УДК 512.55

О ПОЧТИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С ЦЕЛОЙ ЭКСПОНЕНТОЙ

Н. П. Панов

Панов Николай Петрович, аспирант кафедры прикладной математики, Ульяновский государственный университет, 432017, Россия, Ульяновск, Л. Толстого, 42, NPPanov@yandex.ru

Исследуются почти нильпотентные многообразия алгебр над полем нулевой характеристики. Ранее в классе алгебр, удовлетворяющих тождественному соотношению $x(yz) \equiv 0$, и в классе коммутативных метабелевых алгебр были определены дискретные серии многообразий экспоненциального роста с целой экспонентой. Для данных многообразий удалось доказать только существование почти нильпотентных подмногообразий. В настоящей статье с помощью комбинаторных методов и методов теории представлений симметрических групп доказано, что определенные ранее многообразия сами являются почти нильпотентными. По аналогии с коммутативным случаем определено счетное множество почти нильпотентных многообразий с целой экспонентой в классе антикоммутативных метабелевых алгебр. Для каждого многообразия в относительно свободной алгебре исследовано строение полилинейной части как модуля симметрической группы, а именно определен вид диаграмм Юнга, которым отвечают ненулевые неприводимые подмодули. Для всех таких диаграмм Юнга определен общий вид ненулевых мономов, принадлежащих соответствующим пространствам полиоднородных элементов. Подробное описание полученных результатов дано для многообразия алгебр, удовлетворяющих тождеству $x(yz) \equiv 0$. Для многообразий коммутативных и антикоммутативных алгебр заявленные результаты доказываются аналогичным образом, поэтому приводятся без доказательств, с пояснениями.

Ключевые слова: тождество, почти нильпотентное многообразие, рост коразмерностей.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-331-343

ВВЕДЕНИЕ

В данной статье изучаются почти нильпотентные многообразия алгебр над полем нулевой характеристики. Многообразие алгебр называют почти нильпотентным, если оно не является нильпотентным, но любое его собственное подмногообразие нильпотентно. Используемые, но не определяемые далее понятия и обозначения можно найти в монографиях [1, 2]. Обзор почти нильпотентных многообразий в различных классах алгебр выполнен в работе [3].

Описание почти нильпотентных многообразий в различных классах алгебр является не только интересной, но и нетривиальной задачей. В хорошо изученном классе ассоциативных алгебр доказано существование единственного почти нильпотентного многообразия, многообразия всех ассоциативных коммутативных алгебр, [4, Remark 1]. В классе алгебр Ли существует также единственное почти нильпотентное многообразие, многообразие всех метабелевых алгебр Ли [5]. Все почти нильпотентные многообразия подэкспоненциального (полиномиального или промежуточного) роста определены для алгебр Лейбница [6], алгебр с тождеством $x(yz) \equiv 0$ [7], коммутативных метабелевых [8] и антикоммутативных метабелевых алгебр [9]. В каждом из указанных классов таких многообразий ровно два. Примечательно, что все перечисленные почти нильпотентные многообразия имеют малый полиномиальный рост.

В статье [4] приведен пример необычного почти нильпотентного многообразия. Оно необычно тем, что имеет экспоненциальный рост, и экспонента равна двум. На основе определения многообразия из [4] и теоремы о существовании почти нильпотентного подмногообразия в любом ненильпотентном многообразии [4, Theorem 1] для алгебр с тождеством $x(yz) \equiv 0$ получено доказательство существования почти нильпотентного многообразия экспоненты m, $m = 3, 4, \ldots$ [10]. Аналогичным образом установлено существование почти нильпотентного многообразия для любой целой экспоненты в классе коммутативных метабелевых алгебр [11]. В настоящей статье доказано, что многообразия экспоненциального роста, определенные в [10], [11], сами являются почти нильпотентными. По аналогии такие многообразия также определены в классе антикоммутативных метабелевых алгебр.

Основное поле обозначим Φ, и пусть $F(X, \mathbf{V})$ — относительно свободная алгебра многообразия $\mathbf{V}$, порожденная счетным множеством свободных образующих $X = \{x_0, x_1, \ldots\}$. Далее для обозначения свободных образующих будем также использовать другие строчные латинские буквы и буквы без индексов. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ обозначим через $P_n(\mathbf{V}) \subset F(X, \mathbf{V})$ пространство полилинейных элементов степени n от образующих $x_1, \ldots, x_n$. Если последовательность коразмерностей $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n \geqslant 1}$, $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$, растет экспоненциально, и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})} = \alpha,$$

то говорят, что экспонента многообразия $\mathbf{V}$ равна α, $\exp(\mathbf{V}) = \alpha$.

Известно, что $P_n(\mathbf{V})$ как ΦS_n-модуль симметрической группы S_n имеет единственное с точностью до изоморфизма разложение в прямую сумму неприводимых подмодулей, которые соответствуют диаграммам Юнга разбиений $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, числа n, $\lambda \vdash n$. При этом кохарактер $\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V}))$ равен линейной комбинации неприводимых характеров χ_λ с кратностями $m_\lambda(\mathbf{V})$,

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})\chi_\lambda.$$

Так как характеристика поля Φ равна нулю, то в силу эквивалентности полиоднородных и соответствующих полилинейных тождеств в доказательствах утверждений мы неоднократно будем рассматривать не сами полилинейные элементы, которые порождают неприводимые подмодули, а соответствующие им полиоднородные элементы.

Во всех рассматриваемых алгебрах элементы имеют левонормированное строение, поэтому договоримся записывать их без скобок. Например, будем считать эквивалентными записи $abab$ и $((ab)a)b$. При этом правое умножение на образующую, например a, обозначим с помощью оператора R_a, т. е. $a(R_bR_c)^2 = abcbc$. Правое умножение на свободную образующую будем обозначать соответствующей заглавной буквой, например $x_0X^2 = x_0xx$.

1. МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР С ТОЖДЕСТВОМ $x(yz) \equiv 0$

В работе [10] представлено множество неассоциативных алгебр A_m над полем Φ, $m = 2, 3, \ldots$ Алгебра A_m задана $m + 1$ образующими $z, a_1, \ldots, a_m$ и следующими определяющими соотношениями:

$$a_i u = 0, \qquad u \in A_m, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

$$\big(zw(R_{a_1},\ldots,R_{a_m})\big)\big(zw'(R_{a_1},\ldots,R_{a_m})\big)=0, \qquad \deg w, \deg w' \geqslant 0,$$
$$z(R_{a_1}\ldots R_{a_m})^k a_{i_1}\ldots a_{i_s}a_{i_{s+1}}\ldots a_{i_t} + z(R_{a_1}\ldots R_{a_m})^k a_{i_1}\ldots a_{i_{s+1}}a_{i_s}\ldots a_{i_t}=0,$$

где $k \geqslant 0$, $1 \leqslant s < t \leqslant m$, $1 \leqslant i_1,\ldots,i_m \leqslant m$. Из последнего определяющего соотношения следует равенство

$$z(R_{a_1}\ldots R_{a_m})^k w(R_{a_1},\ldots,R_{a_m})=0,$$

в котором $k \geqslant 0$, $2 \leqslant \deg w \leqslant m$, и слово w степени не менее двух хотя бы по одному R_{a_i}, $1 \leqslant i \leqslant m$. Базис алгебры представлен элементами

$$a_1,\ldots,a_m, \qquad z(R_{a_1}\ldots R_{a_m})^k, \qquad z(R_{a_1}\ldots R_{a_m})^k a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_t},$$

где $k \geqslant 0$, $1 \leqslant t < m$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leqslant m$.

Каждая алгебра A_m, $m \geqslant 2$, удовлетворяет тождествам

$$x(yz) \equiv 0, \tag{1}$$
$$x_0X^3 \equiv 0, \tag{2}$$
$$x_0XYX \equiv -x_0YXX - x_0XXY, \tag{3}$$
$$x_0X^2wY^2 \equiv 0, \tag{4}$$
$$x_0X_2X_1wY^2 \equiv -x_0X_1X_2wY^2, \tag{5}$$
$$x_0X^2wY_2Y_1 \equiv -x_0X^2wY_1Y_2, \tag{6}$$
$$x_0X_2X_1wY_2Y_1 \equiv -x_0X_1X_2wY_2Y_1 - x_0X_2X_1wY_1Y_2 - x_0X_1X_2wY_1Y_2, \tag{7}$$

где $w = Z_1\ldots Z_s$, и остаток от деления s на m не равен $m-2$.

Заметим, что любой полилинейный кососимметрический по более чем m образующим многочлен, в котором все члены содержат фиксированную образующую на первой позиции, тождественно равен нулю в алгебре A_m, $m \geqslant 2$. То есть алгебра A_m удовлетворяет полилинейным тождествам вида

$$\sum_{\sigma\in S_{m+1}} (-1)^\sigma x_0X_{\sigma(1)}\ldots X_{\sigma(2)}\ldots X_{\sigma(m+1)} \equiv 0, \tag{8}$$

где $(-1)^\sigma$ равно ±1 в зависимости от четности перестановки σ. Чтобы показать справедливость данных тождеств, достаточно рассмотреть различные подстановки базисных элементов алгебры A_m. Вместо x_0 необходимо подставить элемент из идеала, порожденного z, иначе немедленно получим нулевой результат. Аналогично вместо x_i, $i=1,\ldots,m+1$, необходимо подставить различные $a_j \in A_m$, $j=1,\ldots,m$, но тогда в одном кососимметрическом наборе окажется пара одинаковых a_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, и результат подстановки будет равен нулю. Следовательно, алгебра A_m, $m \geqslant 2$, удовлетворяет тождествам (8).

Далее сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений, с помощью которых получим, что многообразие экспоненциального роста $\mathrm{var}(A_m)$, $\exp(A_m)=m$, $m=2,3,\ldots$ является почти нильпотентным.

Зафиксируем $m \geqslant 2$ и в свободной алгебре $F(X)$ рассмотрим моном $x_0v(X_1,\ldots,X_m)$ с левонормированной расстановкой скобок, в котором

$$\min_{1\leqslant i\leqslant m}\{\deg_{X_i} v\} \neq 0, \qquad \deg v \geqslant m+1.$$

По данному определению в слове v найдутся по меньшей мере две одинаковые буквы X_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, между которыми расположено не более $m-1$ других различных букв. Выберем такую пару букв, что число букв между ними есть $k = s - r - 1$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, где r и s — позиции левой и правой букв соответственно. Моном $x_0 v(X_1, \ldots, X_m)$, в котором $k \geqslant 1$, обозначим $(r,s)_k$ и пусть в мономе (r,s) выбранные буквы находятся на соседних позициях, т. е. $(r,s)_0 = (r,s)$.

Предложение 1. *Для любого $k \leqslant m-1$ по модулю тождеств* (3), (7) *выполняется равенство*

$$(r,s)_k = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} (r+k-j, s-j).$$

Доказательство. Докажем индукцией по k. При $k=1$ в силу (3)

$$(r,s)_1 = -(r+1,s) - (r,s-1).$$

Доказательство предложения для случая $m=2$ завершено, и дальше предполагается $m \geqslant 3$. Пусть равенство справедливо для некоторых k и $k-1$, $1 \leqslant k \leqslant m-2$. Так как в мономе $(r,s)_{k+1}$ между выбранной парой букв X_i расположено не более $m-1$ других различных букв, то он имеет вид $x_0 \ldots X_i Y w Z X_i \ldots$, где $0 \leqslant \deg w \leqslant m-3$. Следовательно, в силу (7)

$$(r,s)_{k+1} = -((r+1,s)_k + (r,s-1)_k + (r+1,s-1)_{k-1}).$$

По предположению индукции

$$(r+1,s)_k = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} (r+k-j+1, s-j),$$

$$(r,s-1)_k = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} (r+k-j, s-j-1),$$

$$(r+1,s-1)_{k-1} = (-1)^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} (r+k-j, s-j-1).$$

Сумму $(r,s-1)_k + (r+1,s-1)_{k-1} = (-1)^k (r, s-k-1)$ подставим в исходное равенство

$$(r,s)_{k+1} = -(r+1,s)_k + (-1)^{k+1}(r,s-k-1) = (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} (r+k+1-j, s-j)$$

и получим требуемое. □

Предложение 2. *Любой не равный нулю по модулю тождеств* (2)–(7) *моном $x_0 v(X_1, \ldots, X_m)$ полистепени $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \vdash n$, $n \geqslant 3m-1$, по образующим $x_1, \ldots, x_m$ с помощью тождеств* (2)–(7) *может быть представлен линейной комбинацией мономов вида*

$$x_0 w' (X_1 \ldots X_{m-1} X_m^2 X_1 \ldots X_{m-1})(X_1 \ldots X_m)^r w'', \tag{9}$$

где $\lambda_m - 1 \leqslant r+2 \leqslant \lambda_m$, и в каждом из ассоциативных мономов w', $0 \leqslant \deg w' < m$, w'', $0 \leqslant \deg w'' < m$, от $X_1, \ldots, X_m$ все буквы разные и упорядочены по возрастанию индексов.

Доказательство. Сначала докажем, что любой моном x_0v из условия может быть представлен линейной комбинацией мономов вида

$$x_0w'(X_1 \dots X_m)^{r_1}(X_1 \dots \widehat{X_s} \dots X_mX_s^2X_1 \dots \widehat{X_s} \dots X_m)(X_1 \dots X_m)^{r_2}w'', \tag{10}$$

где $r_1, r_2 \geqslant 0$, $r_1 + r_2 = r$, и слова w', w'' удовлетворяют указанным ограничениям. В силу предложения 1 рассматриваемый моном по модулю тождеств (2)–(7) равен линейной комбинации ненулевых мономов $x_0v'(X_1, \dots, X_m)$, которые содержат произведение X_s^2, $1 \leqslant s \leqslant m$. Так как $\deg v' \geqslant 3m - 1$ и x_0v' не равен нулю, то в силу тождеств (2)–(6) в мономе x_0v' произведение $X_1 \dots \widehat{X_s} \dots X_m$ всегда примыкает слева или справа к X_s^2. Данные случаи симметричны, поэтому рассмотрим только второй, т. е. мономы вида $x_0 \dots X_s^2X_1 \dots \widehat{X_s} \dots X_m \dots$. При этом возможны два варианта расположения оставшихся букв в слове v': 1) по меньшей мере $m-1$ различных букв находится слева от выделенного произведения, 2) хотя бы m различных букв расположено справа.

В первом случае в мономе $x_0 \dots (X_1 \dots \widehat{X_s} \dots X_mX_s^2X_1 \dots \widehat{X_s} \dots X_m) \dots$ с каждой стороны от указанного произведения число букв необязательно кратно m, поэтому можем выделить подслова w', w'', удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant \deg w', \deg w'' \leqslant m - 1$. Причем каждое из слов w', w'' не содержит двух одинаковых букв, так как иначе в слове w' (или w'') с помощью тождества (5) (или (6)) можем собрать произведение X_i^2, $1 \leqslant i \leqslant m$, и в силу (4) получить, что рассматриваемый моном x_0v' равен нулю. Для определенности будем считать, что буквы в словах w', w'' упорядочены по возрастанию индексов, так как все мономы (10), отличающиеся только порядком букв в соответствующих словах w', w'', с точностью до знака тождественно равны в силу (5), (6). Чтобы получить моном вида (10), остается с помощью тождеств (5), (6) упорядочить указанным образом буквы справа и слева от X_s^2.

Во втором случае с помощью тождества (6) соберем X_t^2, $t \neq s$,

$$x_0 \dots X_s^2X_1 \dots \widehat{X_s} \dots \widehat{X_t} \dots X_mX_t^2X_1 \dots \widehat{X_t} \dots X_m \dots$$

и, рассуждая аналогично, снова получим требуемое.

В мономе (10) при $r_1 > 1$ или при $r_1 = 1$ и $s \neq m$ с помощью тождества (5) соберем X_m^2 на границе первых двух скобок и, упорядочив буквы, придем к записи (9). В случаях $r_1 = 1$ и $s = m$ или $r_1 = 0$ и $s \neq m$ в силу (5), (6) моном (10) можем представить в виде

$$x_0w'(X_1 \dots \widehat{X_k} \dots X_mX_k^2X_mX_1 \dots \widehat{X_k} \dots X_{m-1}) \dots, \qquad k \neq m.$$

Если $m > 2$, то к произведению $X_mX_kX_kX_m$ применим равенство из предложения 1, в котором единственное ненулевое слагаемое в силу тождества (4) будет искомого вида. При $m = 2$ слева или справа от произведения $X_2X_1X_1X_2$ находится X_1 или X_2, поэтому достаточно дважды воспользоваться (3) и в силу (2) получить $x_0w'X_1X_2^2X_1 \dots$ $\square$

Для каждого натурального n определим пространство полилинейных многочленов с левонормированной расстановкой скобок в мономах

$$L_n = \operatorname{span}\{x_0X_{\sigma(1)}X_{\sigma(2)} \dots X_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$$

и для $m \geqslant 2$ ΦS_n-модуль

$$L_n(\mathrm{var}(A_m)) = \frac{L_n}{L_n \cap Id(\mathrm{var}(A_m))}.$$

Соответствующий $L_n(\mathrm{var}(A_m))$ кохарактер $\chi_n^L(\mathrm{var}(A_m))$ имеет разложение в сумму неприводимых характеров χ_λ, $\lambda \vdash n$, с кратностями $m_\lambda^L(\mathrm{var}(A_m))$.

Пространство полиоднородных элементов полистепени $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\lambda \vdash n$, $1 \leqslant k \leqslant n$, по образующим x_i, $i = 1, \dots, k$, обозначим

$$L_{\lambda_1,\dots,\lambda_k} = \mathrm{span}\big\{x_0 w(X_1, \dots, X_k) \mid \deg_{X_i} w = \lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant k\big\}.$$

Предложение 3. *Если для разбиения $\lambda \vdash n$, $n \geqslant 3m-1$, выполнено неравенство $m_\lambda^L(\mathrm{var}(A_m)) \neq 0$, то λ удовлетворяет условиям:*

1) $\lambda_1' = m$;

2) $\lambda_1 - \lambda_m \leqslant 2$;

3) $n - m\lambda_m < 2m - 1$.

Доказательство. Пусть диаграмма Юнга $\lambda \vdash n$, $n \geqslant 3m-1$, имеет $l = \lambda_1' < m$ строк. Тогда в любом мономе $x_0 w(X_1, \dots, X_l) \in L_{\lambda_1,\dots,\lambda_l}$ среди первых m букв слова w найдутся две одинаковые, например X_1, разделенные другими k, $0 \leqslant k \leqslant m-2$, различными буквами. По предложению 1 с помощью тождеств (3), (7) представим $x_0 w$ в виде линейной комбинации мономов, которые среди первых m букв содержат X_1^2. Так как $\deg w \geqslant 3m-1$, то справа от X_1^2 находится $m-1$ букв X_i, $1 \leqslant i \leqslant l < m$, среди которых есть либо X_1, либо пара других одинаковых букв. В первом случае в каждом таком мономе либо имеем произведение X_1^3, либо получим его с помощью тождества (6). Во втором случае с помощью тождества (6) справа от X_1^2 соберем пару одинаковых букв на соседних позициях и получим мономы вида (4). Таким образом, $L_{\lambda_1,\dots,\lambda_l} \subset Id(\mathrm{var}(A_m))$ и $m_\lambda^L(\mathrm{var}(A_m)) = 0$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$.

Пусть λ удовлетворяет неравенству $\lambda_1' > m$, тогда зафиксируем стандартную таблицу Юнга T_λ и рассмотрим полилинейный элемент:

$$f_{T_\lambda} = e_{T_\lambda}(x_0 X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{\sigma \in R_{T_\lambda},\\ \tau \in C_{T_\lambda}}} (-1)^\tau \sigma\tau(x_0 X_1 \dots X_n),$$

который порождает неприводимый подмодуль модуля $L_n(\mathrm{var}(A_m))$. Так как $\lambda_1' > m$, то f_{T_λ} равен сумме $|R_{T_\lambda}|$ многочленов кососимметрических по более чем m образующим. Поэтому в силу тождеств (8) выполняется равенство $f_{T_\lambda} = 0$. Следовательно, $m_\lambda^L(\mathrm{var}(A_m)) = 0$ при $\lambda_1' > m$. Первое условие доказано.

По предложению 2 полиоднородный элемент $g_{T_\lambda}(x_0, x_1, \dots, x_m)$ полистепени $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \vdash n$, $n \geqslant 3m-1$, по образующим $x_1, \dots, x_m$, линеаризация которого порождает ненулевой неприводимый подмодуль модуля $L_n(\mathrm{var}(A_m))$, равен линейной комбинации ненулевых мономов вида (9). В данных мономах каждое слово w', w'' не содержит одинаковых букв и имеет длину не более $m-1$, следовательно, выполняется неравенство $n - m\lambda_m \leqslant 2m-2$. Так как слова w', w'' могут содержать одни и те же буквы, то $\lambda_1 - \lambda_m \leqslant 2$. Таким образом, диаграмма λ вне прямоугольника $m \times \lambda_m$ имеет не более двух столбцов, содержащих не более $2m-2$ клеток. $\square$

В работе [10] доказаны следующие соотношения для коразмерностей $c_n(\mathrm{var}(A_m))$ и $c_n^L(\mathrm{var}(A_m)) = \dim L_n(\mathrm{var}(A_m))$, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 1$.

Предложение 4. *Для всех $n \geqslant 1$ имеем, что*

$$c_{n+1}(\mathrm{var}(A_m)) = (n+1)c_n^L(\mathrm{var}(A_m)).$$

Сформулируем и докажем основной результат.

Теорема 1. *Многообразие $\mathrm{var}(A_m)$, $m = 2, 3, \ldots$ является почти нильпотентным.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{V}$ — собственное подмногообразие многообразия $\mathrm{var}(A_m)$, $m \geqslant 2$. Так как характеристика Φ равна нулю, то для доказательства нильпотентности многообразия $\mathbf{V}$ в силу предложений 3, 4 достаточно доказать, что $L_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m} \subset Id(\mathbf{V})$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \vdash n$, для всех n, больших некоторого n_0.

Многообразие $\mathbf{V}$ — собственное, поэтому удовлетворяет полилинейному тождеству $f(x_1, \ldots, x_N) \equiv 0$, которое не выполняется в $\mathrm{var}(A_m)$. Тождество имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} x_i u_i(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_N) \equiv 0,$$

где u_i — некоторый ассоциативный многочлен.

Можем считать, что $N \geqslant 3m - 1$, так как в противном случае домножим f справа на образующие $x_{N+1}, \ldots, x_{N+k}$, $N + k = 3m - 1$, и получим следствие $fX_{N+1} \ldots X_{N+k} \equiv 0$. Покажем, что последнее тождество не выполняется в многообразии $\mathrm{var}(A_m)$. Так как $f \notin Id(\mathrm{var}(A_m))$, то в результате ненулевой подстановки элементов алгебры A_m в f получим линейную комбинацию базисных элементов A_m. По определению алгебры A_m полученную линейную комбинацию можем сколько угодно раз умножать справа на образующие $a_i \in A_m$, $1 \leqslant i \leqslant m$, так, чтобы всякий раз получать ненулевой результат. Следовательно, существует ненулевая подстановка элементов алгебры A_m в многочлен $fX_{N+1} \ldots X_{N+k}$, и мы доказали требуемое.

Пусть $\phi(f)$ — ненулевая подстановка элементов алгебры A_m, тогда по определению A_m в многочлен $x_j u_j(X_1, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_N) \notin Id(\mathrm{var}(A_m))$ вместо образующей x_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, подставлен элемент из идеала, порожденного z, например $\phi(x_j) = z(R_{a_1} \ldots R_{a_m})^k$. Из определяющих соотношений алгебры A_m имеем неравенство $\phi(f) \neq 0$, как при $k = 0$, так при $k > 0$, поэтому примем $k > 0$. Зафиксируем j и в исходное тождество вместо x_j подставим $x_0 x_j$. В силу (1) для $N \geqslant 3m - 1$ получим тождество вида

$$g(x_0, x_1, \ldots, x_N) = \sum_v x_0 v(X_1, \ldots, X_N) \equiv 0,$$

где v пробегает мономы, которые получены из мономов многочлена u_j. Последнее тождество также не выполняется в многообразии $\mathrm{var}(A_m)$, так как для подстановки $\psi(g)$,

$$\psi(x_0) = z(R_{a_1} \ldots R_{a_m})^{k-1} a_1 \ldots a_{m-1}, \qquad \psi(x_j) = a_m,$$
$$\psi(x_i) = \phi(x_i), \qquad 1 \leqslant i \leqslant N, \qquad i \neq j,$$

имеем $\psi(g) = \phi(f) \neq 0$. Для различных подстановок

$$\phi(x_j) = z(R_{a_1} \ldots R_{a_m})^k a_{i_1} \ldots a_{i_t}, \qquad k > 0, \qquad 1 \leqslant t < m, \qquad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_t \leqslant m,$$

рассуждения аналогичны.

По предложению 3 при $N \geqslant 3m-1$ все ненулевые подмодули модуля $L_N(\mathrm{var}(A_m))$ соответствуют диаграммам Юнга из m строк. Следовательно, для некоторой диаграммы $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m) \vdash N$ существует полиоднородное полистепени $\mu_1, \ldots, \mu_m$ по $x_1, \ldots, x_m$ следствие из g вида

$$h(x_0, x_1, \ldots, x_m) = \sum_w x_0 w(X_1, \ldots, X_m) \equiv 0.$$

С помощью предложения 2 представим каждый ненулевой моном $x_0 w$ в записи h линейной комбинацией мономов вида (9). К полученной линейной комбинации применим индукцию по числу ненулевых слагаемых.

Пусть сначала отличный от нуля моном один. По модулю тождеств многообразия $\mathrm{var}(A_m)$ любой ненулевой моном из пространства $L_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m}$, $\lambda \vdash n$, $n \geqslant 3m-1$, равен линейной комбинации мономов (9), которые в силу предложений 2, 3 при $n \geqslant m(\mu_m + 3)$ получаются из h в результате последовательной подстановки произведения $x_0 x_i$ вместо x_0 или умножения справа на x_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Следовательно, $L_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m} \subset Id(\mathbf{V})$ для всех $n \geqslant m(\mu_m + 3)$.

Пусть теперь в рассматриваемой линейной комбинации найдутся по меньшей мере два различных ненулевых монома, которые, понятно, имеют разные подслова w_1', w_2' или w_1'', w_2''. То есть для некоторого t, $1 \leqslant t \leqslant m$, $\deg_{X_t} w_1' = 1$, $\deg_{X_t} w_2' = 0$, или $\deg_{X_t} w_1'' = 1$, $\deg_{X_t} w_2'' = 0$. Тогда вместо x_0 подставим $x_0 x_t$ или соответственно домножим справа на x_t и получим, например в слове w_2'', две одинаковые буквы и в силу тождества (4) полиоднородное следствие полистепени $(\mu_1, \ldots, \mu_t + 1, \ldots, \mu_m)$, в котором по меньшей мере один моном равен нулю. Так как каждое слово w', w'' имеет единственное дополнение до $X_1 \ldots X_m$, то в полученном следствии останется хотя бы один моном, не принадлежащий $Id(\mathrm{var}(A_m))$.

Следовательно, многообразие $\mathrm{var}(A_m)$, $m \geqslant 2$, является почти нильпотентным. $\square$

2. МНОГООБРАЗИЯ КОММУТАТИВНЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР

На основе дискретной серии алгебр A_m в работе [11] определено множество коммутативных метабелевых алгебр B_m, $m = 2, 3, \ldots$ Определения алгебр A_m и B_m во многом похожи, а многообразие $\mathrm{var}(B_m)$, так же как и многообразие $\mathrm{var}(A_m)$, имеет экспоненциальный рост,

$$\exp(B_m) = \exp(A_m) = m.$$

Алгебра B_m, $m \geqslant 2$, задана $m+1$ образующими $z, b_1, \ldots, b_m$ и следующими определяющими соотношениями:

$$\begin{gathered}
uv - vu = 0, \qquad u, v \in B_m, \\
b_i b_j = z b_i = 0, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant m, \\
z^2 w(R_{b_1}, \ldots, R_{b_m}) z = 0, \qquad \deg w \geqslant 0, \\
\big(z^2 w(R_{b_1}, \ldots, R_{b_m})\big)\big(z^2 w'(R_{b_1}, \ldots, R_{b_m})\big) = 0, \qquad \deg w, \deg w' \geqslant 0, \\
z^2 (R_{b_1} \ldots R_{b_m})^k b_{i_1} \ldots b_{i_s} b_{i_{s+1}} \ldots b_{i_t} + z^2 (R_{b_1} \ldots R_{b_m})^k b_{i_1} \ldots b_{i_{s+1}} b_{i_s} \ldots b_{i_t} = 0,
\end{gathered}$$

где $k \geqslant 0$, $1 \leqslant s < t \leqslant m$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_m \leqslant m$. Базис алгебры B_m представлен элементами

$$z, b_1, \ldots, b_m, \qquad z^2 (R_{b_1} \ldots R_{b_m})^k, \qquad z^2 (R_{b_1} \ldots R_{b_m})^k b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_t},$$

где $k \geqslant 0$, $1 \leqslant t < m$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_t \leqslant m$. Все элементы B_m, $m \geqslant 2$, имеют левонормированное строение в силу тождеств коммутативности

$$xy - yx \equiv 0 \tag{11}$$

и метабелевости

$$(xy)(zt) \equiv 0. \tag{12}$$

Для каждого $m \geqslant 2$ алгебра B_m удовлетворяет тождествам

$$x_0 y_0 X^3 \equiv 0, \tag{13}$$

$$x_0 y_0 XYX \equiv -x_0 y_0 YXX - x_0 y_0 XXY, \tag{14}$$

$$x_0 y_0 X^2 w Y^2 \equiv 0, \tag{15}$$

$$x_0 y_0 X_2 X_1 w Y^2 \equiv -x_0 y_0 X_1 X_2 w Y^2, \tag{16}$$

$$x_0 y_0 X^2 w Y_2 Y_1 \equiv -x_0 y_0 X^2 w Y_1 Y_2, \tag{17}$$

$$x_0 y_0 X_2 X_1 w Y_2 Y_1 \equiv -x_0 y_0 X_1 X_2 w Y_2 Y_1 - x_0 y_0 X_2 X_1 w Y_1 Y_2 - x_0 y_0 X_1 X_2 w Y_1 Y_2, \tag{18}$$

где $w = Z_1 \dots Z_s$ и остаток от деления s на m не равен $m - 2$. Различные полилинейные тождества вида

$$\sum_{\sigma \in S_{m+1}} (-1)^\sigma x_0 y_0 X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(2)} \dots X_{\sigma(m+1)} \equiv 0 \tag{19}$$

также выполняются в алгебре B_m, $m \geqslant 2$. Доказательство данных утверждений практически полностью повторяет доказательство справедливости тождеств (2)–(8) для алгебры A_m.

Так как главную роль в доказательстве ранее представленных результатов играют тождества (2)–(8), то доказательства схожих утверждений для многообразий $\mathrm{var}(B_m)$, $m = 2, 3, \dots$, будут аналогичными. Поэтому далее основные утверждения будут сформулированы без доказательств, с пояснениями.

Предложение 5. *Любой не равный нулю по модулю тождеств* (13)–(18) *моном $x_0 y_0 v(X_1, \dots, X_m)$ полистепени $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \vdash n$, $n \geqslant 3m - 1$, по образующим $x_1, \dots, x_m$ с помощью тождеств* (13)–(18) *может быть представлен линейной комбинацией мономов вида*

$$x_0 y_0 w'(X_1 \dots X_{m-1} X_m^2 X_1 \dots X_{m-1})(X_1 \dots X_m)^r w'',$$

где $\lambda_m - 1 \leqslant r + 2 \leqslant \lambda_m$ и в каждом из ассоциативных мономов w', $0 \leqslant \deg w' < m$, w'', $0 \leqslant \deg w'' < m$, от X_1, ..., X_m все буквы разные и упорядочены по возрастанию индексов.

Легко видеть, что предложение 1 выполняется для мономов вида $x_0 y_0 v(X_1, \dots, X_m)$ и тождеств (18), (14), поэтому предложение 5 доказывается по аналогии с предложением 2. Достаточно тождества (2)–(7) в доказательстве предложения 2 заменить на соответствующие им (13)–(18).

По аналогии с L_n и $L_n(\mathrm{var}(A_m))$, $m \geqslant 2$, определим пространство полилинейных многочленов

$$M_n = \mathrm{span}\{x_0 y_0 X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} \dots X_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$$

и ΦS_n-модуль

$$M_n(\mathrm{var}(B_m)) = \frac{M_n}{M_n \cap Id(\mathrm{var}(B_m))}.$$

Нетрудно видеть, что все ненулевые кратности $m_\lambda^M(\mathrm{var}(B_m))$ соответствуют диаграммам Юнга, удовлетворяющим условиям предложения 3. Доказательство данного утверждения практически дословно повторяет доказательство предложения 3.

В работе [11] для коразмерностей $c_n^M(\mathrm{var}(B_m)) = \dim M_n(\mathrm{var}(B_m))$ и $c_n(\mathrm{var}(B_m))$ при $m \geqslant 2$, $n \geqslant 1$ определено соотношение

$$c_{n+2}(\mathrm{var}(B_m)) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} c_n^M(\mathrm{var}(B_m)).$$

Имея все предложения, аналогичные используемым в доказательстве теоремы 1, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Многообразие* $\mathrm{var}(B_m)$, $m = 2, 3, \dots$ *является почти нильпотентным.*

3. МНОГООБРАЗИЯ АНТИКОММУТАТИВНЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР

Остается рассмотреть случай антикоммутативных метабелевых алгебр C_m, $m = 2, 3, \dots$. Так как в алгебре C_m квадрат любого элемента равен нулю, то в отличие от предыдущего случая определим алгебру $m+2$ образующими $z_1, z_2, c_1, \dots, c_m$ и следующими определяющими соотношениями:

$$\begin{gathered}
uv + vu = 0, \qquad u, v \in C_m,\\
c_i c_j = z_1 c_i = z_2 c_i = 0, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant m,\\
z_1 z_2 w(R_{c_1}, \dots, R_{c_m}) z_i = 0, \qquad i = 1, 2, \qquad \deg w \geqslant 0,\\
\big(z_1 z_2 w(R_{c_1}, \dots, R_{c_m})\big)\big(z_1 z_2 w'(R_{c_1}, \dots, R_{c_m})\big) = 0, \qquad \deg w, \deg w' \geqslant 0,\\
z_1 z_2 (R_{c_1} \dots R_{c_m})^k c_{i_1} \dots c_{i_s} c_{i_{s+1}} \dots c_{i_t} + z_1 z_2 (R_{c_1} \dots R_{c_m})^k c_{i_1} \dots c_{i_{s+1}} c_{i_s} \dots c_{i_t} = 0,
\end{gathered}$$

где $k \geqslant 0$, $1 \leqslant s < t \leqslant m$, $1 \leqslant i_1, \dots, i_m \leqslant m$. Алгебра C_m имеет базис

$$z_1, z_2, \qquad c_1, \dots, c_m, \qquad z_1 z_2 (R_{c_1} \dots R_{c_m})^k, \qquad z_1 z_2 (R_{c_1} \dots R_{c_m})^k c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_t},$$

где $k \geqslant 0$, $1 \leqslant t < m$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_t \leqslant m$.

Несложно показать, что в алгебре C_m, заданной по аналогии с алгеброй B_m, $m \geqslant 2$, помимо тождеств метабелевости (12) и антикоммутативности

$$xy + yx \equiv 0 \tag{20}$$

выполняются все тождества (13)–(19).

Пусть $\mathrm{var}(C_m)$ — многообразие, порожденное алгеброй C_m, $m = 2, 3, \dots$ тогда все утверждения для многообразий $\mathrm{var}(B_m)$ переносятся с незначительными изменениями на рассматриваемый случай. Так, предложение 5 применяется в первоначальном виде. Три условия для диаграмм Юнга, соответствующих, возможно, ненулевым неприводимым подмодулям модуля $M_n(\mathrm{var}(C_m))$, из предложения 3 также остаются неизменными. По аналогии получим следующие соотношения для коразмерностей $c_n(\mathrm{var}(C_m))$ и $c_n^M(\mathrm{var}(C_m))$, $n \geqslant 1$, $m \geqslant 2$,

$$c_{n+2}(\mathrm{var}(C_m)) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} c_n^M(\mathrm{var}(C_m)).$$

Также доказательство равенств $\exp(C_m) = m$, $m = 2, 3, \ldots$ практически полностью повторяет доказательство аналогичных равенств для многообразий коммутативных алгебр, [11].

Таким образом, используя рассуждения для предыдущих случаев, получим следующую теорему.

Теорема 3. *Многообразие* $\mathrm{var}(C_m)$, $m = 2, 3, \ldots$ *является почти нильпотентным.*

Благодарности. Автор благодарит профессора С. П. Мищенко за поддержку и внимание к работе.

Библиографический список

1. *Giambruno A., Zaicev M.* Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Providence, RI : AMS, 2005. 352 p. DOI: 10.1090/surv/122.
2. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М. : Наука, 1985. 448 с.
3. *Шулежко О. В.* О почти нильпотентных многообразиях в различных классах линейных алгебр // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 67–88.
4. *Mishchenko S., Valenti A.* An almost nilpotent variety of exponent 2 // Israel Journal of Mathematics. 2014. Vol. 199, iss. 1. P. 241–257. DOI: 10.1007/s11856-013-0029-4.
5. *Мищенко С. П.* Многообразия линейных алгебр кодлины один // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2010. № 1. С. 25–30.
6. *Фролова Ю. Ю., Шулежко О. В.* Почти нильпотентные многообразия алгебр Лейбница // Прикладная дискретная математика. 2015. Вып. 2(28). С. 30–36.
7. *Mishchenko S., Valenti A.* On almost nilpotent varieties of subexponential growth // Journal of Algebra. 2015. Vol. 423, iss. 1. P. 902–915. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2014.10.038.
8. *Чанг Н. Т. К., Фролова Ю. Ю.* Почти нильпотентные коммутативные метабелевы многообразия, рост которых не выше экспоненциального // Мальцевские чтения : тез. докл. международ. конф. Новосибирск, 2014. С. 119. URL: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/14/Malmeet2014.pdf (дата обращения 20.07.2016).
9. *Мищенко С. П., Шулежко О. В.* Описание почти нильпотентных антикоммутативных метабелевых многообразий с подэкспоненциальным ростом // Мальцевские чтения : тез. докл. международ. конф. Новосибирск, 2014. С. 110. URL: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/14/Malmeet2014.pdf (дата обращения 20.07.2016).
10. *Мищенко С. П., Шулежко О. В.* Почти нильпотентные многообразия любой целой экспоненты // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2015. № 2. С. 53–57.
11. *Мищенко С. П., Шулежко О. В.* О почти нильпотентных многообразиях в классе коммутативных метабелевых алгебр // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. 2015. Вып. 3(125). С. 21–28.

Образец для цитирования:

Панов Н. П. О почти нильпотентных многообразиях с целой экспонентой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 3. С. 331–343. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-331-343.

On Almost Nilpotent Varieties with Integer PI-Exponent

N. P. Panov

Nikolay P. Panov, ORCID: 0000-0002-5256-0427, Ulyanovsk State University, 42, Leo Tolstoy str., Ulyanovsk, Russia, 432017, NPPanov@yandex.ru

We study almost nilpotent varieties of algebras over a field of zero characteristic. Earlier in the class of algebras with identical relation $x(yz) \equiv 0$ and in the class of all commutative metabelian algebras countable sets of varieties with integer PI-exponent were defined. Only the existence of almost nilpotent subvariety in each defined variety was proved. In the paper by means of combinatorial methods and methods of the representation theory of symmetric groups we prove that earlier defined varieties are almost nilpotent. By analogy with commutative case we define a countable set of almost nilpotent varieties with integer PI-exponent in the class of anticommutative metabelian algebras. For each variety in the corresponding relatively free algebra we study multilinear part as a module of the symmetric group. More precisely we define restrictions on the shape of Young diagrams that correspond to nonzero irreducible submodules. For such diagrams we also obtain the form of nonzero monomials from the corresponding spaces of multihomogeneous elements. We give the detailed description of the results obtained for the algebras satisfying the identity $x(yz) \equiv 0$. Since similar results for commutative and anticommutative metabelian algebras were obtained by analogy we present them without proofs but with remarks.

Key words: polynomial identity, almost nilpotent variety, codimension growth.

Acknowledgements: The author thanks Professor Sergei P. Mishchenko for his support and attention to the work.

References

1. Giambruno A., Zaicev M. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*. Providence, RI, AMS, 2005. 352 p. DOI: 10.1090/surv/122.
2. Bakhturin Yu. A. *Tozhdestva v algebrakh Li* [Identities of Lie Algebras]. Moscow, Nauka, 1985. 448 p. (in Russian).
3. Shulezhko O. V. On almost nilpotent varieties in different classes of linear algebras. *Chebyshevskiy Sbornik*, 2015, vol. 16, iss. 1, pp. 67—88 (in Russian).
4. Mishchenko S., Valenti A. An almost nilpotent variety of exponent 2. *Israel Journal of Mathematics*, 2014, vol. 199, iss. 1, pp. 241–257. DOI: 10.1007/s11856-013-0029-4.
5. Mishchenko S. P. Varieties of linear algebras with colength one. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2010, vol. 65, iss. 1, pp. 23–27. DOI: 10.3103/S0027132210010043.
6. Frolova Yu. Yu., Shulezhko O. V. Almost nilpotent varieties of Leibniz algebras. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, 2015, iss. 2(28), pp. 30–36 (in Russian). DOI: 10.17223/20710410/28/3.
7. Mishchenko S., Valenti A. On almost nilpotent varieties of subexponential growth. *Journal of Algebra*, 2015, vol. 423, iss. 1, pp. 902–915. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2014.10.038.
8. Chang N. T. K., Frolova Yu. Yu. Almost nilpotent commutative metabelian varieties with not greater than exponential growth rate. *Mal'tsevskie Chteniya : tez. dokl. mezhdunarod. konf.* [Mal'tsev Meeting : collection of abstracts of international conference]. Novosibirsk, 2014, pp. 119 (in Russian). Available at: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/14/Malmeet2014.pdf (accessed 20, July, 2016).

9. Mishchenko S. P., Shulezhko O. V. Description of almost nilpotent anticommutative metabelian varieties of subexponential growth. *Mal'tsevskie Chteniya : tez. dokl. mezhdunarod. konf.* [Mal'tsev Meeting : collection of abstracts of international conference]. Novosibirsk, 2014, pp. 110 (in Russian). Available at: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/14/Malmeet2014.pdf (accessed 20, July, 2016).
10. Mishchenko S. P., Shulezhko O. V. Almost nilpotent varieties of arbitrary integer exponent. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2015, vol. 70, iss. 2, pp. 92–95. DOI: 10.3103/S0027132215020084.
11. Mishchenko S. P., Shulezhko O. V. On almost nilpotent varieties in the class of commutative metabelian algebras. *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2015, iss. 3(125), pp. 21–28 (in Russian).

Cite this article as:

Panov N. P. On Almost Nilpotent Varieties with Integer PI-Exponent. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 3, pp. 331–343 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-331-343.