УДК 517.518

ОБОБЩЕННАЯ АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

М. А. Кузнецова

Кузнецова Мария Андреевна, студентка механико-математического факультета, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, maffka2@bk.ru

А. Зигмунд доказал, что 2π-периодическая функция ограниченной вариации из любого класса Липшица $Lip(\alpha)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье. Этот результат был распространен на многие классы функций обобщенной ограниченной вариации (например, на функции ограниченной p-вариации Жордана – Винера, функции ограниченной Λ-вариации, введенные Д. Ватерманом и др.) и на различные пространства, определяемые модулями непрерывности. Мы изучаем сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k |\hat{f}(k)|^\beta$, где $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ является последовательностью из подходящего класса Гоголадзе – Месхиа, а $\{\hat{f}(k)\}_{k=0}^\infty$ — коэффициенты Фурье $f \in L^1[0,1)$ по мультипликативной системе. Достаточные условия сходимости таких рядов получаются в предположении ограниченности обобщенной вариации, задаваемой числом $p \geqslant 1$ и последовательностью Λ, и в терминах равномерных или интегральных модулей непрерывности. Используя флуктуацию (т. е. осцилляции функции рассмтриваются только по отношению к узкому классу разбиений и их интервалов) вместо вариации, мы получаем более общие утверждения. Результаты данной статьи дают аналоги некоторых теорем Р. Г. Вьяса, касающихся тригонометрических рядов или рядов Уолша, или обобщают их.

Ключевые слова: абсолютная сходимость, ряды по мультипликативным системам, функции обобщенной ограниченной вариации.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-304-312

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность натуральных чисел такая, что $2 \leqslant p_n \leqslant N$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \ldots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Каждое число $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \qquad x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n). \tag{1}$$

Представление (1) единственно, если для $x = k/m_j$, $k, j \in \mathbb{N}$, $0 < k < m_j$, брать разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Если $k \in \mathbb{Z}_+$ записано в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \qquad k_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j),$$

а $x \in [0,1)$ имеет разложение (1), то по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)$. Система $\{\chi_k\}_{k=0}^\infty$ является ортонормированной и полной в $L^1[0,1)$ (см. [1, § 1.5]).

Отметим, что при $k < m_n$ функции $\chi_k(x)$ постоянны на $I_j^n = [(j-1)/m_n, j/m_n)$, $j = 1, 2, \ldots, m_n$.

Для $f \in L^1[0,1)$ определим коэффициенты Фурье

$$\hat{f}(n) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}d\,t, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть $G(\mathbf{P})$ — группа, состоящая из последовательностей вида $\widetilde{x} = (x_1, x_2, ...)$, $x_j \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leqslant x_j < p_j$, с операцией $\widetilde{x} \oplus \widetilde{y} = \widetilde{z}$, где $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$, $j \in \mathbb{N}$. Аналогично определяется обратная операция $\widetilde{x} \ominus \widetilde{y}$. Отображение $\lambda_{\mathbf{P}}(\widetilde{x}) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}$ не является взаимно однозначным, поскольку элементам вида

$$x = k/m_l, \qquad k, l \in \mathbb{N}, \qquad k < m_l, \tag{2}$$

соответствуют два элемента $G(\mathbf{P})$. Определим обратное отображение $\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}$. Для x вида (2) пусть $x_j = [m_j x] \pmod{p_j}$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(x) = (x_1, ..., x_l, 0, ...)$. Для остальных $x \in [0,1)$ существует единственный элемент $\widetilde{x} \in G(\mathbf{P})$ со свойством $\lambda_{\mathbf{P}}(\widetilde{x}) = x$ и тогда $\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(x) = \widetilde{x}$. Определим обобщенное расстояние

$$\rho(x,y) = \lambda_{\mathbf{P}}\left(\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(x) \ominus \lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(y)\right)$$

и сложение

$$x \oplus y = \lambda_{\mathbf{P}}\left(\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(x) \oplus \lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(y)\right)$$

на $[0,1)$. При этом $x \oplus y$ не определено, если $\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(x) \oplus \lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(y) = \widetilde{z}$, где $z_j = p_j - 1$ при $j \geqslant j_0$, то есть $x \oplus y$ определено для почти всех $x \in [0,1)$ при фиксированном $y \in [0,1)$. Легко видеть, что $x \oplus 1/m_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, определено всегда и что $\rho(x \oplus 1/m_{k+1}, x) < 1/m_k$.

Для $f(x) \in L^p[0,1)$ при $p \geqslant 1$ определим дискретный модуль непрерывности

$$\omega_n(f)_p = \sup_{0<h<1/m_n} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_p, \qquad \|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Функция $f(x)$ принадлежит пространству $C^*[0,1)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при всех $x, y \in [0,1)$, для которых $\rho(x,y) < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Соответственно $\omega_n(f)_\infty = \sup_{\rho(x,y)<1/m_n} |f(x) - f(y)|$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ является неубывающей последовательностью положительных чисел и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$, а функция $f(x)$ ограничена на $[0,1)$ и

$$osc(f, I_j^n) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in I_j^n\}.$$

Определение 1. Ограниченная на $[0,1)$ функция $f(x)$ принадлежит классу $\Lambda\mathscr{F}\mathscr{L}^{(p)}[0,1)$ функций ограниченной Λ-p-флуктуации, если

$$V_{\Lambda,p}(f) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \sup_{\{l_j\}_{j=1}^{m_n}\in W_n} \left(\sum_{j=1}^{m_n} \frac{osc^p(f, I_{l_j}^n)}{\lambda_j}\right)^{1/p} < \infty,$$

где $\{l_j\}_{j=1}^{m_n}$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, m_n$, W_n является множеством всех таких перестановок.

Пространства $\Lambda\mathscr{F}\mathscr{L}^{(p)}[0,1)$ являются аналогами пространств функций ограниченной Λ-вариации и Λ-p-вариации, введенных соответственно Д. Ватерманом (Waterman) [2] и М. Шиба (Shiba) [3]. Следующее ниже определение является аналогом определения Х. Кита (Kita) и К. Йонеда (Yoneda) [4].

Рассмотрим последовательность $\{p(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $p(n) \geqslant 1$, возрастающую и стремящуюся к бесконечности.

Определение 2. Ограниченная на $[0,1)$ функция $f(x)$ принадлежит классу $\Lambda\mathscr{F}\mathscr{L}(p(n)\uparrow\infty)$, если

$$V_{\Lambda,p(n)}(f) := \sup_{n} \sup_{\{l_j\}_{j=1}^{m_n}\in W_n} \left(\sum_{j=1}^{m_n} \frac{osc^{p(n)}(f, I_{l_j}^n)}{\lambda_j}\right)^{1/p(n)} < \infty.$$

Пусть $\alpha \geqslant 1$. Будем говорить, что последовательность $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит классу $A(\alpha) = A(\mathbf{P},\alpha)$, если $\gamma_k > 0$ при всех k и

$$\left(\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \gamma_k^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \leqslant C m_n^{(1-\alpha)/\alpha} \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \gamma_k =: C m_n^{(1-\alpha)/\alpha}\Gamma_n, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

При $n=0$ можно считать, что аналогичное неравенство верно для $\Gamma_0=\gamma_1$. Данное определение введено в работе Л. Гоголадзе (Gogoladze) и Р. Месхиа (Meskhia) [5] при $m_n = 2^n$. Последовательность $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит классу $A(\infty)$, если $\gamma_k > 0$ при всех k и

$$\max_{m_n<k\leqslant m_{n+1}} \gamma_k \leqslant C m_n^{-1}\Gamma_n, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Отметим, что $A(\alpha_1)\subset A(\alpha_2)$ при $\alpha_1 > \alpha_2$ и что класс $\bar{A}$ содержится в $A(\alpha)$ при всех $\alpha \geqslant 1$, где $\bar{A}$ — класс положительных последовательностей γ со свойством $\max\limits_{m_n\leqslant k<m_{n+1}} \gamma_k \leqslant C \min\limits_{m_{n-1}\leqslant k<m_n} \gamma_k$, $n\in\mathbb{N}$, при некоторой постоянной $C>0$. Класс $\bar{A}$ был введен П. Л. Ульяновым [6] также при $m_n = 2^n$.

В настоящей работе для систем $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ изучаются условия сходимости рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n|\hat{f}(n)|^{\beta}$ с весовыми последовательностями $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ из классов Гоголадзе – Месхиа и функций f из пространств функций обобщенной ограниченной флуктуации. Сходимость таких рядов из коэффициентов Фурье – Уолша изучал Ф. Мориц (Moricz) [7], для общих мультипликативных систем ряд результатов был установлен Б. И. Голубовым и С. С. Волосивцом [8]. Теоремы 1 и 2 являются аналогами результатов Р. Г. Вьяса (Vyas) [9] для тригонометрических рядов, где используется более сильное условие ограниченности обобщенных вариаций. Теорема 3 распространяет другой результат Р. Г. Вьяса [10] в двух направлениях: 1) в [10] рассматривался случай $\gamma_k\equiv 1$; 2) там изучалась только система Уолша, частный случай систем $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ при $p_i\equiv 2$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть* $f\in\Lambda\mathscr{F}\mathscr{L}^{(1)}[0,1)\cap C^*[0,1)$, $0<\beta<2$, $\gamma=\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}\in$ $\in A(2/(2-\beta))$ *или* $\beta=2$ *и* $\gamma\in A(\infty)$. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k^{-\beta/2}\Gamma_k\left(\frac{\omega_k(f)_\infty}{\Lambda_{m_k}}\right)^{\beta/2} < \infty$, *то* *сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k |\widehat{f}(k)|^{\beta}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $k > 0$ — фиксированное целое число. Рассмотрим $f_j(x) = f(x \oplus j/m_k \oplus 1/m_{k+1}) - f(x \oplus j/m_k)$, $j = \overline{1, m_k}$. Если $f \in \Lambda\mathscr{F}\mathscr{L}^{(p)}[0,1)$, то f ограничена на $[0,1)$ и принадлежит $L^2[0,1)$. Известно, что $f(x \oplus 1/m_{k+1})$ имеет ряд Фурье по системе $\{\chi_s\}_{s=0}^{\infty}$ вида $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \widehat{f}(s)\chi_s(x)\chi_s(1/m_{k+1})$. Тогда $f(x \oplus 1/m_{k+1}) - f(x)$ имеет следующее разложение в ряд Фурье (см. введение)

$$\sum_{s=m_k}^{\infty} \widehat{f}(s)[\chi_s(1/m_{k+1}) - 1]\chi_s(x).$$

В силу равенства Парсеваля и инвариантности интеграла относительно обобщенного сдвига

$$\|f_j\|_2^2 = \sum_{s=m_k}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2 |\chi_s(1/m_{k+1}) - 1|^2. \tag{4}$$

При $s \in [m_k, m_{k+1})$ и $[s/m_k] = j \in [1, p_{k+1})$ с учетом ограниченности последовательности $\{p_l\}_{l=1}^{\infty}$ получаем

$$|\chi_s(1/m_{k+1}) - 1| = |\exp(2\pi i j/p_{k+1}) - 1| = 2\sin\frac{\pi j}{p_{k+1}} \geqslant 2\sin\frac{\pi}{p_{k+1}} \geqslant 2\sin\frac{\pi}{N}.$$

Из (4) получаем, что

$$B_k := \sum_{s=m_k}^{m_{k+1}-1} |\hat{f}(s)|^2 \leqslant \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{N}} \|f_j\|^2 = C_1 \int_0^1 |f_j(x)|^2\, dx.$$

Так как $\rho(x \oplus j/m_k \oplus 1/m_{k+1}, x \oplus j/m_k) = 1/m_{k+1} < 1/m_k$, то $|f_j(x)| \leqslant \omega_k(f)_\infty$. В то же время числа $x \oplus j/m_k \oplus 1/m_{k+1}$ и $x \oplus j/m_k$ принадлежат одному $I^k_{l_j}$, а разным j будут соответствовать разные l_j. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{m_k} \frac{|f_j(x)|}{\lambda_j} \leqslant \sum_{j=1}^{m_k} \frac{osc(f, I^k_{l_j})}{\lambda_j} \leqslant V_{\Lambda,1}(f). \tag{5}$$

Пусть $\Lambda_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1}$. Умножая (5) на $1/\lambda_j$ и суммируя получившиеся неравенства по $j = 1, 2, \ldots, m_k$, получаем

$$\Lambda_{m_k} B_k \leqslant C_1 \int_0^1 \sum_{j=1}^{m_k} \frac{|f_j(x)|^2}{\lambda_j} dx \leqslant C_1 \omega_k(f)_\infty \int_0^1 \sum_{j=1}^{m_k} \frac{|f_j(x)|}{\lambda_j}\, dx,$$

или

$$B_k \leqslant C_1 \frac{\omega_k(f)_\infty}{\Lambda_{m_k}} V_{\Lambda,1}(f) \leqslant C_2 \frac{\omega_k(f)_\infty}{\Lambda_{m_k}}. \tag{6}$$

Если $\beta \in (0,2)$, то $1 = \beta/2 + (2-\beta)/2$, то в силу (6) и по неравенству Гельдера при $k \geqslant 1$

$$\sum_{s=m_k}^{m_{k+1}-1} \gamma_s |\widehat{f}(s)|^\beta \leqslant \left(\sum_{s=m_k}^{m_{k+1}-1} \gamma_s^{2/(2-\beta)}\right)^{(2-\beta)/2} B_k^{\beta/2} \leqslant C_3 m_k^{-\beta/2} \sum_{s=m_{k-1}}^{m_k-1} \gamma_s \cdot \left(\frac{\omega_k(f)_\infty}{\Lambda_{m_k}}\right)^{\beta/2}.$$

Суммируя неравенства выше по $k \geqslant 1$, получаем

$$\sum_{s=m_1}^{\infty} \gamma_s |\widehat{f}(s)|^\beta \leqslant C_4 \sum_{k=1}^{\infty} m_k^{-\beta/2} \Gamma_k \left(\frac{\omega_k(f)_\infty}{\Lambda_{m_k}}\right)^{\beta/2},$$

откуда следует утверждение теоремы при $0 < \beta < 2$. При $\beta = 2$, применяя (6) и условие $\gamma \in A(\infty)$, находим, что

$$\sum_{s=m_k}^{m_{k+1}-1} \gamma_s |\widehat{f}(s)|^2 \leqslant C_4 m_k^{-1} \Gamma_k B_k \leqslant C_5 m_k^{-1} \Gamma_k \frac{\omega_k(f)_\infty}{\Lambda_{m_k}}.$$

Суммируя эти неравенства по $k \geqslant 1$, получаем утверждение теоремы в случае $\beta = 2$. □

Теорема 2. *Пусть* $f \in \Lambda\mathscr{F}\mathscr{L}^{(p)}[0,1)$, $0 < \beta < 2$, $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty} \in A_{2/(2-\beta)}$ *или* $\beta = 2$, $\gamma \in A(\infty)$ *и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k^{-\beta/2} \Gamma_k \left(\frac{(\omega_k(f)_{(2-p)s+p})^{2r-p}}{\Lambda_{m_k}}\right)^{\beta/(2r)},$$

где $r, s > 1$, $1/s + 1/r = 1$. *Тогда ряд* (3) *сходится.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 было получено следующее неравенство:

$$B_k = \sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} |\hat{f}(i)|^2 \leqslant C_1 \int_0^1 |f_j(x)|^2 dx, \tag{7}$$

где $f_j(x) = f(x \oplus j/m_k \oplus 1/m_{k+1}) - f(x \oplus j/m_k)$, $j = 1, \ldots, m_k$.

Запишем число 2 в виде $2 = ((2-p)s+p)/s + p/r$. Применяя неравенство Гельдера с показателями r, s и (7), имеем

$$B_k \leqslant C_1 \int_0^1 |f_j(x)|^{((2-p)s+p)/s} |f_j(x)|^{p/r}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \left(\int_0^1 |f_j(x)|^p\, dx\right)^{1/r} \left(\int_0^1 |f_j(x)|^{(2-p)s+p}\right)^{1/s}. \tag{8}$$

В силу инвариантности интеграла относительно обобщенного сдвига

$$\left(\int_0^1 |f_j(x)|^{(2-p)s+p}\, dx\right)^{1/s} \leqslant (\omega_k(f)_{(2-p)s+p})^{2-p+p/s}. \tag{9}$$

Возводя обе части (8) в степень r и используя (9), приходим к неравенству

$$B_k^r \leqslant C_2(\omega_k(f)_{(2-p)s+p})^{2r-p}\int_0^1 |f_j(x)|^p\,dx. \tag{10}$$

Умножая (10) на $1/\lambda_j$ и суммируя полученные неравенства по $j=1,\ldots,m_k$, находим, что

$$\Lambda_{m_k}B_k^r \leqslant C_2(\omega_k(f)_{(2-p)s+p})^{2r-p}\int_0^1\sum_{j=1}^{m_k}\frac{|f_j(x)|^p}{\lambda_j}\,dx \leqslant C_2(\omega_k(f)_{(2-p)s+p})^{2r-p}V^p_{\Lambda,p}(f),$$

откуда следует, что

$$B_k \leqslant C_1\left(\frac{(\omega_k(f)_{(2-p)s+p})^{2r-p}V_{\Lambda,p}(f)}{\Lambda_{m_k}}\right)^{1/r}. \tag{11}$$

При $0<\beta<2$, используя неравенство Гельдера и определение $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}\in A_{2/(2-\beta)}$, аналогично доказательству теоремы 1 имеем

$$\sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1}\gamma_j|\widehat{f}(j)|^\beta \leqslant C_3 m_k^{-\beta/2}\Gamma_k\left(\frac{\omega_k(f)_{(2-p)s+p})^{2r-p}}{\Lambda_{m_k}}\right)^{\beta/(2r)}. \tag{12}$$

Для $\beta=2$ и $\gamma\in A(\infty)$ справедлив аналог (12) в силу (11). Складывая неравенства (12) по $k\geqslant 1$, получаем, что (3) мажорируется сходящимся рядом. $\square$

Теорема 3. *Пусть* $f\in\Lambda\mathscr{F}\mathscr{L}(p(n)\uparrow\infty)\cap C^*[0,1)$, $0<\beta<2$, $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}\in A_{2/(2-\beta)}$. *Если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma_k\left(\frac{\omega_k(f)_\infty}{\Lambda_{m_k}^{1/p(k)}}\right)^{\beta/2},$$

то ряд (3) *тоже сходится.*

Доказательство. В силу неравенства Гельдера с показателями $p(k)$, $q(k)$, $1/p(k)+1/q(k)=1$ имеем

$$\sum_{j=1}^{m_k}\frac{|f_j(x)|}{\lambda_j}\leqslant\left(\sum_{j=1}^{m_k}\frac{|f_j(x)|^{p(k)}}{\lambda_j}\right)^{1/p(k)}\left(\sum_{j=1}^{m_k}\frac{1}{\lambda_j}\right)^{1/q(k)}. \tag{13}$$

Так как $x\oplus j/m_k\oplus 1/m_{k+1}$ и $x\oplus j/m_k$ принадлежат одному $I^k_{l_j}$, а при разных j эти числа принадлежат разным $I^k_{l_j}$, то

$$\left(\sum_{j=1}^{m_k}\frac{|f_j(x)|^{p(k)}}{\lambda_j}\right)^{1/p(k)}\leqslant\left(\sum_{j=1}^{m_k}\frac{osc^{p(k)}(f,I^k_{l_j})}{\lambda_j}\right)^{1/p(k)}$$

и тем более левая часть последнего неравенства не превосходит $V_{\Lambda,p(n)}(f)$. Поэтому, использовав неравенство (6) из теоремы 1 и (13), получаем

$$B_k\leqslant C_2\Lambda^{-1}_{m_k}\omega_k(f)_\infty\Lambda^{1/q(k)}_{m_k}=C_2\frac{\omega_k(f)_\infty}{\Lambda^{1/p(k)}_{m_k}}.$$

Далее оцениваем

$$\sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1}\gamma_j|\widehat{f}(j)|^\beta \leqslant \left(\sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1}\gamma_j^{2/(2-\beta)}\right)^{(2-\beta)/2} B_k^{\beta/2} \leqslant C_3 m_k^{-\beta/2}\Gamma_k\left(\frac{\omega_k(f)_\infty}{\Lambda_{m_k}^{1/p(k)}}\right)^{\beta/2}. \qquad (14)$$

Суммируя неравенства (14), имеем

$$\sum_{j=m_1}^{\infty}\gamma_j|\widehat{f}(j)|^\beta \leqslant C_3\sum_{k=1}^{\infty} m_k^{-\beta/2}\Gamma_k\left(\frac{\omega_k(f)_\infty}{\Lambda_{m_k}^{1/p(k)}}\right)^{\beta/2}.$$

□

Следствие 1. *Пусть* $f \in \Lambda\mathscr{F}\mathscr{L}(p(n)\uparrow\infty)\cap C^*[0,1)$, $0<\beta\leqslant 2$, $\delta\geqslant 0$. *Если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k^{1+\delta-\beta/2}\left(\frac{\omega_k(f)_\infty}{\Lambda_{m_k}^{1/p(k)}}\right)^{\beta/2},$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^\delta|\widehat{f}(k)|^\beta$ *сходится.*

Благодарности. Автор выражает признательность С. С. Волосивцу за постановку задачи и ценные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-04864, 17-51-53180) и Минобрнауки РФ (проект № 1.1660.2017/ПЧ).

Библиографический список

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша : Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.
2. *Waterman D.* On the summability of Fourier series of functions of Λ-bounded variation // Studia math. 1976. Vol. 55, № 1. P. 87–95.
3. *Shiba M.* On absolute convergence of Fourier series of functions of class $\Lambda BV^{(p)}$ // Sci. Rep. Fukushima Univ. 1980. Vol. 30. P. 7–10.
4. *Kita H., Yoneda K.* A generalization of bounded variation // Acta Math. Hung. 1990. Vol. 56, № 3–4. P. 229–238. DOI: 10.1007/BF01903837.
5. *Gogoladze L., Meskhia R.* On the absolute convergence of trigonometric Fourier series // Proc. Razmadze Math. Inst. 2006. Vol. 141. P. 29–40.
6. *Ульянов П. Л.* О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28, № 4. С. 925–950.
7. *Moricz F.* Absolute covergence of Walsh – Fourier series and related results // Analysis Math. 2010. Vol. 36, № 4. P. 275–286. DOI: 10.1007/s10476-010-0402-z.
8. *Golubov B. I, Volosivets S. S.* Generalized absolute convergence of single and double Fourier series with respect to multiplicative systems // Analysis Math. 2012. Vol. 38, № 2. P. 105–122. DOI: 10.1007/s10476-012-0202-8.
9. *Vyas R. G.* Generalized absolute convergence of trigonometric Fourier series // Modern Mathematical Methods and High Performance Computing in Science and Technology. Springer Proc. in Mathematics and Statistics. 2016. Vol. 171. P. 231–237. DOI 10.1007/978-981-10-1454-3_19.

10. *Vyas R. G.* Absolute convergence of Walsh – Fourier series // Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. 2013. Vol. 56. P. 71–77.

Образец для цитирования:
Кузнецова М. А. Обобщенная абсолютная сходимость рядов Фурье по мультипликативным системам функций обобщенной ограниченной вариации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 3. С. 304–312. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-304-312.

Generalized Absolute Convergence of Series with Respect to Multiplicative Systems of Functions of Generalized Bounded Variation

M. A. Kuznetsova

Maria A. Kuznetsova, ORCID: 0000-0003-1083-0799, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, maffka2@bk.ru

A. Zygmund proved that a 2π-periodic function with bounded variation and from any Lipschitz class $Lip(\alpha)$ has absolutely convergent Fourier series. This result was extended to many classes of functions of generalized bounded variation (for example, functions of bounded Jordan – Wiener p-variation, functions of bounded Λ-variation introduced by D. Waterman et al) and to different spaces defined with the help of moduli of continuity. We study the convergence of series $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\gamma_k|\hat{f}(k)|^{\beta}$, where $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ is a sequence from appropriate Gogoladze – Meskhia class, while $\{\hat{f}(k)\}_{k=0}^{\infty}$ are Fourier coefficients of $f \in L^1[0,1)$ with respect to a multiplicative system. The sufficient conditions for convergence of these series are obtained under assertion of boundedness of generalized fluctuation determined by a number $p \geqslant 1$ and sequence Λ and in terms of uniform or integral moduli of continuity. By using fluctuation (i.e. the oscillations of a function are considered only with respect to the restricted class of partitions and its intervals) instead of variation we obtain more general assertions. The results of the present paper give an analogue or generalize some results of R.G.Vyas concerning trigonometric or Walsh series.

Key words: absolute convergence, series with respect to multiplicative systems, functions of generalized bounded variation.

Acknowledgements: The author is grateful to Sergey S. Volosivets for the problem formulation and valuable discussions. This work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 15-01-04864, 17-51-53180) and by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.1660.2017/PCh).

References

1. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. *Walsh series and transforms. Theory and applications*. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1991. 380 p.
2. Waterman D. On the summability of Fourier series of functions of Λ-bounded variation. *Studia Math.*, 1976, vol. 55, no. 1, pp. 87–95.
3. Shiba M. On absolute convergence of Fourier series of functions of class $\Lambda BV^{(p)}$. *Sci. Rep. Fukushima Univ.*, 1980, vol. 30, pp. 7–10.

4. Kita H., Yoneda K. A generalization of bounded variation. *Acta Math. Hung.*, 1990, vol. 56, no. 3-4, pp. 229–238. DOI: 10.1007/BF01903837.
5. Gogoladze L., Meskhia R. On the absolute convergence of trigonometric Fourier series. *Proc. Razmadze Math. Inst.*, 2006, vol. 141, pp. 29–40.
6. Uljanov P. L. O ryadakh po systeme Haara s monotonnymi koefficientami [On Haar series with monotone coefficients]. *Izvestiya AN SSSR. Ser. matem.*, 1964, vol. 28, no. 4, pp. 925–950 (in Russian).
7. Moricz F. Absolute covergence of Walsh-Fourier series and related results. *Analysis Math.*, 2010, vol. 36, no. 4, pp. 275–286. DOI: 10.1007/s10476-010-0402-z.
8. Golubov B. I, Volosivets S. S. Generalized absolute convergence of single and double Fourier series with respect to multiplicative systems. *Analysis Math.*, 2012, vol. 38, no. 2, pp. 105–122. DOI: 10.1007/s10476-012-0202-8.
9. Vyas R. G. Generalized absolute convergence of trigonometric Fourier series. *Modern Mathematical Methods and High Performance Computing in Science and Technology, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2016, vol. 171, pp. 231–237. DOI 10.1007/978-981-10-1454-3_19.
10. Vyas R. G. Absolute convergence of Walsh – Fourier series. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math.*, 2013, vol. 56, pp. 71–77.

Cite this article as:

Kuznetsova M. A. Generalized Absolute Convergence of Series with Respect to Multiplicative Systems of Functions of Generalized Bounded Variation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 3, pp. 304–312 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-304-312.