УДК 517.984

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Е. В. Назарова[1], В. А. Халова[2]

[1]Назарова Екатерина Викторовна, кандидат физико-математических наук, заведующий предметно-цикловой кафедрой общепрофессиональных дисциплин, образовательное учреждение Центрального банка РФ, 127273, Россия, Москва, Сигнальный проезд, 23, nazarovi@inbox.ru
[2]Халова Виктория Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, HalovaVA@info.sgu.ru

В статье рассматривается интегральный оператор, ядро которого имеет разрывы первого рода на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$. Установлена равносходимость разложений в ряд Фурье произвольной интегрируемой функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям рассматриваемого оператора и разложений линейной комбинации функций $f(x)$ и $f(1 - x)$ по обычной тригонометрической системе. Для исследования равносходимости привлекается прием, основанный на методе Коши – Пуанкаре интегрирования резольвенты по спектральному параметру. Доказательства широко используют приемы, разработанные А. П. Хромовым в исследовании вопросов спектральной теории интегральных операторов. В последнее время эти приемы нашли применение при решении краевых задач математической физики методом Фурье при минимальных условиях гладкости начальных данных.

Ключевые слова: теорема равносходимости, интегральный оператор, резольвента, собственные функции, инволюция.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-313-330

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается интегральный оператор вида

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt + \alpha \int_0^{x} A(x,t)f(t)\,dt, \qquad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha^2 \neq 1$. На ядро $A(x,t)$ наложены следующие ограничения: $A(x,x) = 1$, $\dfrac{\partial A(x,t)}{\partial x}\Big|_{t=x} = 0$.

Исследуется равносходимость разложений произвольной функции $f(x) \in L[0,1]$ в ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора (1) и разложений линейной комбинации функций $f(x)$ и $f(1-x)$ по обычной тригонометрической системе.

Для исследования равносходимости привлекается резольвента Фредгольма и применяется метод контурного интегрирования резольвенты по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра. Существенное развитие резольвентный метод в исследованиях равносходимости для интегральных, интегро-дифференциальных и функционально-дифференциальных операторов получил в работах А. П. Хромова и его учеников (см. например, [1–4]). Отметим, что разработанный А. П. Хромовым резольвентный подход стал широко применяться при решении задач математической физики методом Фурье при минимальной гладкости начальных данных [5, 6].

Интегральный оператор (1) является частным случаем оператора, исследуемого в работе [7], на ядро которого наложены ограничения $\dfrac{\partial^j A(x,t)}{\partial x^j}\Big|_{t=x} = \delta_{j,n-1}$, $j = 0,\ldots,n$, δ_{ij} — символ Кронекера. Все доказательства и рассуждения в работе [7] проведены для случая четного n.

В данной статье теорема равносходимости получена для случая нечетного $n = 1$ при $\alpha \neq 0$ (случай $\alpha = 0$ рассмотрен в [2]). Важным достоинством оператора (1) является то, что в условиях получаемой теоремы равносходимости не требуется проверка условий регулярности по Биркгофу линейных форм в естественных граничных условиях [8], которые в общем случае трудно проверяемы. При этом в настоящей работе получение формулы и оценок для резольвенты простейшего оператора проводится иным, чем в работе [7], методом (см. [9]).

1. РЕЗОЛЬВЕНТА ПРОСТЕЙШЕГО ОПЕРАТОРА

Рассмотрим резольвенту Фредгольма $R_{0,\lambda} = (E - \lambda A_0)^{-1} A_0$ (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр) простейшего оператора A_0:

$$A_0 f = \int\limits_0^{1-x} f(t)\,dt + \alpha \int\limits_0^{x} f(t)\,dt.$$

Лемма 1. *Если λ таково, что $R_{0,\lambda}$ существует, то $z(x)$, где $z_1(x) = R_{0,\lambda} f(x)$, $z_2(x) = z_1(1-x)$, удовлетворяет уравнению*

$$z'(x) - \lambda B_1 z(x) = B_1 F(x) \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$P_1 z(0) + Q_1 z(1) = 0, \tag{3}$$

где $B_1 = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$, $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$ (T — знак транспонирования), $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$, $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Пусть $z_1(x) = R_{0,\lambda} f(x) = (E - \lambda A_0)^{-1} A_0 f(x)$. Тогда

$$z_1(x) - \lambda \left(\int\limits_0^{1-x} z_1(t)\,dt + \alpha \int\limits_0^{x} z_1(t)\,dt \right) = \int\limits_0^{1-x} f(t)\,dt + \alpha \int\limits_0^{x} f(t)\,dt. \tag{4}$$

Дифференцируя (4) по x и заменяя x на $1-x$, из построенных уравнений получаем[1]:

$$z_1'(1-x) - \lambda(-z_1(x) + \alpha z_1(1-x)) = -f(x) + \alpha f(1-x). \tag{5}$$

[1] $z_1'(1-x)$ понимается как $\dfrac{z_1(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=1-x}$.

Обозначим $z_2(x) = z_1(1-x)$. Тогда из (5) с учетом $z_2'(x) = -z_1'(1-x)$ получаем (2), а из (4) при $x = 1$ и $x = 0$ получаем (3). □

Лемма 2. *Если $z(x)$ удовлетворяет (2), (3) и соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение, то $R_{0,\lambda}$ существует, $R_{0,\lambda}f(x) = z_1(x)$ и $z_2(x) = z_1(1-x)$.*

Доказательство. Пусть $z(x)$ удовлетворяет (2), (3). Обозначим $u_1(x) = z_2(1-x)$, $u_2(x) = z_1(1-x)$, $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$. Легко показать, что $u(x)$ также удовлетворяет (2), (3). Тогда разность $z(x)-u(x)$ будет решением задачи (2), (3) при $F(x) = 0$. Следовательно, $z(x) - u(x) \equiv 0$ и $z_2(x) = u_2(x) = z_1(1-x)$.

Докажем, что $R_{0,\lambda}f(x)$ существует и $z_1(x) = R_{0,\lambda}f(x)$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$y'(x) = g(x), \qquad y(1) = \beta y(0). \tag{6}$$

Решение задачи (6) при $\beta \neq 1$ существует, единственно и имеет вид

$$y(x) = \int\limits_0^x g(t)\,dt + \frac{1}{\beta-1}\int\limits_0^1 g(t)\,dt.$$

Соответствующая (2), (3) краевая задача в скалярном случае имеет тот же вид, что и вспомогательная задача (6). Поэтому

$$z_1(x) = \lambda\int\limits_0^x (\alpha z_1(t) - z_1(1-t))\,dt + \int\limits_0^x (\alpha f(t) - f(1-t))\,dt +$$
$$+\frac{1}{\alpha-1}\int\limits_0^1 (\alpha z_1(t) - z_1(1-t))\,dt + \frac{1}{\alpha-1}\int\limits_0^1 (\alpha f(t) - f(1-t))\,dt. \tag{7}$$

Используя замену переменных и несложные преобразования (7), получим

$$(E - \lambda A_0)z_1(x) = A_0 f(x). \tag{8}$$

Оператор $E - \lambda A_0$ ограниченно обратим. Поэтому из (8) получаем $z_1(x) = (E-\lambda A_0)^{-1}A_0 f(x) = R_{0,\lambda}f(x)$. Лемма доказана. □

Существует неособая матрица Γ такая, что $D = \Gamma^{-1}B_1\Gamma = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha^2-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\alpha^2-1}\end{pmatrix}$.

В качестве Γ возьмем $\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha+\sqrt{\alpha^2-1} & \alpha-\sqrt{\alpha^2-1} \\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Используя замену $z(x) = \Gamma v(x)$, где $v(x) = (v_1(x), v_2(x))^T$, из задачи (2), (3) получим:

$$v'(x) - \lambda D v(x) = BF(x), \tag{9}$$
$$Pv(0) + Qv(1) = 0, \tag{10}$$

где $B = \Gamma^{-1}B_1$, $P = P_1\Gamma$, $Q = Q_1\Gamma$.

Лемма 3. *Имеет место формула*

$$R_{0,\lambda}f(x) = (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})v_1(x) + (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})v_2(x), \tag{11}$$

где $v(x) = (v_1(x), v_2(x))^T$ *— решение краевой задачи* (9), (10).

Доказательство. По лемме 2 имеем $R_{0,\lambda}f(x) = z_1(x)$, где $z_1(x)$ — первая компонента вектора $z(x) = \Gamma v(x)$, т. е. $z_1(x) = (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})v_1(x) + (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})v_2(x)$. □

Займемся решением задачи (9), (10). Матрица $V(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}x} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda\sqrt{\alpha^2-1}x} \end{pmatrix}$ является фундаментальным решением однородного матричного уравнения:

$$V'(x) - \lambda D V(x) = 0.$$

Ее определитель равен 1, следовательно, для матрицы $V(x,\lambda)$ существует обратная матрица $W(x,\lambda)$.

Введем в рассмотрение матрицу $W(x,t,\lambda)$, элементы которой определяются формулами:

$$W_{kl}(x,t,\lambda) = \begin{cases} W_{kl}(t,\lambda), & \text{при } t \leqslant x, \\ 0, & \text{при } t > x, \end{cases} \qquad k,l = 1,2, \tag{12}$$

или

$$W_{kl}(x,t,\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \leqslant x, \\ -W_{kl}(t,\lambda), & \text{при } t > x, \end{cases} \qquad k,l = 1,2. \tag{13}$$

Далее будет указано правило выбора функций $W_{kl}(x,t,\lambda)$ (подробнее см. [7, с. 36–41]).

Лемма 4. *Общее решение уравнения* (9) *имеет вид*

$$v(x,\lambda) = V(x,\lambda)C + \int_0^1 g(x,t,\lambda)BF(t)\,dt, \tag{14}$$

где $C = (c_1, c_2)^T$ *— произвольный постоянный вектор,*

$$g(x,t,\lambda) = V(x,\lambda)W(x,t,\lambda). \tag{15}$$

Доказательство. Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (9), имеет вид $v(x,\lambda) = V(x,\lambda)C$, где $C = (c_1, c_2)^T$, c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения (9) найдем методом вариации произвольных постоянных. Имеем

$$v(x,\lambda) = V(x,\lambda)C(x), \tag{16}$$

где $C(x) = (c_1(x), c_2(x))^T$. Тогда

$$C'(x) = W(x,\lambda)BF(x).$$

Отсюда получаем

$$c_1(x) = c_1 + \int\limits_0^x W_{11}(t,\lambda)(BF(t))_1\,dt + \int\limits_0^x W_{12}(t,\lambda)(BF(t))_2\,dt,$$

$$c_2(x) = c_2 - \int\limits_x^1 W_{21}(t,\lambda)(BF(t))_1\,dt - \int\limits_x^1 W_{22}(t,\lambda)(BF(t))_2\,dt,$$

где $(BF(t))_i$ — i-я компонента вектора $BF(t)$.

Подставляя найденные $c_1(x)$, $c_2(x)$ в (16) и используя обозначения (12), (13), (15), получаем (14). □

Лемма 5. *Если λ таково, что $\Delta^{-1}(\lambda)$ существует, то краевая задача* (9), (10) *имеет единственное решение и это решение задается формулой*

$$v(x,\lambda) = -V(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\int\limits_0^1 U(g(x,t,\lambda))BF(t)\,dt + \int\limits_0^1 g(x,t,\lambda)BF(t)\,dt, \tag{17}$$

где $\Delta(\lambda) = U(V(x,\lambda)) = PV(0,\lambda) + QV(1,\lambda)$, $U(g(x,t,\lambda)) = Pg(0,t,\lambda) + Qg(1,t,\lambda)$.

Доказательство. По лемме 4 общее решение краевой задачи (9), (10) имеет вид (14). Подставляя (14) в краевое условие (10) и обозначив $\Delta(\lambda) = U(V(x,\lambda)) = PV(0,\lambda) + QV(1,\lambda)$, получим:

$$C = -\Delta^{-1}(\lambda)\int\limits_0^1 U(g(x,t,\lambda))BF(t)\,dt. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (14), приходим к (17). □

Теорема 1. *Если λ таково, что $\Delta^{-1}(\lambda)$ существует, то $R_{0,\lambda}$ существует и имеет место формула*

$$R_{0,\lambda}f(x) = (\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})v_1(x,\lambda) + (\alpha - \sqrt{\alpha^2-1})v_2(x,\lambda). \tag{19}$$

Доказательство теоремы следует из формулы (14) и лемм 4, 5. □

2. ОЦЕНКА РЕЗОЛЬВЕНТЫ $R_{0,\lambda}$

Займемся получением необходимых оценок $R_{0,\lambda}$ при больших значениях $|\lambda|$. Считаем, что $\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1} \geqslant 0$. Для случая $\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1} < 0$ все рассуждения проводятся аналогично. Имеем:

$$\det\Delta(\lambda) = \sqrt{\alpha^2-1}(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1})e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}}\left(1 - \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}e^{-2\lambda\sqrt{\alpha^2-1}}\right).$$

Введем следующие обозначения:

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2-1}(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}), \quad b = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}, \quad \mu = 2\lambda\sqrt{\alpha^2-1}, \quad \xi = \mu - \ln b. \tag{20}$$

Тогда $\det\Delta(\lambda) = \gamma e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}}(1-e^{-\xi}) \neq 0$, когда выполняются условия $\gamma \neq 0$ и $1-e^{-\xi} \neq 0$.

Обозначим через S_{δ_0} область, получающуюся из λ-плоскости путем удаления нулей функции $1-e^{-\xi}$ вместе с окрестностями одного и того же радиуса δ_0, причем $0 < \delta_0 < 1/2$, ξ из (20).

Лемма 6. *Пусть* $\det\Delta(\lambda) \neq 0$. *Тогда в области* S_{δ_0} *справедлива оценка*

$$\frac{1}{\det\Delta(\lambda)} = O\left(e^{-\lambda\sqrt{\alpha^2-1}}\right). \tag{21}$$

Доказательство. Имеем

$$\left|\frac{1}{\det\Delta(\lambda)}\right| = \frac{\left|e^{-\lambda\sqrt{\alpha^2-1}}\right|}{|\gamma||1-e^{-\xi}|}.$$

Докажем, что $|1-e^{-\xi}| \geqslant C > 0$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\operatorname{Re}\xi \geqslant \delta$, где $\delta > \delta_0 > 0$. Тогда $|1-e^{-\xi}| \geqslant 1-|e^{-\xi}| = 1-e^{-\operatorname{Re}\xi} \geqslant$ $\geqslant 1-e^{-\delta} \geqslant C > 0$.

Случай 2. Пусть теперь $\operatorname{Re}\xi \leqslant \delta$. Имеем $\operatorname{Re}\xi = \operatorname{Re}\mu - \operatorname{Re}\ln b$. Ранее предполагалось, что $\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1} \geqslant 0$. Следовательно, $\operatorname{Re}\mu \geqslant 0$. Отсюда получаем $\operatorname{Re}\xi \geqslant -\operatorname{Re}\ln b$. Тогда $-\operatorname{Re}\ln b \leqslant \operatorname{Re}\xi \leqslant \delta$. Таким образом, последнему неравенству удовлетворяют такие комплексные значения переменной ξ, которые геометрически находятся в части области S_{δ_0}, имеющей вид полосы с вырезанными кругами радиуса δ_0, причем центры кругов $\xi_k = 2\pi k i$.

Разобьем полосу $\{\xi \in S_{\delta_0} | -\operatorname{Re}\ln b \leqslant \operatorname{Re}\xi \leqslant \delta\}$ на одинаковые прямоугольники Π_k, где $\Pi_k = \{\xi \in S_{\delta_0} | -\operatorname{Re}\ln b \leqslant \operatorname{Re}\xi \leqslant \operatorname{Re}\delta,\ 2k\pi \leqslant \operatorname{Im}\xi \leqslant 2(k+1)\pi\}$, $k \in Z$. В каждом из них функция $1-e^{-\xi}$ не обращается в ноль, причем $|1-e^{-\xi}| \geqslant C > 0$. Следовательно, во всей полосе $|1-e^{-\xi}| \geqslant C > 0$. Тогда $\dfrac{1}{\det\Delta(\lambda)} = O\left(e^{-\lambda\sqrt{\alpha^2-1}}\right)$. □

Лемма 7. *В области* S_{δ_0} *для каждого элемента* $\eta_{ij}(x,\lambda)$ $(i = 1,2)$ *матрицы* $V(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)$ *верны оценки*

$$\|\eta_{ij}(x,\lambda)\|_\infty = O(1), \tag{22}$$

$$\|\eta_{ij}(x,\lambda)\|_1 = O\left(\varkappa\left(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}\right)\right), \tag{23}$$

где $\varkappa(y) = (1-e^{-y})/y$, $y > 0$, $i,j = 1,2$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ — *нормы в* $L_\infty[0,1]$ *и* $L[0,1]$ *соответственно.*

Доказательство. По лемме 6 имеем

$$V(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} O\left(e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x-1)}\right) & O\left(e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x-1)}\right) \\ O\left(e^{-\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x+2)}\right) & O\left(e^{-\lambda\sqrt{\alpha^2-1}x}\right) \end{pmatrix}.$$

В силу того что $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1} \geqslant 0$, верны оценки: $\|\eta_{ij}\|_\infty = O(1)$, $i,j = 1,2$.

Далее,

$$\|\eta_{11}\|_1 = \int_0^1 |\eta_{11}(x,\lambda)|\,dx = O\left(\int_0^1 e^{\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x-1)}\,dx\right) = O(\varkappa(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1})).$$

Аналогично получаем оценки для $\|\eta_{12}\|_1$, $\|\eta_{21}\|_1$ и $\|\eta_{22}\|_1$. Лемма доказана. □

Необходимо получить явный вид матрицы $g(x,t,\lambda)$. Из (12), (13) выберем $W_{ij}(x,t,\lambda)$ так, чтобы [2]

$$g(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(t-x)} \end{pmatrix}, \qquad t \leqslant x, \tag{24}$$

$$g(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} -e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x-t)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t > x. \tag{25}$$

Тогда

$$\int_0^1 U(g(x,t,\lambda))BF(t)\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{2} \begin{pmatrix} \int_0^1 e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(t-1)} \left(-f(t) + (\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})f(1-t)\right)\,dt \\ \int_0^1 e^{-\lambda\sqrt{\alpha^2-1}t} \left((\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})f(t) - f(1-t)\right)\,dt \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Используя формулу (26), легко получить следующие оценки.

Лемма 8. *В области S_{δ_0} для компонент вектора $\int_0^1 U(g(x,t,\lambda))BF(t)\,dt$ верны следующие оценки:*

$$\left(\int_0^1 U(g(x,t,\lambda))BF(t)\,dt\right)_i = O(1)\|f\|_1, \tag{27}$$

$$\left(\int_0^1 U(g(x,t,\lambda))BF(t)\,dt\right)_i = O\left(\varkappa\left(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}\right)\right)\|f\|_\infty, \tag{28}$$

$$\left(\int_0^1 U(g(x,t,\lambda))B\chi(t)\,dt\right)_i = O(1/\lambda), \tag{29}$$

где $i = 1, 2$, $\varkappa(y)$ та же, что и в лемме 7, $\chi(t)$ — характеристическая функция отрезка $[\eta_0, \eta_1] \subset (0,1)$.

Теперь получим оценки для последнего интегрального слагаемого в (17). Имеем

$$\int_0^1 g(x,t,\lambda)BF(t)\,dt = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\int_x^1 e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x-t)} \left(f(t) + (-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})f(1-t)\right)\,dt \\ \int_0^x e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(t-x)} \left(f(t) + (-\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})f(1-t)\right)\,dt. \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Обозначим компоненты матрицы (30) через $g_1(x,\lambda,f)$ и $g_2(x,\lambda,f)$.

[2] Представление (24), (25) замечательно тем, что компоненты матрицы $g(x,t,\lambda)$ при $t \leqslant x$ и $t \geqslant x$ ограничены, когда $|\lambda| \to \infty$.

Лемма 9. *В области S_{δ_0} верны оценки*

$$\|g_i(x,\lambda;f)\|_\infty = O(1)\|f\|_1, \tag{31}$$

$$\|g_i(x,\lambda;f)\|_\infty = O\left(\varkappa(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1})\right)\|f\|_\infty, \tag{32}$$

$$\|g_i(x,\lambda;f)\|_1 = O\left(\varkappa(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1})\right)\|f\|_1, \tag{33}$$

$$\|g_i(x,\lambda;\chi)\|_\infty = O(1/\lambda), \tag{34}$$

где $i=1,2$, $\varkappa(y)$ та же, что и в лемме 7, $\chi(t)$ — характеристическая функция отрезка $[\eta_0,\eta_1]\subset(0,1)$.

Доказательство. Имеем

$$|g_1(x,t,\lambda)| \leqslant \max_{x\leqslant t\leqslant 1} e^{\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x-t)}\left(\int\limits_0^1 |f(t)|\,dt + |-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}|\int\limits_0^1 |f(1-t)|\,dt\right) \leqslant$$
$$\leqslant C\|f\|_1 = O(1)\|f\|_1.$$

Аналогично получаем $|g_2(x,t,\lambda)| = O(1)\|f\|_1$.

Так как полученные оценки верны при любом фиксированном значении $x\in[0,1]$, то $\max|g_i(x,\lambda;f)| = O(1)\|f\|_1$. Следовательно,

$$\|g_i(x,\lambda;f)\|_\infty = O(1)\|f\|_1, \qquad i=1,2.$$

Далее, имеем

$$|g_1(x,t,\lambda)| \leqslant C\|f\|_\infty \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\frac{1-e^{\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x-1)}}{\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}} = C\|f\|_\infty\varkappa\left(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}\right).$$

Аналогичную оценку получаем для $|g_2(x,\lambda;f)|$, т.е. (32) доказана.

Докажем оценку (33). Имеем

$$\|g_1(x,\lambda;f)\|_1 \leqslant \int\limits_0^1\int\limits_x^1 e^{\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x-t)}|f(t)+(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})f(1-t)|\,dt\,dx.$$

В полученном интеграле поменяем порядок интегрирования. Получим:

$$\|g_1(x,\lambda;f)\|_1 \leqslant \int\limits_0^1\left[|f(t)+(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})f(1-t)|\int\limits_0^t e^{\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x-t)}\,dx\right]dt.$$

Для внутреннего интеграла имеем

$$\int\limits_0^t e^{\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x-t)}\,dx \leqslant \frac{1-e^{-\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}}}{\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Тогда $\|g_1(x,\lambda;f)\|_1 = O\left(\varkappa\left(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}\right)\right)\|f\|_1$. Аналогично получаем оценку для $g_2(x,\lambda;f)$. Оценка (33) доказана.

Оценки (34) получаются аналогично при замене $f(x)$ на $\chi(x)$. □

Теорема 2. *В области S_{δ_0} для резольвенты $R_{0,\lambda}f$ при $|\lambda| \to \infty$ верны оценки*

$$\|R_{0,\lambda}f\|_\infty = O\left(\varkappa(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1})\right)\|f\|_\infty, \tag{35}$$

$$\|R_{0,\lambda}f\|_\infty = O(1)\|f\|_1, \tag{36}$$

$$\|R_{0,\lambda}f\|_1 = O\left(\varkappa(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1})\right)\|f\|_1, \tag{37}$$

$$\|R_{0,\lambda}\chi\|_\infty = O(1/\lambda), \tag{38}$$

где $\varkappa(y)$ та же, что и в лемме 7, $\chi(t)$ — характеристическая функция отрезка $[\eta_0, \eta_1] \subset (0,1)$.

Доказательство. В силу лемм 6–9 имеем:

$$\|v_1(x,\lambda)\|_\infty = O(\|\eta_{11}\|_\infty)O\left(\varkappa(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1})\right)\|f\|_\infty +$$
$$+O(\|\eta_{12}\|_\infty)O\left(\varkappa(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1})\right)\|f\|_\infty + O(\|g_1(x,\lambda;f)\|_\infty) =$$
$$= O\left(\varkappa(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1})\right)\|f\|_\infty.$$

Используя более грубые оценки, получаем:

$$\|v_1(x,\lambda)\|_\infty = O(\|\eta_{11}\|_\infty)O(1)\|f\|_1 + O(\|\eta_{12}\|_\infty)O(1)\|f\|_1 + O(1)\|f\|_1 = O(1)\|f\|_1.$$

Кроме того,

$$\|v_1(x,\lambda)\|_1 = O(\|\eta_{11}\|_1)O(1)\|f\|_1 + O(\|\eta_{12}\|_1)O(1)\|f\|_1 + O\left(\varkappa(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1})\right)\|f\|_\infty =$$
$$= O\left(\varkappa(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1})\right)\|f\|_1.$$

Аналогично получим оценки для $v_2(x,\lambda)$.

Используя полученные оценки, из формулы (17) легко получаем оценки (35)–(37).

Далее, имеем

$$\|R_{0,\lambda}\chi\|_\infty = O(\|v_1(x,\lambda)\|_\infty) + O(\|v_2(x,\lambda)\|_\infty) = O(\|\eta_{11}\|_\infty)O(1/\lambda) +$$
$$+O(\|\eta_{12}\|_\infty)O(1/\lambda) + O(1/\lambda) = O(1)O(1/\lambda) = O(1/\lambda),$$

т.е. оценка (38) доказаны. □

3. ФОРМУЛА ДЛЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ $R_\lambda f$ И ОЦЕНКА РАЗНОСТИ РЕЗОЛЬВЕНТ $R_\lambda f$ И $R_{0,\lambda}f$

Переходим к получению формулы, связывающей резольвенты исходного и простейшего операторов.

Лемма 10. *Пусть $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$, тогда*

$$R_\lambda = R_{0,\lambda} - \frac{1}{1-\alpha^2}R_{0,\lambda}T'_t[S - \alpha E]R_\lambda, \tag{39}$$

где $Sf(x) = f(1-x)$, $T = (E+T_1)^{-1} - E$, т. е. T — интегральный оператор такой, что $T + E = (E+T_1)^{-1}$, а $T_1 f(x) = \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial x}A(x,t)f(t)\,dt$, T'_t — интегральный оператор с ядром $T'_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}T(x,t)$.

Доказательство. Пусть $y(x) = R_\lambda f(x)$. Тогда

$$y(x) - \lambda \left[\int\limits_0^{1-x} A(1-x,t) y(t)\,dt + \alpha \int\limits_0^x A(x,t) y(t)\,dt \right] =$$
$$= \int\limits_0^{1-x} A(1-x,t) f(t)\,dt + \alpha \int\limits_0^x A(x,t) f(t)\,dt. \qquad (40)$$

Легко проверить, что $y(x)$ удовлетворяет граничному условию $y(1) - \alpha y(0) = 0$. Дифференцируя (40) по переменной x и заменяя x на $1-x$, после упрощения получаем:

$$\frac{1}{\alpha^2-1}(E+T)[\alpha y'(x) - y'(1-x)] = \lambda y(x) + f(x), \qquad (41)$$

где $E + T = (E + T_1)^{-1}$, $T_1 f(x) = \int\limits_0^x A'_x(x,t) f(t)\,dt$.

Из этих рассуждений, проводимых в обратном порядке, и с учетом того что $(A_0(x,t))'_x \equiv 0$, вытекает, что если $z(x)$ удовлетворяет граничному условию $z(1) = \alpha z(0)$ и выполняется соотношение $\frac{1}{\alpha^2-1}[\alpha z'(x) - z'(1-x)] = \lambda z(x) + f(x)$, то $z(x) = R_{0,\lambda} f$.

Тогда из (41) получим формулу для резольвенты $R_\lambda f$. Итак, пусть $z(x) = R_{0,\lambda} f$, $y(x) = R_\lambda f$. Тогда

$$y(x) = R_{0,\lambda} f(x) - \frac{1}{\alpha^2-1} R_{0,\lambda}(\alpha T y'(x) - T y'(1-x)). \qquad (42)$$

Интегрируя по частям $Ty'(x) = \int\limits_0^x T(x,t) y'(t)\,dt$, учитывая, что $T(x,x) \equiv 0$ и граничные условия, после несложных преобразований получим:

$$y(x) = R_{0,\lambda} f(x) - \frac{1}{1-\alpha^2} R_{0,\lambda} T'_t [S - \alpha E] y(x),$$

Лемма доказана. □

Лемма 11. *Ядро интегрального оператора $R_{0,\lambda} T'_t [S - \alpha E]$ есть $o(1)$ при $|\lambda| \to \infty$ в области S_{δ_0} равномерно по остальным переменным.*

Доказательство. Докажем утверждение леммы для $R_{0,\lambda} T'_t$. Выпишем выражение для $R_{0,\lambda} f$ и заменим $f(x)$ на $T'_t f(x)$. Имеем

$$R_{0,\lambda} f(x) = \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})\sqrt{\alpha^2-1}}{2} \times$$
$$\times \left(\eta_{11} \int\limits_0^1 e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(t-1)} \Big(-f(t) + (\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}) f(1-t) \Big)\,dt + \right.$$
$$\left. + \eta_{12} \int\limits_0^1 e^{-\lambda\sqrt{\alpha^2-1}t} \Big((\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}) f(t) - f(1-t) \Big)\,dt \right) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_x^1 e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x-t)}\left(f(t)+(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})f(1-t)\right)dt-\frac{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})\sqrt{\alpha^2-1}}{2}\times$$

$$\times\Bigg(\eta_{21}\int\limits_0^1 e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(t-1)}\left(-f(t)+(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})f(1-t)\right)dt+$$

$$+\eta_{22}\int\limits_0^1 e^{-\lambda\sqrt{\alpha^2-1}t}\left((\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})f(t)-f(1-t)\right)dt\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(t-x)}\left(f(t)+(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})f(1-t)\right)dt. \qquad (43)$$

Рассмотрим $\int\limits_0^1 e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x-1)}f(x)\,dx$. Заменим $f(x)$ на $T'_t f(x)$, тогда:

$$\int\limits_0^1 e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x-1)}\int\limits_0^x T'_t(x,t)f(t)\,dt\,dx. \qquad (44)$$

Поменяем порядок интегрирования и к внутреннему интегралу применим соотношение из [10]

$$\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(\xi,t)e^{z\xi}\,d\xi=o(e^{z\gamma_1})+o(e^{z\gamma_2})\quad\text{при}\quad |z|\to\infty.$$

Получим:

$$\int\limits_t^1 T'_t(x,t)e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x-1)}\,dx=o(1)\quad\text{при}\quad |\lambda|\to\infty.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x-1)}\int\limits_0^x T'_t(x,t)f(t)\,dt\,dx=\int\limits_0^1 o(1)f(t)\,dt\quad\text{при}\quad |\lambda|\to\infty. \qquad (45)$$

Аналогично оцениваются и другие интегралы в (43). Учитывая лемму 7, получим

$$R_{0,\lambda}T'_t f(x)=\int\limits_0^1 o(1)f(t)\,dt\quad\text{при}\quad |\lambda|\to\infty.$$

Таким образом, $R_{0,\lambda}T'_t[S-\alpha E]$ — интегральный оператор с ядром $o(1)$ при $|\lambda|\to\infty$ в области S_{δ_0} равномерно по остальным переменным. Лемма доказана □

Значит, оператор $E-\frac{1}{1-\alpha^2}R_{0,\lambda}T'_t[S-\alpha E]$ обратим при достаточно больших $|\lambda|$, и этот обратный оператор ограничен по $|\lambda|$. Применим этот обратный оператор к (39). Тогда (39) примет вид

$$R_\lambda=R_{0,\lambda}-\frac{1}{1-\alpha^2}R_{0,\lambda}T'_t[S-\alpha E]\left(E-\frac{1}{1-\alpha^2}R_{0,\lambda}T'_t[S-\alpha E]\right)^{-1}R_{0,\lambda}. \qquad (46)$$

Лемма 12. *В области S_{δ_0} справедливы оценки:*

$$\|(R_\lambda - R_{0,\lambda})f\|_\infty = O\left(\varkappa^2(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1})\right)\|f\|_1, \tag{47}$$

$$\|(R_\lambda - R_{0,\lambda})\chi\|_\infty = O\left(\varkappa(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1})\right)O(1/\lambda), \tag{48}$$

где $\varkappa(y)$ и $\chi(x)$ те же, что и в лемме 7.

Доказательство следует из формулы (46) и оценок для $R_{0,\lambda}$(35)–(38). □

Теорема 3. *Для любой $f(x) \in L[0,1]$ имеет место*

$$\lim_{r\to\infty}\|\Omega_r f\|_\infty = 0, \tag{49}$$

где $\Omega_r f = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda\sqrt{\alpha^2-1}|=r}(R_\lambda - R_{0,\lambda})f(x)\,d\lambda$, *а r таково, что* $\{\lambda|\ |\lambda\sqrt{\alpha^2-1}| = r,$ $-\pi/2 \leqslant \arg\lambda\sqrt{\alpha^2-1} \leqslant \pi/2\} \subset S_{\delta_0}$.

Доказательство. Имеем

$$\left|\int\limits_{|\lambda\sqrt{\alpha^2-1}|=r}\varkappa^2\left(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}\right)d\lambda\right| = \left|\int\limits_{|\lambda\sqrt{\alpha^2-1}|=r}\left(\frac{1-e^{-\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}}}{\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}}\right)^2 d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|\lambda\sqrt{\alpha^2-1}|=r}\frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}|^2}\left(1-\left|e^{-\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}}\right|\right)^2|d\lambda| = O\left(\int\limits_0^{\theta_r}\frac{1}{\xi^2}(1-e^{-\xi})^2\,d\xi\right). \tag{50}$$

При $r\to\infty$ получаем несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом интегрирования от функции, имеющей особенность в нуле: $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\xi^2}(1-e^{-\xi})^2\,d\xi$. Разобьем этот интеграл на два интеграла: $\int\limits_0^1$ и $\int\limits_1^\infty$. В первом используем разложение функции $e^{-\xi}$ в ряд Тейлора. Во втором интеграле, используя ограниченность функции $|1-e^{-\xi}|$ при $\xi \geqslant 1$, заменим $\max\limits_{1<\xi<\infty}|1-e^{-\xi}|$ неотрицательной константой. Получим:

$$\int\limits_{|\lambda\sqrt{\alpha^2-1}|=r}\varkappa^2\left(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}\right)d\lambda = O(1).$$

Учитывая лемму 12, получаем:

$$\|\Omega_r f\| = O(1)\|f\|_1. \tag{51}$$

Пусть теперь $f(x) = \chi(x)$. Тогда с учетом леммы 12 имеем:

$$|\Omega_r\chi| = O\left(\int\limits_{|\lambda\sqrt{\alpha^2-1}|=r}\left|\varkappa\left(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}\right)\right|\frac{1}{|\lambda|}\,|d\lambda|\right). \tag{52}$$

По неравенству Коши – Буняковского из (52) получаем:

$$\int\limits_{|\lambda\sqrt{\alpha^2-1}|=r} |\varkappa\left(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\alpha^2-1}\right)|\frac{1}{|\lambda|}\,d|\lambda| = \sqrt{O(1)}\sqrt{O(1/\lambda)} = O(|\lambda|^{-1/2}).$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано для $f(x) = \chi(x)$. Тогда по теореме Банаха – Штейнгауза оно верно и для произвольной функции $f(x) \in L[0,1]$. $\square$

Замечание. Так как Ω_r равно разности частичных сумм разложений по с.п.ф. операторов A_0 и A для тех характеристических значений, которые попадают в круг $|\lambda| < r$, то теорема 3 доказывает равносходимость спектральных разложений для операторов A и A_0.

4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Приступим к задаче о равносходимости разложений по с.п.ф. оператора A и в тригонометрический ряд Фурье.

Введем краевую задачу:

$$u'(x) - \lambda D u(x) = BF(x), \tag{53}$$

$$u(0) = u(1), \tag{54}$$

где $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$, D, B, $F(x)$ те же, что и в (9).

Лемма 13. *Пусть λ таково, что $\Delta^{-1}(\lambda)$ существует, $v(x,\lambda)$ — решение задачи* (9)*,* (10)*, $u(x,\lambda)$ — решение задачи* (53)*,* (54)*. Тогда*

$$v(x,\lambda) - u(x,\lambda) = -V(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)U(u(x,\lambda)),$$

где $V(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}x} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda\sqrt{\alpha^2-1}x} \end{pmatrix}$, *$P$, Q — матрицы из* (10).

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию $w(x,\lambda) = v(x,\lambda) - u(x,\lambda)$. Очевидно, что $w(x,\lambda)$ удовлетворяет однородному уравнению $w' - \lambda D w = 0$. Тогда $w(x,\lambda) = V(x,\lambda)C$, где C — вектор, который легко найти, применяя краевое условие (54). Таким образом, $C = -\Delta^{-1}(\lambda)U(u(x,\lambda))$. Отсюда получаем утверждение леммы. $\square$

Теперь положим в задаче (53), (54) $F(x) = 0$. Числа $\lambda_k = \dfrac{2k\pi i}{\sqrt{\alpha^2-1}}$ $(k \in \mathbb{Z})$ являются собственными значениями для $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Удалим дополнительно из области S_{δ_0} точки $\lambda_k = \dfrac{2k\pi i}{\sqrt{\alpha^2-1}}$ вместе с δ_0-окрестностями и обозначим получившуюся область вновь через S_{δ_0}.

Лемма 14. *В области S_{δ_0} верны оценки:*

$$U(u(x,\lambda)) = (O(1), O(1))^T\,\|f\|_1, \tag{55}$$

$$U(u(x,\lambda)) = (O(1/\lambda), O(1/\lambda))^T, \quad \text{\textit{если}} \quad F(t) = (\chi(t), \chi(1-t))^T. \tag{56}$$

Доказательство. Рассмотрим скалярный оператор с краевым условием:

$$y'(x) - \lambda y(x), \quad y(0) = y(1). \tag{57}$$

Системой собственных функций этого оператора является обычная тригонометрическая система $e^{2k\pi x}$, а собственными значениями — $\lambda_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Обозначим через $G(x,t,\lambda)$ функцию Грина этого оператора. Тогда

$$\begin{cases} u_1'(x) = \int\limits_0^1 G(x,t,\lambda\sqrt{\alpha^2-1})(BF(t))_1\,dt, \\ u_2'(x) = \int\limits_0^1 G(x,t,\lambda\sqrt{\alpha^2-1})(BF(t))_2\,dt, \end{cases} \tag{58}$$

где

$$G(x,t,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda(x-t)}}{1-e^{\lambda}}, & t \leqslant x, \\ \dfrac{e^{\lambda(1+x-t)}}{1-e^{\lambda}}, & t \geqslant x. \end{cases} \tag{59}$$

Так как $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, то $G(x,t,\lambda) = O(1)$. Тогда $u_1(x,\lambda) = O(\|f\|_1)$. Аналогично получаем $u_2(x,\lambda) = O(\|f\|_1)$.

Пусть теперь $f(x) = \chi(x)$. Рассмотрим три случая: 1) $0 \leqslant x \leqslant \eta_0$, $t \geqslant x$; 2) $\eta_0 < x < \eta_1$; 3) $x \geqslant \eta_1$, $t \leqslant x$.

Случай 1. Имеем

$$\int\limits_{[\eta_0,\eta_1]\cap[0,1]} G(x,t,\lambda\sqrt{\alpha^2-1})\,dt = -\frac{1}{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}}\left(\frac{e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x+1-\eta_1)}}{1-e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}}} - \frac{e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}(x+1-\eta_0)}}{1-e^{\lambda\sqrt{\alpha^2-1}}}\right) = O(1/\lambda).$$

Аналогично рассматриваются случаи 2 и 3. Лемма доказана. □

Лемма 15. *Для любого $0 < \delta < 1/2$ в области S_{δ_0} справедливы оценки:*

$$\|v_i(x,\lambda) - u_i(x,\lambda)\|_{C[\delta,1-\delta]} = \|f\|_1 O(e^{-\lambda\sqrt{\alpha^2-1}\delta}), \quad i=1,2, \tag{60}$$

$$\|v_i(x,\lambda) - u_i(x,\lambda)\|_{C[\delta,1-\delta]} = O\left(\frac{e^{-\lambda\sqrt{\alpha^2-1}\delta}}{\lambda}\right), \quad i=1,2, \quad \textit{если} \quad f(x) = \chi(x). \tag{61}$$

Доказательство. Из леммы 13 следует:

$$v(x,\lambda) - u(x,\lambda) = -V(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)U(u(x,\lambda)).$$

Ранее в лемме 7 были получены оценки для элементов $\{\eta_{ij}\}_{i,j=1}^2$ матрицы $V(x,\lambda)\Delta^{-1}$.

С учетом этих оценок и лемм 13 и 14 получаем оценки (60) и (61). □

Лемма 16. *Для любой функции $f \in L[0,1]$ и любого $\delta \in (0,1/2)$ имеет место*

$$\lim_{r\to\infty} \|\Omega_r^0 f\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0, \tag{62}$$

где

$$\Omega_r^0 f = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\sum_{i=1}^2 (v_i(x,\lambda) - u_i(x,\lambda))\,d\lambda, \tag{63}$$

а r таково, что $\{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| = r,\ -\pi/2 \leqslant \arg\lambda\sqrt{\alpha^2-1} \leqslant 3\pi/2\} \subset S_{\delta_0}$.

Доказательство. Выполним замену $\mu = \lambda\sqrt{\alpha^2-1}$. Тогда имеем

$$\Omega_r^0 f = \frac{1}{2\pi i\sqrt{\alpha^2-1}} \int\limits_{|\mu|=r|\sqrt{\alpha^2-1}|} \sum_{i=1}^{2}(v_i(x,\lambda)-u_i(x,\lambda))\,d\mu. \tag{64}$$

В показательной форме μ имеет вид $\mu = r|\sqrt{\alpha^2-1}|e^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg\lambda\sqrt{\alpha^2-1}$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2$. Тогда

$$\|\Omega_r^0\|_{C[\delta,1-\delta]} = O\left(\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \mu e^{-\mu\delta}\,d\varphi\right)\|f\|_1 + O\left(\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \mu e^{-\mu\delta}\,d\varphi\right)\|f\|_1.$$

Рассмотрим первое слагаемое. Имеем $O\left(\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\mu\delta}d\varphi\right) = O\left(\frac{1}{\mu}\right)$. Аналогично оценивается $O\left(\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-\mu\delta}\,d\varphi\right) = O\left(\frac{1}{\mu}\right)$. Тогда $O\left(\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} \mu e^{-\mu\delta}\,d\varphi\right) = O(1)$. Следовательно, $\|\Omega_r^0 f\|_{C[\delta;1-\delta]} = \|f\|_{L_1}O(1)$.

Пусть теперь $f(x) = \chi(x)$, тогда $\|\Omega_r^0\chi\|_{C[\delta;1-\delta]} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, откуда следует, что $\lim\limits_{r\to\infty}\|\Omega_r^0\chi\|_{C[\delta;1-\delta]} = 0$. Тогда по теореме Банаха – Штейнгауза вытекает утверждение леммы 16. □

Теорема 4 (теорема равносходимости). *Пусть ядро оператора A непрерывно дифференцируемо один раз по x и один раз по t при $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$, выполняются условия: а) $\frac{\partial}{\partial x}A(x,t)\Big|_{t=x} = 0$; б) $A(x,x) \equiv 1$; в) $\alpha^2 - 1 \neq 0$. Тогда для любой $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\delta \in (0,1/2)$ имеет место соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\max_{\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta}\left|S_r(f,x) - \sigma_{r|\sqrt{\alpha^2-1}|}(\Phi,x)\right| = 0,$$

где $\Phi(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}f(x) - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}f(1-x)$, $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора A для тех характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$, $\sigma_{r|\sqrt{\alpha^2-1}|}(\Phi,x)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $\Phi(x)$ для тех номеров k, для которых $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}2k\pi < r$, r таково, что $\{\lambda \in C \setminus |\lambda| = r,\ 0 \leqslant \arg\lambda \leqslant 2\pi\} \subset S_{\delta_0}$.

Доказательство. Рассмотрим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)u_1(x,\lambda) + \left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}\right)u_2(x,\lambda)\right)d\lambda, \tag{65}$$

где $u_1(x,\lambda)$, $u_2(x,\lambda)$ — компоненты вектора-решения краевой задачи (53), (54).

Добавим и вычтем из (65) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_{0,\lambda}f\,d\lambda$. Тогда (65) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda - R_{0,\lambda})f\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)(v_1(x,\lambda)-u_1(x,\lambda))\,d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}\right)(v_2(x,\lambda)-u_2(x,\lambda))\,d\lambda. \tag{66}$$

Первый интеграл в (66) обозначим $\Omega_r f$. Кроме того, имеем:

$$\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}u_1(x,\lambda)\,d\lambda=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{4\pi i\sqrt{\alpha^2-1}}\int\limits_{|\mu|=r|\sqrt{\alpha^2-1}|}d\mu\int\limits_0^1 G(x,t,\mu)f(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{4\pi i\sqrt{\alpha^2-1}}\int\limits_{|\mu|=r|\sqrt{\alpha^2-1}|}d\mu\int\limits_0^1 G(x,t,\mu)f(1-t)\,dt, \tag{67}$$

где $\mu=\lambda\sqrt{\alpha^2-1}$.

Учитывая, что $-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}d\lambda\int\limits_0^1 G(x,t,\lambda)f(t)\,dt$ является частичной суммой тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ и обозначая $\Phi(x)=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}f(x)-$ $-\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}f(1-x)$, получим:

$$\max_{\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta}\left|S_r(f,x)-\sigma_{r|\sqrt{\alpha^2-1}|}(\Phi,x)\right|=\max_{\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta}|\Omega_r f|+$$

$$+\max_{\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta}\left|\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(v_1(x,\lambda)-u_1(x,\lambda))\,d\lambda+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(v_2(x,\lambda)-u_2(x,\lambda))\,d\lambda\right|. \tag{68}$$

Для первого слагаемого правой части (68) выполняется теорема 3, а для оставшихся слагаемых правой части (68) выполняется лемма 16. Тогда имеет место:

$$\lim_{r\to\infty}\max_{\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta}\left|S_r(f,x)-\sigma_{r|\sqrt{\alpha^2-1}|}(\Phi,x)\right|=0.$$

Теорема доказана. □

Библиографический список

1. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов // Функциональный анализ. СМФН. М. : МАИ, 2004. Т. 10. С. 3–163.
2. *Хромов А. П.* Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа : сб. ст., посвящ. 70-летию П. Л. Ульянова. М. : Изд-во АФЦ, 1999. С. 255–266.
3. *Назарова Е. В.* Теоремы равносходимости для интегральных операторов. Саратов : Изд-во СВИБХБ, 2007. 117 с.
4. *Халова В. А.* Об аналоге теоремы Жордана – Дирихле для разложений по собственным функциям одного класса дифференциально-разностных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 26–32.

5. *Хромов А. П., Лукомский С. Ф., Сидоров С. П., Терехин П. А.* Новые методы аппроксимации в задачах действительного анализа и в спектральной теории. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. 204 с.
6. *Хромов А. П.* Смешанная задача для волнового уравнения с произвольными двухточечными краевыми условиями // Докл. АН. 2015. Т. 462, № 2. С. 148. DOI: 10.7868/S0869565215140054.
7. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50. DOI: 10.4213/sm601.
8. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 526 с.
9. *Назарова Е. В.* Теоремы равносходимости для интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях : дис. ... канд. физ.-матем. наук. Саратов, 2003. 115 с.
10. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 144(156), № 3. С. 358–450.

Образец для цитирования:

Назарова Е. В., Халова В. А. Теорема равносходимости для интегрального оператора с инволюцией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 3. С. 313–330. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-313-330.

Equiconvergence Theorem for Integral Operator with Involution

E. V. Nazarova[1], V. A. Khalova[2]

[1]Ekaterina V. Nazarova, ORCID: 0000-0003-1903-4799, Moscow Bank College of the Central Bank of the Russian Federation, 23, Signalny Pr., Moscow, Russia, 127273, nazarovi@inbox.ru

[2]Victoriya A. Khalova, ORCID: 0000-0003-2148-4932, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, HalovaVA@info.sgu.ru

In the paper, the integral operator with kernel having discontinuities of the first kind at the lines $t = x$ and $t = 1 - x$ is studied. The equiconvergence of Fourier expansions for arbitrary integrable function $f(x)$ in eigenfunctions and associated functions of the considered operator and expansions of linear combination of functions $f(x)$ and $f(1 - x)$ in trigonometric system is proved. The equiconvergence is studied using the method based on integration of the resolvent using spectral value. Methods, developed by A. P. Khromov in the study of spectral theory of integral operators are widely used. Recently, these methods are of use in studies of boundary value problems of mathematical physics using Fourier method with minimal smoothness conditions for the initial data.

Key words: equiconvergence theorem, integral operator, resolvent, eigenfunctions, involution.

References

1. Khromov A. P. Finite-dimensional perturbations of Volterra operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 138, no. 5, pp. 5893–6066. DOI: 10.1007/s10958-006-0346-9.
2. Khromov A. P. An equiconvergence theorem for an integral operator with a variable upper limit of integration. *Metric theory of functions and related problems in analysis*, Moscow, Izd-vo Nauchno-Issled. Aktuarno-Finans. Tsentra (AFTs), 1999, pp. 255–266 (in Russian).
3. Nazarova E. V. *Teoremy ravnoskhodimosti dlia integral'nykh operatorov* [Equiconvergence theorems for integral operators]. Saratov, Publ. house SVIBKhB, 2007. 117 p. (in Russian).

4. Khalova V. A. On analogue of Jordan-Dirichlet theorem about the convergence of the expansions in eigenfunctions of a certain class of differential-difference operators. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 3, pp. 26–32 (in Russian).
5. Khromov A. P., Lukomskii S. F., Sidorov S. P., Terekhin P. A. *Novye metody approksimatsii v zadachakh deistvitel'nogo analiza i v spektral'noi teorii* [New methods of approximation in problems of real analysis and in spectral theory]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2015. 204 p. (in Russian).
6. Khromov A. P. Mixed problem for the wave equation with arbitrary two-point boundary conditions. *Doklady Math.*, 2015, vol. 91, no. 3, pp. 294–296. DOI: 10.1134/S1064562415 030084.
7. Kornev V. V., Khromov A. P. Equiconvergence of expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals. *Sb. Math.*, 2001, vol. 192, no. 10, pp. 1451–1469. DOI: 10.1070/SM2001v192n10ABEH000601.
8. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka, 1969. 526 p. (in Russian).
9. Nazarova E. V. *Equiconvergence theorems for integral operators with kernels that are discontinuous on diagonals* : Dis. Cand. Phys.-Math. of Sci. Saratov, 2003. 115 p. (in Russian).
10. Khromov A. P. Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators. *Math. USSR-Sb.*, 1982, vol. 42, no. 3, pp. 331–355. DOI: 10.1070/SM1982v042n03ABEH 002257.

Cite this article as:
Nazarova E. V., Khalova V. A. Equiconvergence Theorem for Integral Operator with Involution. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 3, pp. 313–330 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-313-330.