения h_i, $i = 1, \dots, N$, открыты, а отображение f не является аффинным, то прообраз любой гиперплоскости не содержит вершин симплекса из B.*

Доказательство. Пусть Π_i, $i = 1, \dots, N$, — m-мерная плоскость, ортогональная векторам из системы E_i, и $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \Pi_i$ обозначает ортогональную проекцию на эту плоскость. Рассмотрим отображение $h = \pi_i \circ f : \mathbb{R}^m \to \Pi_i$. Как и при доказательстве теоремы 3, легко убедиться, что отображение h сохраняет ориентацию любого симплекса из множества $B \subset S(D)$. Тогда утверждение теоремы следует из теоремы 2. $\square$

Замечание. Используя теоремы из [11] о структуре множеств с ограничениями на его контингенцию, можно получить некоторую информацию о структуре прообразов прямых линий отображений, сохраняющих ориентацию симплексов. Этот метод был использован в работе [10]. В настоящей работе мы будем использовать другой подход.

2. СЛЕДСТВИЯ

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^m$ некоторую прямую L. Обозначим через α некоторое число из интервала $(0, \pi)$. Пусть B_α обозначает открытое множество симплексов из $S(D)$, у которых имеется ребро, образующее угол $\varphi < \alpha$ с прямой L.

Теорема 5. *Если отображение $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ открыто и принадлежит классу $C_{B_\alpha}(D)$, то оно аффинно.*

Доказательство. Предположим, что отображение f не является аффинным. В силу теорем 2 и 4 на прообразе $f^{-1}(\Pi)$ гиперплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^m$ не существует симплекса из множества B_α. Это означает, что все ребра симплексов с вершинами на $f^{-1}(\Pi)$ образуют угол с прямой L не меньше, чем α. Рассмотрим некоторую точку $x_0 \in D$ и построим семейство A гиперплоскостей, проходящих через точку $f(x_0)$. Положим

$$\mathscr{A} = \bigcup_{\Pi \in A} f^{-1}(\Pi).$$

В силу предположения любое ребро вида x_0x_1 с $x_1 \in \mathscr{A}$ имеет угол с прямой L не меньше, чем α. В то же время если точка $x_2 \in D$ такая, что отрезок x_0x_2 образует угол с прямой L меньше, чем α, то найдется гиперплоскость $\Pi \in A$ такая, что $f(x_2) \in \Pi$. Поэтому $x_2 \in \mathscr{A}$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Зафиксируем $\pi/2 < \alpha_0 < \pi$. Рассмотрим в области $D \subset \mathbb{R}^2$ совокупность треугольников $S(P_0, P_1, P_2)$, имеющих максимальный угол $\alpha(S) < \alpha_0$. Обозначим эту совокупность треугольников через $S_{\alpha_0}(D)$.

Теорема 6. *Если $\alpha_0 > 2\pi/3$, а отображение $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ открыто и принадлежит классу $C_{S_{\alpha_0}}(D)$, то прообраз любой прямой локально представляет собой график функции в подходящей декартовой системе координат.*

Доказательство. Будем читать, что отображение f не является аффинным. Пусть $x_0,\ x_1 \in D$. Построим окружности, проходящие через эти точки, с радиусом

$$R = \frac{|x_1 - x_0|}{2\sin\alpha_0}.$$

Центры этих окружностей лежат на серединном перпендикуляре к отрезку x_0x_1 и симметричны относительно этого отрезка. При этом касательные к этим окружностям в точках x_0, x_1 образуют угол $\pi - \alpha_0$ с отрезком x_0x_1. Этот угол меньше, чем $\pi/4$, в силу предположения теоремы. Наконец, обозначим через $M_{x_0x_1}$ пересечение соответствующих кругов, а через $\Pi_{x_0x_1}$ полосу, образуемую точками, расположенными между прямыми, ортогональными отрезку x_0x_1 и проходящими через его концы (рис. 1). Из свойств окружностей следует, что треугольник вида $x_0x_1x_2$, $x_2 \in \Pi_{x_0x_1} \setminus M_{x_0x_1}$ имеет угол $\angle x_0x_2x_1 < \alpha_0$. Остальные углы этого треугольника острые и потому меньшие, чем α_0.

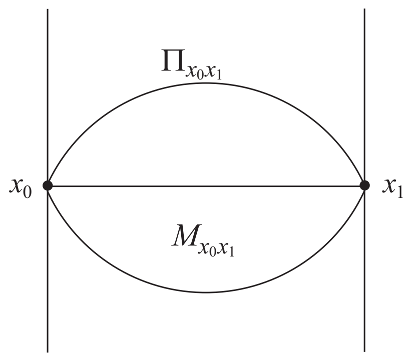

Рис. 1. Множества $\Pi_{x_0x_1}$ и $M_{x_0x_1}$
Fig. 1. The sets $\Pi_{x_0x_1}$ and $M_{x_0x_1}$

Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — некоторая прямая и $p_0,\ p_1 \in f^{-1}(L)$ — две произвольные точки на ее прообразе. Покажем, что пересечение $f^{-1}(L) \cap \Pi_{p_0p_1}$ представляет собой график функции в системе координат, в которой одна ось направлена вдоль прямой p_0p_1, а другая ей ортогональна.

Согласно теореме 2 не существует треугольника с вершинами на $f^{-1}(L)$ и с углами, меньшими чем α_0. Значит, пересечение

$$f^{-1}(L) \cap (\Pi_{p_0p_1} \setminus M_{p_0p_1})$$

пусто, так как, в противном случае, можно было бы найти треугольник вида $p_0p_1p_2$, $p_2 \in f^{-1}(L) \cap (\Pi_{p_0p_1} \setminus M_{p_0p_1})$ с углом $\angle p_0p_2p_1 < \alpha_0$. Таким образом, имеет место включение

$$f^{-1}(L) \cap \Pi_{p_0p_1} \subset M_{p_0p_1}.$$

Предположим, что найдутся две точки $p, p' \in M_{p_0p_1} \cap f^{-1}(L)$, лежащие на одном отрезке, ортогональном прямой p_0p_1, причем, не ограничивая общности, будем считать, что точка пересечения прямых pp' и p_0p_1 находится ближе к точке p_1 (рис. 2). Также предположим, что если точки p, p' лежат по одну сторону от отрезка p_0p_1, то p будет расположена дальше от него, чем точка p'. В этом случае

$$p' \in \Pi_{p_0p}.$$

Покажем, что $\angle pp'p_0 < \alpha_0$. Действительно, если точки pp' расположены по разные стороны отрез-

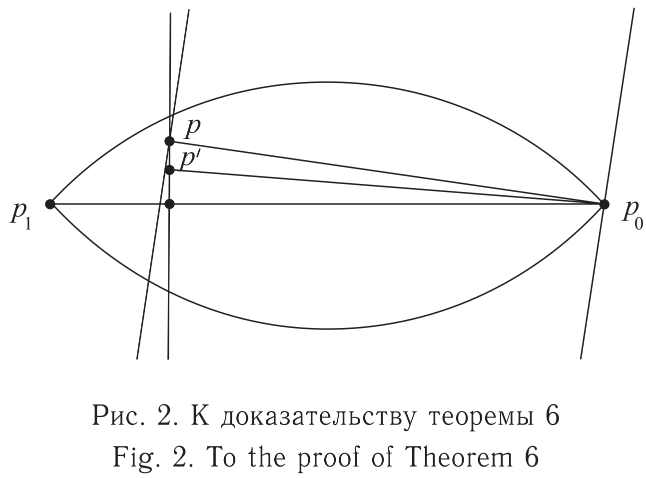

Рис. 2. К доказательству теоремы 6
Fig. 2. To the proof of Theorem 6

ка p_0p_1, то треугольник p_0pp' — остроугольный, а значит, его углы меньше α_0. Если точки pp' расположены по одну сторону от отрезка p_0p_1, то угол $\angle pp'p_0$ меньше тупого угла между прямой pp' и прямой, соединяющей точку p_0 и середину граничной дуги $M_{p_0p_1}$. Несложно вычислить, что этот угол равен $\pi - \alpha_0/2$ и в силу предположения $\alpha_0 > 2\pi/3$ этот угол меньше α_0. Мы получили противоречие с утверждением теоремы 2. Таким образом, всякая прямая, ортогональная отрезку p_0p_1, может пересекать $f^{-1}(L)$ не более чем в одной точке. Теорема доказана. □

Теорема 7. *Если $\alpha_0 > 3\pi/4$, а отображение $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ открыто и принадлежит классу $C_{S_{\alpha_0}}(D)$, то прообраз любой прямой локально представляет собой график липшицевой функции в подходящей декартовой системе координат.*

Доказательство. Покажем, что угол наклона отрезка с концами на $f^{-1}(L)$ не превосходит $2(\pi - \alpha_0) < \pi/2$. Тем самым будет доказано, что постоянная Липшица графика соответствующей функции не превышает $\operatorname{tg} 2(\pi - \alpha_0) < +\infty$. Рассмотрим некоторую точку $p \in M_{p_0p_1} \cap f^{-1}(L)$. Угол между отрезками p_0p_1 и p_0p обозначим через β. Ясно, что $\beta < \pi - \alpha_0$. Пусть p' — проекция точки p на отрезок p_0p_1. Выберем произвольную точку $p^* \in f^{-1}(L)$, чья проекция на отрезок p_0p_1 лежит между p_0 и p'. Угол между прямой отрезка p^*p и прямой отрезка p_0p_1 очевидно не превосходит суммы угла β и угла между прямой отрезка p_0p_1 и касательной к одной из граничных дуг окружностей множества M_{p_0p} в точке p, т. е. не превосходит суммы $\beta + \pi - \alpha_0 < 2(\pi - \alpha_0) < \pi/2$. Тем самым теорема доказана. □

Теорема 8. *Пусть $\alpha_0 > \pi/2$, а отображение $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ открыто и принадлежит классу $C_{S_{\alpha_0}}(D)$. Пусть $p_0, p_1 \in f^{-1}(L)$ — две произвольные точки на прообразе прямой $L \subset \mathbb{R}^2$. Тогда найдется точка $p_1' \in [p_0, p_1]$ такая, что пересечение $f^{-1}(L) \cap \Pi_{p_0p_1'}$ локально представляет собой график функции в подходящей декартовой системе координат.*

Доказательство. Рассмотрим точку $p_1' \in [p_0, p_1']$ такую, что

$$d \cdot \operatorname{ctg}^2(\pi - \alpha_0) > \Delta, \tag{1}$$

где $\Delta = |p_1' - p_0|$, $2d = |p_1 - p_0|$. Предположим, что прямая ℓ, ортогональная отрезку p_0p_1, пересекает отрезок в точке q так, что $|q - p_0| = \delta < \Delta$. Покажем, что тогда эта прямая пересекает множество $f^{-1}(L)$ не более в одной точке. Предположим, что нашлись две точки $q', q'' \in f^{-1}(L) \cap \ell$.

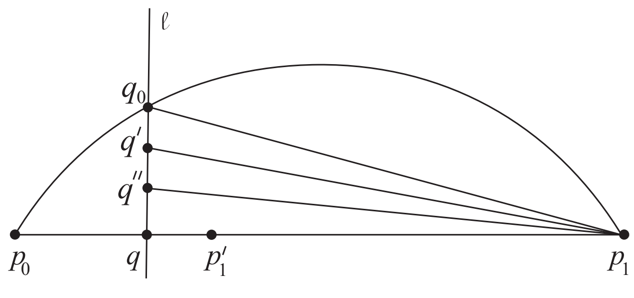

Рис. 3. Построение точки q_0

Fig. 3. Construction of the point q_0

Рассмотрим треугольник $p_1q'q''$ (рис. 3). Для доказательства теоремы достаточно показать, что угол $\angle q'q''p_1 < \alpha_0$ или угол $\angle q''q'p_1 < \alpha_0$. Если точки q', q'' лежат по разные стороны от отрезка p_0p_1, оба эти угла острые, а значит, не превосходят α_0. Будем считать, что точки q', q'' лежат по одну сторону от отрезка p_0p_1, причем будем предполагать, что точка q'' находится ближе к этому отрезку, чем точка q'. Пусть q_0 — точка пересечения прямой ℓ с граничной дугой окружности множества $M_{p_0p_1}$, причем той, которая ограничивает половину $M_{p_0p_1}$, в которой лежат точи q', q''. Тогда угол $\angle p_1q''q'$ не превосходит тупого угла между прямой ℓ и отрезком p_1q_0. А этот угол, в свою очередь, будет меньше, чем α_0, если $\mathrm{tg}\angle qq_0p_1 > \mathrm{tg}(\pi-\alpha_0)$. Прямым вычислением несложно показать, что

$$\mathrm{tg}\angle qq_0p_1 = \frac{\sqrt{d^2\mathrm{ctg}^2(\pi-\alpha_0)+(2d-\delta)\delta}+d\mathrm{ctg}(\pi-\alpha_0)}{\delta} > \\ > \frac{d\mathrm{ctg}(\pi-\alpha_0)}{\delta} > \frac{d\mathrm{ctg}(\pi-\alpha_0)}{\Delta}.$$

Откуда, используя (1), заключаем, что

$$\mathrm{tg}\angle qq_0p_1 > \mathrm{tg}(\pi-\alpha_0).$$

Теорема доказана. □

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02517).

Библиографический список

1. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М. : Наука; Гл. ред. физ.-матем. лит., 1974. 480 с.
2. *Lebesgue H.* Sur le probleme de Dirichlet // Rend. Circ. Palermo. 1907. Vol. 27. P. 371–402.
3. *Mostow G. D.* Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms // Publ. Math, de l'Institute des Hautes Etudes Scientifiques. 1968. № 34. P. 53–104.
4. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.
5. *Миклюков В. М.* Введение в негладкий анализ. Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. 424 с.
6. *Миклюков В. М.* О некоторых признаках существования полного дифференциала // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51, № 4. С. 805–814.
7. *Салимов Р. Р.* Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений // Изв. РАН. Сер. матем. 2008. Т. 72, № 5. С. 141–148. DOI: 10.4213/im2675.
8. *Прохорова М. Ф.* Проблемы гомеоморфизма, возникающие в теории построения сеток // Тр. ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 112–129.
9. *Болучевская А. В.* Сохранение ориентации симплекса при квазиизометричном отображении // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 20–23.
10. *Клячин В. А., Чебаненко Н. А.* О линейных прообразах непрерывных отображений, сохраняющих ориентацию симплексов // Вестн. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1: Математика. Физика. 2014. № 3 (22). С. 56–60. DOI: 10.15688/jvolsu1.2014.3.6.
11. *Сакс С.* Теория интеграла. М. : Изд-во иностр. лит., 1949. 495 с.

Образец для цитирования:

Клячин В. А., Чебаненко Н. А. О геометрических свойствах непрерывных отображений, сохраняющих ориентацию симплексов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 3. С. 294–303. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-294-303.

On the Geometric Structure of the Continuos Mappings Preserving the Orientation of Simplexes

V. A. Klyachin[1], N. A. Chebanenko[2]

[1]Vladimir A. Klyachin, ORCID: 0000-0003-1922-7849, Volgograd State University, 100, Prosp. Universitetsky, Volgograd, Russia, 400062, klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru
[2]Nikita A. Chebanenko, ORCID: 0000-0002-8462-5619, Volgograd State University, 100, Prosp. Universitetsky, Volgograd, Russia, 400062, windbagy@gmail.com, kiem@volsu.ru

It is easy to show that if a continuous open map preserves the orientation of all simplexes, then it is affine. The class of continuous open maps $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ that preserve the orientation of simplexes from a given subset of a set of simplexes with vertices in the domain $D \subset \mathbb{R}^m$ is considered. In this paper, questions of the geometric structure of linear inverse images of such mappings are studied. This research is based on the key property proved in the article: if a map preserves the orientation of simplexes from some subset B of the set of all simplexes with vertices in the domain D, then the inverse image of the hyperplane under such a mapping can not contain the vertices of a simplex from B. Based on the analysis of the structure of a set possessing this property, one can obtain results on its geometric structure. In particular, the paper proves that if a continuous open map preserves the orientation of a sufficiently wide class of simplexes, then it is affine. For some special classes of triangles in $\mathbb{R}^2$ with a given condition on its maximal angle it is shown that the inverse image of a line is locally a graph (in some case a Lipschitzian) of a function in a suitable Cartesian coordinate system.

Key words: simplex, orientation of simplex,continuous mapping, monotone function.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-41-02517).

References

1. Natanson I. P. *Teoriya funkciy veschestvennoy peremennoy* [Theory functions of real variable]. Moscow, Nauka, 1974. 480 p. (in Russian).
2. Lebesgue H. Sur le probleme de Dirichlet. *Rend. Circ. Palermo*, 1907, vol. 27, pp. 371–402.
3. Mostow G. D. Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms. *Publ. Math, de l'Institute des Hautes Etudes Scientifiques*, 1968, no. 34, pp. 53–104.
4. Vodop'yanov S. K. Monotone functions and quasiconformal mappings on Carnot groups. *Siberian Math. J.*, 1996, vol. 37, no. 6, pp. 1113–1136. DOI: 10.1007/BF02106736.
5. Miklyukov V. M. *Vvedenie v negladkiy analiz* [Introduction in nonsmooth analysis]. Volgograd, Volgograd Univ. Press, 2008. 424 p. (in Russian).
6. Miklyukov V. M. Some conditions for the existence of the total differential. *Siberian Math. J.*, 2010, vol. 51, no. 4, pp. 639–647. DOI: 10.1007/s11202-010-0065-9.
7. Salimov R. R. ACL and differentiability of a generalization of quasi-conformal maps. *Izv. Math.*, 2008, vol. 72, no. 5, pp. 977–984. DOI: 10.1070/IM2008v072n05ABEH002425.
8. Prokhorova M. F. Problems of homeomorphism arising in the theory of grid generation. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2008, vol. 261, suppl. 1, pp. S165–S182. DOI: 10.1134/S0081543808050155.
9. Boluchevskaya A. V. On the Quasiisometric Mapping Preserving Simplex Orientation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.) Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 2, pp. 20–23 (in Russian).

10. Klyachin V. A., Chebanenko N. A. About linear preimages of continuous maps, that preserve orientation of triangles. *Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics*, 2014, no. 3 (22), pp. 56–60 (in Russian). DOI: 10.15688/jvolsu1.2014.3.6.
11. Saks S. *Teoriya integrala* [Integral theory]. Moscow, Izd-vo. inostr. lit., 1949. 495 p. (in Russian).

Cite this article as:
Klyachin V. A., Chebanenko N. A. On the Geometric Structure of the Continuous Mappings Preserving the Orientation of Simplexes. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 3, pp. 294–303 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-294-303.