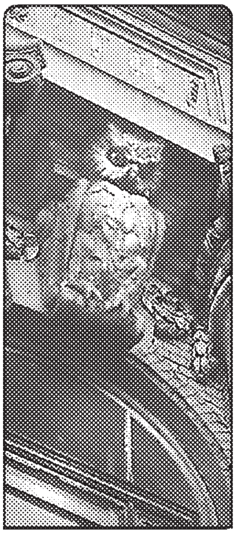

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

АППРОКСИМАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

И. В. Гребенникова, А. Г. Кремлёв

Гребенникова Ирина Владимировна, старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, Екатеринбург, Мира, 19, giv001@mail.ru

Кремлёв Александр Гурьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования управляемых систем, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, Екатеринбург, Мира, 19, kremlev001@mail.ru

Целью работы является разработка и теоретическое обоснование аналитических приближенных или асимптотических методов решения задач оптимального управления для сингулярно возмущенных систем с постоянным запаздыванием по фазовым переменным в условиях неопределенности по начальным данным. Для достижения поставленной цели в работе рассмотрена задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием по быстрым и медленным переменным при неопределенных начальных условиях и интегральных квадратичных ограничениях на ресурсы управления. Сформулирована и решена предельная задача управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием, для которой специальным образом выбирается функционал качества. В основе предложенного метода лежат идеи выделения асимптотики ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы с запаздыванием и представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных переменных, в виде равномерно сходящейся последовательности. Предложена процедура построения начального приближения управляющего воздействия в минимаксной задаче управления. В работе используются постановки задач, понятия, методы и результаты теории управления в условиях неопределенности, а также методы теории экстремальных задач, асимптотические методы анализа, классические методы выпуклого и вещественного анализа.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием, оптимальное управление, фундаментальная матрица.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-368-380

ВВЕДЕНИЕ

Проблемам оптимального управления сингулярно возмущенными системами в последние годы посвящено много работ, в которых предлагаются различные приближенные аналитические методы построения субоптимальных режимов управления (см., например, [1–7]). В основном рассматривались задачи с функционалами качества либо зависящими лишь от медленных переменных, либо квадратичными по своей структуре. Применение этих методов построения управления позволили получить некоторые приближения оптимальных решений, выделить ряд специфических свойств сингулярно возмущенных задач управления (асимптотика траекторий, явление скачка в функционале качества, если последний зависит как от медленных, так и от быстрых переменных).

В данной работе рассматриваются динамические объекты, математическими моделями которых являются сингулярно возмущенные системы с постоянным запаздыванием по фазовым переменным. Рассматривается задача управления по минимаксному критерию в постановке [8, 9] для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием по фазовым переменным при неопределенных начальных условиях и интегральных квадратичных ограничениях на управляющие воздействия. Формулируется и решается предельная задача управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием, минимаксная по форме, для которой специальным образом выбирается функционал качества. В основе предлагаемого метода лежат идеи выделения асимптотики ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы с запаздыванием и представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных переменных, в виде равномерно сходящейся последовательности [10]. При реализации метода используются результаты исследований из [8–12], а также аппарат выпуклого анализа [13]. Приводится начальное приближение оптимального решения (относительного малого параметра), при этом не требуется чрезмерных условий гладкости (дифференцируемость не выше первого порядка), ограничений на класс допустимых управлений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром $\mu > 0$) с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$
\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_{11}(t)x(t-h) + \mu G_{12}(t)y(t-h) + B_1(t,\mu)u(t),\\
\mu\frac{dy(t)}{dt} &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_{21}(t)x(t-h) + \mu G_{22}(t)y(t-h) + B_2(t,\mu)u(t),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, A_{ij}, B_i, G_{ij}, $i, j = 1, 2,$ — матрицы соответствующих размеров с непрерывными элементами. Начальное состояние системы $x(t) = \psi_x(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t) = \psi_y(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $y(t_0) = y_0$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0, Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi_x(t) \in \Psi_x(t)$, $\psi_y(t) \in \Psi_y(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $\Psi_x(t)$, $\Psi_y(t)$ — заданные многозначные отображения со значениями в виде выпуклых компактов (в R^n, R^m), непрерывные по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$, — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию

$u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае

$$P = \left\{ u(\cdot) \Big| \int\limits_{t_0}^{t_1} u'(t)R(t)u(t)\,dt \leqslant \lambda^2 \right\}, \qquad \lambda = \mathrm{const} > 0,$$

$R(t)$ — симметричная, положительно определенная матрица с непрерывными элементами; штрих — знак транспонирования.

Будем предполагать выполненным следующее предположение.

Предположение 1. *Корни $\lambda_s(t)$ характеристического уравнения*

$$\left| A_{22}(t) - \mu\lambda E_m + \mu G_{22}(t)e^{-\lambda h} \right| = 0,$$

где E_m — единичная $m \times m$ матрица, удовлетворяют неравенству: $\mathrm{Re}\,\lambda_s(t) < < -2c < 0$, *при* $t \in T$, $c = \mathrm{const} > 0$.

Тогда по критерию асимптотической устойчивости для линейных систем с запаздыванием [14, с. 162] при достаточно малых μ ($0 < \mu \leqslant \mu_0$) фундаментальная матрица решений $Y[t,\tau]$ системы $\mu dy/dt = A_{22}(t)y(t) + \mu G_{22}(t)y(t-h)$, $Y[t,\tau] = 0$, при $\tau > t$, $Y[\tau,\tau] = E_m$, при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1$ имеет оценку

$$\|Y[t,\tau]\| \leqslant c_0 \exp\{-c(t-\tau)/\mu\}, \tag{2}$$

$c_0 > 0$ — некоторая постоянная, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Введем следующие обозначения: $z' = (x', y')$, $Z_0 = X_0 \times Y_0$, $\psi' = (\psi'_x, \psi'_y)$, $\Psi = \Psi_x \times \Psi_y$, $Z(t, u(\cdot), Z_0, \psi(\cdot))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ — множество (ансамбль) траекторий $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ системы (1), исходящих из Z_0, при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Определим функционал $J(\cdot)$:

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot):\ R^{n+m} \to R$ — заданная выпуклая функция (с конечными значениями).

Задача 1. *Среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу $J(u(\cdot))$ на множестве P:*

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot)).$$

Запишем систему (1) в виде

$$dz(t)/dt = A(t,\mu)z(t) + G(t,\mu)z(t-h) + B(t,\mu)u(t), \tag{3}$$

где матрицы $A(t,\mu)$, $B(t,\mu)$, $G(t,\mu)$ имеют следующий блочный вид:

$$A(t,\mu) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t)/\mu & A_{22}(t)/\mu \end{pmatrix}, \qquad G(t,\mu) = \begin{pmatrix} G_{11}(t) & \mu G_{12}(t) \\ G_{21}(t)/\mu & G_{22}(t) \end{pmatrix},$$

$$B(t,\mu) = \begin{pmatrix} B_1(t,\mu) \\ B_2(t,\mu)/\mu \end{pmatrix}.$$

Пусть $Z[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений системы (1) (при $u \equiv 0$), причем $Z[\tau,\tau] = E_{n+m}$, $Z[t,\tau] = 0$ при $\tau > t$. Матрицу $Z[t,\tau]$ представим в следующем блочном виде:

$$Z[t,\tau] = \begin{pmatrix} Z_{11}[t,\tau] & Z_{12}[t,\tau] \\ Z_{21}[t,\tau] & Z_{22}[t,\tau] \end{pmatrix},$$

здесь $Z_{11}[t,\tau]$, $Z_{12}[t,\tau]$, $Z_{21}[t,\tau]$, $Z_{22}[t,\tau]$ — матрицы с размерами соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$.

Решение задачи 1 при каждом фиксированном значении параметра $\mu > 0$ описывается следующими соотношениями (используя [9, с. 73], но для системы с запаздыванием):

$$\begin{gathered} \varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot)\in P} \max_{l\in R^{n+m}} \max_{z_0\in Z_0} \max_{\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)} \{l' z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)) - \varphi^*(l)\} = \\ = \max\{\chi^0(l,\mu) \mid l \in R^{n+m}\} = \chi^0(l^0,\mu), \\ \chi^0(l,\mu) = -h^{**}(l) - \rho(-r(\cdot; t_1, l, \mu)| \text{ P}), \end{gathered} \tag{4}$$

$$h(l) = \varphi^*(l) - \rho(l' Z[t_1,t_0] \mid Z_0) - \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(l' Z[t,\tau] G(\tau) \mid \Psi(\tau - h)) d\tau,$$

$$r(\tau; t, l, \mu) = (p' Z_{11}[t,\tau] + q' Z_{21}[t,\tau]) B_1(\tau,\mu) + (1/\mu)(p' Z_{12}[t,\tau] + q' Z_{22}[t,\tau]) B_2(\tau,\mu),$$

где $l' = (p', q')$, $p \in R^n$, $q \in R^m$, $\varphi^*(l)$ — функция, сопряженная [13, с. 120] к $\varphi(z)$, $h^{**}(l) = \overline{(co\, h)}(l)$ — замыкание выпуклой оболочки [13, с. 120] функции $h(l)$; $\rho(s|X)$ — опорная функция множества X на элементе s.

Оптимальное управление $u^0(\cdot,\mu)$ удовлетворяет условию минимума:

$$\min_{u(\cdot)\in P} \int_{t_0}^{t_1} r(\tau; t_1, l^0, \mu) u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1} r(\tau; t_1, l^0, \mu) u^0(\tau,\mu) d\tau.$$

Полученные $u^0(\cdot,\mu)$, l^0, $\varepsilon^0(t_1)$ зависят от параметра μ. Однако эти величины при $\mu \to +0$ могут не сходиться к соответствующим решениям задачи 1 для вырожденной системы (полученной из исходной при $\mu = 0$).

Наряду с задачей 1 рассмотрим *вырожденную* задачу.

Задача 2. *Среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u_0 = u_0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу $J_0(u(\cdot))$:*

$$\begin{gathered} \varepsilon_0(t_1) = J_0(u_0) = \min_{u(\cdot)\in P} J_0(u(\cdot)), \\ J_0(u(\cdot)) = \max_{x_0\in X_0} \max_{\psi_x(\cdot)\in\Psi_x(\cdot)} \varphi(z_0(t_1; u(\cdot), x_0, \psi_x(\cdot))), \end{gathered}$$

где $z_0(t; u(\cdot), x_0, \psi_x(\cdot))$ — решение вырожденной системы, полученной из (1) *при $\mu = 0$:*

$$dx(t)/dt = A_0(t)x(t) + G_0(t)x(t-h) + \hat{B}_0(t)u(t), \tag{5}$$

$$y(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x(t) - A_{22}^{-1}(t)G_{21}(t)x(t-h) - A_{22}^{-1}(t)B_2(t,0)u(t), \tag{6}$$

где $t \in T$, $A_0(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)$, $G_0(t) = G_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)G_{21}(t)$, $\hat{B}_0(t) = B_1(t,0) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t,0)$, предполагается существование $A_{22}^{-1}(t)$.

Прежде всего проведем исследование для системы (3) при $B_1(t,\mu) = B_1(t)$, $B_2(t,\mu) = \sqrt{\mu}B_2(t)$. Другие варианты обсудим уже на основе полученных результатов. При указанных условиях вырожденная система имеет вид: при $t \in T$, $x(t) = \psi_x(t) \in \Psi_x(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $x(t_0) \in X_0$

$$\begin{aligned} &dx(t)/dt = A_0(t)x(t) + G_0(t)x(t-h) + B_1(t)u(t), \\ &y(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x(t) - A_{22}^{-1}(t)G_{21}(t)x(t-h). \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть $X[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений системы (7) (при $u \equiv 0$), причем $X[\tau,\tau] = E_n$, $X[t,\tau] = 0$ при $\tau > t$.

Пользуясь методами из работы [9, с. 73], для системы с запаздыванием получим следующие соотношения при каждом фиксированном значении параметра $\mu > 0$:

$$\varepsilon_0(t_1) = \max\{\chi_0(p,q) |\ p \in R^n,\ q \in R^m\} = \chi_0(p_0,q_0), \tag{8}$$

$$\chi_0(p,q) = -h_0^{**}(p,q) - \lambda \left[\int\limits_{t_0}^{t_1} w'(\tau,p,q)B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau,p,q)d\tau\right]^{1/2},$$

где $h_0(p,q) = \varphi^*(p,q) - \rho(w'(t_0,p,q)|\ X_0) - \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho(w'(\tau,p,q)G_0(\tau)|\ \Psi_x(\tau-h))d\tau$, $w'(\tau,p,q) = s'(t_1,p,q)X[t_1,\tau] - q'A_{22}^{-1}(t_1)G_{21}(t_1)X[t_1-h,\tau]$, при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0+h$; $s'(t_1,p,q) = p' - q'A_{22}^{-1}(t_1)A_{21}(t_1)$.

Оптимальное управление $u_0(\cdot)$ при $\tau \in T$ имеет вид

$$u_0(\tau) = -\lambda R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau,p_0,q_0)\left[\int\limits_{t_0}^{t_1} w'(\tau,p_0,q_0)B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau,p_0,q_0)d\tau\right]^{-1/2}. \tag{9}$$

Предположение 2. *1. Система* (7) *относительно управляема [15] на* T.

2. Максимум в (8) *достигается на векторе* $l_0' = (p_0', q_0')$ *таком, что* $s'(t_1;p_0,q_0) \neq 0$.

Тогда условие (9) определяет управление $u_0(\cdot) \in P$ как некоторую измеримую на T функцию, при этом найдется такой вектор $x_0 \in X_0$, $\psi_x(\cdot) \in \Psi_x(\cdot)$, что $u_0(\cdot)$ приводит траекторию $z_0(\cdot;u_0(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))$ на границу множества достижимости $F_0(t_1,P,x_0,\psi_x(\cdot))$ вырожденной системы:

$$F_0(t_1,P,x_0,\psi_x(\cdot)) = \{z \in R^{n+m} |\ z = z_0(t_1,u(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot)), u(\cdot) \in P\}$$

и

$$\varepsilon_0(t_1) = J_0(u_0(\cdot)) = \max_{x_0 \in X_0} \max_{\psi_x(\cdot)\in\Psi_x(\cdot)} \varphi(z_0(t_1;u_0(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))).$$

Как уже отмечалось, решение $(u_0(\cdot),\ l_0,\ \varepsilon_0(t_1))$ задачи 2 не дает даже начального приближения решения задачи 1, но конструкция вырожденной системы (с некоторыми расширениями) будет использоваться в дальнейшем, поскольку с ней связаны асимптотические свойства траекторий исходной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. На основании же асимптотических свойств можно существенно упростить получение решения исходной задачи 1. Поэтому важное значение приобретают методы, позволяющие построить аппроксимацию оптимального управления $u^0(\cdot,\mu)$, доставляющую оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1)=J(u^0(\cdot,\mu))$ с заданной точностью (относительно μ). В данной работе в основе предложенного способа определения требуемого приближения лежит возможность представления блоков $Z_{ij}[t,\tau;\mu]$ $(i,j=1,2)$ в виде пределов равномерно сходящихся на $[t_0,t_1]$ последовательностей $Z_{ij}^{(k)}[t,\tau;\mu]$, $k=0,1,2,...$, при $0<\mu\leqslant\mu_0$, μ_0 достаточно мало.

2. АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Теорема 1. [10, теорема 1] *Существуют такие достаточно малое число $\mu_0>0$ и постоянная $N>0$, что в области μ $(0<\mu\leqslant\mu_0)$, $t_0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant t_1$ выполняются оценки:*

$$\|Z_{11}[t,\tau]\|\leqslant N/(1-\mu N);\|Z_{12}[t,\tau]\|\leqslant\mu N(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N),$$
$$\|Z_{21}[t,\tau]\|\leqslant N(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N),$$
$$\|Z_{22}[t,\tau]\|\leqslant \mathrm{c}_0e^{-c(t-\tau)/\mu}+\mu N^2(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N).$$

В [10, с. 146] приведены оценки для блоков $Z_{ij}[t,\tau]$ $(i,j=1,2)$, причем последние могут быть представлены в виде пределов равномерно сходящихся на T последовательностей $Z_{ij}^{(k)}[t,\tau;\mu]$, $k=0,1,2,...$, при $0<\mu\leqslant\mu_0$, μ_0 достаточно мало:

$$Z_{11}^{(k+1)}[t,\tau]=X[t,\tau]-\int\limits_{\tau}^{t}(dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds)A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau]+G_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])ds,$$
$$Z_{22}^{(k+1)}[t,\tau]=Y[t,\tau]+\int\limits_{\tau}^{t}Z_{21}^{(k)}[t,s](A_{12}(s)Y[s,\tau]+\mu G_{12}(s)Y[s-h,\tau])ds,$$
$$Z_{12}^{(k)}[t,\tau]=\int\limits_{\tau}^{t}Z_{11}^{(k)}[t,s](A_{12}(s)Y[s,\tau]+\mu G_{12}(s)Y[s-h,\tau])ds,$$
$$Z_{21}^{(k)}[t,\tau]=(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t}Y[t,s](A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau]+G_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])ds,$$
$$\left\|Z_{12}^{(k+1)}[t,\tau]-Z_{12}^{(k)}[t,\tau]\right\|\leqslant\mu^{k+2}N_0N_1^{k+1}(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu}),$$
$$\left\|Z_{21}^{(k+1)}[t,\tau]-Z_{21}^{(k)}[t,\tau]\right\|\leqslant\mu^{k+1}N_0N_1^{k+1}(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu}),\tag{10}$$
$$\left\|Z_{22}^{(k+1)}[t,\tau]-Z_{22}^{(k)}[t,\tau]\right\|\leqslant\mu^{k}N_0N_1^{k}(c_0/c)^2(\mu(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})-c(t-\tau)e^{-c(t-\tau)/\mu}),$$

причем $Z_{11}^{(0)}[t,\tau]=X[t,\tau],Z_{22}^{(0)}[t,\tau]=Y[t,\tau]$, где $N_0>0,N_1>0$ — некоторые постоянные.

Для задачи 1 соотношение (4) можно представить, используя [10, с. 147], в следующем виде:

$$\varepsilon^0(t_1)=\min_{u(\cdot)\in P}\max_{p,q}\Big\{-\varphi^*(p,q)+\rho(p'Z_{11}[t_1,t_0]+q'Z_{21}[t_1,t_0]|X_0)+$$

$$+\rho(p'Z_{12}[t_1,t_0]+q'Z_{22}[t_1,t_0]|Y_0)+\int\limits_{t_0}^{t_1}[(p'Z_{11}[t_1,\tau]+q'Z_{21}[t_1,\tau])B_0(\tau,\mu)+$$
$$+(1/\mu)q'Y[t_1,\tau]B_2(\tau,\mu)-\xi(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau,\mu)]u(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho((p'Z_{11}[t_1,\tau]+q'Z_{21}[t_1,\tau])G_0(\tau)-\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau)|\Psi_x(\tau-h))d\tau+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho((p'Z_{11}[t_1,\tau]+q'Z_{21}[t_1,\tau])\mu G_{12}(\tau)+(p'Z_{12}[t_1,\tau]+q'Z_{22}[t_1,\tau])\times$$
$$\left.\times G_{22}(\tau)|\Psi_y(\tau-h))d\tau\right\},\qquad(11)$$

где

$$B_0(t,\mu)=B_1(t,\mu)-A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t,\mu),$$
$$\xi(\tau,t_1,p,q)=\frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1,\tau]+(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_1}q'Y[t_1,s]A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau]\,ds],$$
$$\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)=\frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1,\tau]+(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_0+h}q'Y[t_1,s]A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau]\,ds].$$

Лемма 1. [11, лемма 1] *При $0<\mu\leqslant\mu_0$, μ_0 достаточно мало, для любых $u(\cdot)\in P(\cdot)$, $p\in R^n$, $q\in R^m$ справедливы оценки*

$$\left\|\int\limits_{t_0}^{t_1}\xi(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau,\mu)u(\tau)d\tau\right\|\leqslant\omega(\mu)[\|p\|+N_1\|q\|],$$
$$\left\|\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau)|\Psi_x(\tau-h))d\tau\right\|\leqslant\omega(\mu)[\|p\|+N_2\|q\|],\qquad(12)$$

где $\omega(\mu)=o(1)$, N_1, $N_2>0$ — некоторые постоянные.

Построим начальное приближение $u_\mu^{(0)}(\cdot)$, доставляющее оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1)=J(u^0(\cdot))$ с точностью $o(1)$ при $\mu\to+0$.

Из (11) следует

$$\varepsilon^0(t_1)=\min_{u(\cdot)\in P}\max_{p,q}\{-h^{**}(p,q)-\int\limits_{t_0}^{t_1}[p'X[t_1,\tau]+q'Z_{21}^{(0)}[t_1,\tau]]B_0(\tau,\mu)u(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}(1/\mu)q'Y[t_1,\tau]B_2(\tau,\mu)u(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}[\xi_1(\tau,t_1,p,q)B_0(\tau,\mu)-\xi(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau,\mu)]u(\tau)d\tau\}, \tag{13}$$

где обозначено $\xi_1(\tau,t,p,q)=p'(Z_{11}[t,\tau]-Z_{11}^{(0)}[t,\tau])+q'(Z_{21}[t,\tau]-Z_{21}^{(0)}[t,\tau])$, причем для $0<\mu\leqslant\mu_0$, функция $h(l)\equiv h(p,q)$ из (4) представима в виде

$$h(p,q)=h_0(p,q)+o(1).$$

Используя оценки (10), (12), получим следующий результат.

Лемма 2. *Существуют такие достаточно малое число $\mu_0>0$ и постоянная $N>0$, что для любых $t_0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant t_1$, $p\in R^n, q\in R^m$, $0<\mu\leqslant\mu_0$ имеет место оценка*

$$\|\xi_1(\tau,t,p,q)\|\leqslant\mu N^2(\|p\|+\|q\|\,(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})). \tag{14}$$

Следующую задачу будем называть *предельной*.

Задача 3. *Среди управлений $u(\tau)\in P$, $\tau\in T$, $v(s)$, $s\geqslant 0$, удовлетворяющих условию $\{u(\cdot),\ v(\cdot)\}\in P^{(0)}$, где*

$$P^{(0)}=\left\{u(\cdot),\ v(\cdot)|\ \int\limits_{t_0}^{t_1}u'(\tau)R(\tau)u(\tau)d\tau+\int\limits_{0}^{\infty}v'(s)R(t_1)v(s)\,ds\leqslant\lambda^2\right\},$$

найти $u^{(0)}=u^{(0)}(\cdot)$, $v^{(0)}=v^{(0)}(\cdot)$, доставляющие минимум функционалу $J^{(0)}(u(\cdot),v(\cdot))$:

$$J^{(0)}(u^{(0)},v^{(0)})=\min\{J^{(0)}(u(\cdot),v(\cdot))|\{u(\cdot),v(\cdot)\}\in P^{(0)}\},$$
$$J^{(0)}(u(\cdot),v(\cdot))=\max\{\varphi(\tilde z(t_1;u(\cdot),v(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot)))|x_0\in X_0,\psi_x(\cdot)\in\Psi_x(\cdot)\},$$

где

$$\tilde z(t_1;u(\cdot),v(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))=\begin{pmatrix} x_0(t_1)\\ -A_{22}^{-1}(t_1)(A_{21}(t_1)x_0(t_1)+G_{21}(t_1)x_0(t_1-h))+\\ +\int\limits_0^\infty\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1,\mu)v(s)\,ds\end{pmatrix},$$

причем $x_0(\cdot)=x_0(\cdot;u(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))$ — решение (7), $\Phi_0[t_1,s]=Y[t_1,t_1-\mu s]$.

Предположение 3. *1. Для любого $t\in T$*

$$\mathrm{rank}\{B_2(t_1,\mu),\ A_{22}(t_1)B_2(t_1,\mu),...,\ A_{22}^{m-1}(t_1)B_2(t_1,\mu)\}=m.$$

2. Вектор $(l^{(0)})'=(p^{(0)'},q^{(0)'})$, доставляющий максимум в

$$\varepsilon^{(0)}(t_1)=\max\{\chi^{(0)}(p,q)|\ p\in R^n,\ q\in R^m\}=\chi^{(0)}(p^{(0)},q^{(0)}), \tag{15}$$

таков, что $s'(t_1;p^{(0)},q^{(0)})\neq 0$, $q^{(0)}\neq 0$.

Здесь обозначено: $\chi^{(0)}(p,q)=-h_0^{**}(p,q)-\lambda(\sigma_0(p,q))^{1/2}$,

$$\sigma_0(p,q)=\int\limits_{t_0}^{t_1}w'(\tau,p,q)\times B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau,p,q)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^\infty q'\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1,\mu)R^{-1}(t_1)B_2'(t_1,\mu)\Phi_0'[t_1,s]q\,ds.$$

При выполнении условия 1 предположения 2 и условий предположения 3 задача 3 разрешима [8, с. 110; 9, с. 76], причем оптимальная пара этой задачи имеет следующий вид:

$$u^{(0)}(\tau)=-\lambda R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau,p^{(0)},q^{(0)})(\sigma_0(p^{(0)},q^{(0)}))^{-1/2},\qquad \tau\in T, \tag{16}$$

$$v^{(0)}(s)=-\lambda R^{-1}(t_1)B_2'(t_1,\mu)\Phi_0'[t_1,s]q^{(0)}(\sigma_0(p^{(0)},q^{(0)}))^{-1/2},\qquad s\geqslant 0, \tag{17}$$

и доставляет функционалу $J^{(0)}$ значение $J^{(0)}(u^{(0)},v^{(0)})=\varepsilon^{(0)}(t_1)$, где $\varepsilon^{(0)}(t_1)$ определено в (15).

Сравнивая предельную и вырожденную задачи, имеем следующее неравенство:

$$\varepsilon^{(0)}(t_1)\leqslant\varepsilon_0(t_1).$$

Рассмотрим управляющее воздействие $u_\mu^{(0)}(\cdot)$:

$$u_\mu^{(0)}(\tau)=\begin{cases}u^{(0)}(\tau), & t_0\leqslant\tau\leqslant t_1-\alpha(\mu),\\ (1/\sqrt{\mu})v^{(0)}((t_1-\tau)/\mu), & t_1-\alpha(\mu)<\tau\leqslant t_1,\end{cases} \tag{18}$$

где $\alpha=\alpha(\mu)\in R$, $\alpha>0$, $\alpha\to 0$, $\alpha/\mu\to+\infty$ при $\mu\to+0$.

Пусть μ_k, $k=1,2,\ldots$, где $0<\mu_k<\mu_0$ есть некоторая сходящаяся к нулю последовательность чисел, $u_k^{(0)}(\cdot)=u_{\mu_k}^{(0)}(\cdot)$, $k=1,2,\ldots$, — соответствующая последовательность оптимальных (для задачи 1) управлений. В силу слабой компактности множества P в пространстве $L_2^r(T)$ можно выделить подпоследовательность $u_{k_j}^{(0)}(\cdot)$, слабо сходящуюся к некоторой функции $u^{(0)}(\cdot)\in P$. Обозначим $v_{k_j}^0(\cdot)\equiv v^0(\cdot,\mu_{k_j})$, $v^0(s,\mu)=\sqrt{\mu}u^0(t_1-\mu s,\mu)$, $0\leqslant s\leqslant 1/\varepsilon<\alpha(\mu)/\mu$ при $0<\mu\leqslant\mu_0$, где $\varepsilon>0$ — произвольно выбранное число, μ_0 — достаточно мало.

Теорема 2. *Пусть выполнены условие 1 предположения 2 и условия предположения 3 и пусть максимум в* (15) *достигается на единственном векторе* $l^{(0)}$. *Тогда верно следующее:*

1) $u_{k_j}^0(\cdot)$ *слабо сходится к* $u^{(0)}(\cdot)$ (16), $v_{k_j}^0(\cdot)$ *слабо сходится к* $v^{(0)}(\cdot)$, *где* $v^{(0)}(\cdot)$ *определено в* (17) ($s\in[0,1/\varepsilon]$ *для любого* $\varepsilon>0$)*;*

2) при $0<\mu\leqslant\mu_0$, μ_0 *— достаточно мало, справедливы соотношения*

$$\varepsilon^0(t_1,\mu)=J(u^0(\cdot))=J(u_\mu^{(0)}(\cdot))+o(1),\qquad \varepsilon^0(t_1,\mu)=\varepsilon^{(0)}(t_1)+o(1);$$

3) для $u_\mu^{(0)}(\cdot)$ (18), *при* $\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)$

$$\left|\rho(l|Z(t_1;u^0(\cdot),Z_0,\psi(\cdot)))-\rho(l|Z(t_1;u_\mu^{(0)}(\cdot),Z_0,\psi(\cdot)))\right|\leqslant\omega_0(\mu),$$

$\omega_0(\mu)=o(1)$, $0<\mu\leqslant\mu_0$, *равномерно по всем* $l\in R^{n+m}$, $l'l=1$*;*

4) при $\mu\to+0$ *множество* $Z(t_1;u^0(\cdot),Z_0,\psi(\cdot))$ *сходится в хаусдорфовой метрике к выпуклому, замкнутому, ограниченному множеству:*

$$\tilde Z(t_1;u^{(0)}(\cdot),v^{(0)}(\cdot),X_0,\psi_x(\cdot))=\{\tilde z\in R^{n+m}|\tilde z=\tilde z(t_1;u^{(0)}(\cdot),v^{(0)}(\cdot),x_0),x_0\in X_0,\psi_x(\cdot)\}.$$

Доказательство. В (4) имеем

$$\chi^0(l) = -h^{**}(l) - \lambda(\sigma^0(l;\mu))^{1/2}, \tag{19}$$

$$\sigma^0(l,\mu) = \int\limits_{t_0}^{t_1} l'Z[t_1,\tau;\mu]B(\tau,\mu)R^{-1}(\tau)B'(\tau,\mu)Z'[t_1,\tau;\mu]l d\tau.$$

Используя (13), получим

$$\sigma^0(l,\mu) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \tilde{\sigma}'(t_1,\tau;\mu)R^{-1}(\tau)\tilde{\sigma}(t_1,\tau;\mu)d\tau,$$

$$\tilde{\sigma}'(t_1,\tau;\mu) = (p'X[t_1,\tau] + q'Z^{(0)}_{21}[t_1,\tau;\mu])B_0(\tau,\mu)+$$
$$+(1/\mu)q'Y[t_1,\tau]B_2(\tau,\mu) + \xi_1(\tau,t_1,p,q;\mu)B_0(\tau,\mu) - \xi(\tau,t_1,p,q;\mu)A^{-1}_{22}(\tau)B_2(\tau,\mu),$$

где $B_2(t,\mu) = \sqrt{\mu}B_2(t)$, $B_0(\tau,\mu) = B_1(\tau) - \sqrt{\mu}A_{12}(\tau)A^{-1}_{22}(\tau)B_2(\tau)$.

Тогда, учитывая [12, лемма 1.2], оценки (12), (14), имеем $\sigma^0(l;\mu) = \sigma_0(p,q)+\hat{\xi}(l;\mu)$, причем $\left|\hat{\xi}(l,\mu)\right| \leqslant \|l\|\,\hat{\omega}(\mu)$, $\hat{\omega}(\mu) = o(1)$ при $0 < \mu \leqslant \mu_0$, откуда следует утверждение 2) теоремы.

В силу оценок (2), (12), учитывая [12, лемма 1.2], теорему 1 для любых $u(\cdot) \in P$, $v(s) = \sqrt{\mu}u(t_1 - \mu s)$, $s \in [0,\alpha(\mu)/\mu)$, $l' = (p',q') \in R^{n+m}$ справедливо представление

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} r(\tau;t_1,l,\mu)u(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha(\mu)} w'(\tau,p,q)B_1(\tau)u(\tau)d\tau+$$
$$+ \int\limits_{0}^{\alpha(\mu)/\mu} q'Y[t_1,t_1-\mu s;\mu]B_2(t_1-\mu s;\mu)v(s)\,ds + \xi'(l,\mu), \tag{20}$$

причем $|\xi'(l,\mu)| \leqslant \|l\|\,\omega'(\mu)$, где $\omega'(\mu) = o(1)$ при $0 < \mu \leqslant \mu_0$. Из предположения 3, единственности $l^{(0)}$ имеем $l^0 = l^{(0)} + o(1)$. Тогда из слабой компактности P получим утверждение 1). Неравенство 3) (а также 4 при оценке разности опорных функций указанных множеств) определяется на основании (20), свойств управления $u^0(\cdot)$ и управления $u^0_\mu(\cdot)$, определенного в (18). □

Обсудим теперь другие возможные варианты разложений (по параметру μ) коэффициентов $B(t,\mu)$ системы (3).

1. $B_1(t,\mu) = B_1(t), B_2(t,\mu) = \sigma(\mu)B_2(t)$, $\sigma(\mu) = o(\sqrt{\mu})$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$. В этом случае (19) представимо в виде

$$\sigma^0(l,\mu) = \int\limits_{t_0}^{t_1} w'(\tau,p,q)B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B'_1(\tau)w(\tau,p,q)d\tau + \hat{\xi}_1(l;\mu),$$

$$\left|\hat{\xi}_1(l,\mu)\right| \leqslant \|l\|\,\hat{\omega}_1(\mu),$$

$\hat{\omega}_1(\mu) = o(1)$ при $0 < \mu \leqslant \mu_0$, и, следовательно, в предельной задаче 3 необходимо положить $B_2(\cdot) \equiv 0$, $v(\cdot) \equiv 0$, т. е. решения предельной и вырожденной задач совпадают.

2. $B_1(t,\mu) = B_1(t), B_2(t,\mu) = \sigma(\mu)B_2(t)$, $\sigma(\mu) = o(1)$, $\sigma(\mu)/\sqrt{\mu} \to +\infty$ при $\mu \to +0$. Здесь уже могут нарушаться условия регулярности [9, с. 53], поскольку имеется «излишек» ресурсов управления по быстрой переменной. Тогда для (19) получим при $0 < \mu \leqslant \mu_0$

$$\sigma^0(l;\mu) = \int\limits_{t_0}^{t_1} w'(\tau,p,q)B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau,p,q)d\tau + (\sigma(\mu)/\sqrt{\mu})^2 \times$$
$$\times\left(\int\limits_0^\infty q'\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)R^{-1}(t_1)B_2'(t_1)\Phi_0'[t_1,s]q\,ds + \mu\hat{\xi}_2(l,\mu)\right) + \hat{\xi}_3(l,\mu), \qquad (21)$$

где $\hat{\xi}_2(l,\mu)$, $\hat{\xi}_3(l,\mu)$ имеют порядок малости $o(1)$. Соотношение (15) представимо в виде

$$\varepsilon^{(0)}(t_1) = \max_{p'p\leqslant 1}\left\{-h_0^{**}(p,0) - \lambda\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} p'X[t_1,\tau]B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)X'[t_1,\tau]pd\tau\right)^{1/2}\right\}. \qquad (22)$$

При выполнении условий регулярности (максимум достигается на границе) в предельной задаче 3 следует положить $\tilde{z}'(t_1;u(\cdot),v(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot)) = (x_0'(t_1),0')$, $v(\cdot) \equiv 0$, $l' = (p,0)$. Управление $u_\mu^{(0)}(\cdot)$ определяется соотношением (18), причем для $v^{(0)}(s)$, определенного в (17), недостаточно знать лишь начальное приближение $q^{(0)} = 0$, здесь следует найти более точно асимптотику, поскольку $\|q^0\| = o(\sqrt{\mu}/\sigma(\mu))$. q ищем в виде $q = (\sqrt{\mu}/\sigma(\mu))q_1 + o(\sqrt{\mu}/\sigma(\mu))$.

3. $B_1(t,\mu) = B_1(t), B_2(t,\mu) = B_2(t)$. Данный случай аналогичен случаю 2, в (21) нужно положить $\sigma(\mu) = 1$, отмеченные особенности остаются в силе, причем в (22) $B_1(\tau)$ заменяется на $B_0(\tau,\mu) = B_1(\tau) - A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)$. Однако множество достижимости вырожденной системы (5), (6) становится неограниченным (по быстрым переменным). Здесь q следует искать в виде $q = \sqrt{\mu}q_1 + o(\sqrt{\mu})$.

Библиографический список

1. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М. : Наука, 1987. 368 с.
2. *Gaitsgory V., Rossomakhine S.* Averaging and linear programming in some singularly perturbed problems of optimal control // Applied Mathematics and Optimization. 2015. Vol. 71, № 2. P. 195–276. DOI: 10.1007/s00245-014-9257-1.
3. *Gajic Z., Lim M.* Optimal control of singularly perturbed linear systems and applications. High-accuracy techniques. N. Y. : Marcel Dekker, Inc., 2001. 312 p.
4. *Glizer V. Y., Fridman E.* H_∞ control of linear singularly perturbed systems with small state delay // J. Math. Anal. and Appl. 2000. Vol. 250, iss. 1. P. 49–85.
5. *Калинин А. И., Лавринович Л. И.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 194–206. DOI: 10.7868/S004446691502012X.
6. *Курина Г. А., Нгуен Т. Х.* Асимптотическое решение сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления с разрывными коэффициентами // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52, № 4. С. 628–652.
7. *Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J.* Singular perturbation methods in control : analysis and design. Philadelphia, PA, USA : SIAM, 1999. 374 p.
8. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М. : Наука, 1968. 475 с.
9. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 392 с.

10. *Гребенникова И. В., Кремлёв А. Г.* Аппроксимация управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при геометрических ограничениях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 142–151. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-142-151.
11. *Гребенникова И. В., Кремлёв А. Г.* Итерационная процедура построения оптимального решения в минимаксной задаче управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при геометрических ограничениях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 272–280. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-272-280.
12. *Кремлёв А. Г., Гребенникова И. В.* Об асимптотике ансамбля траекторий управляемой сингулярно возмущенной системы с запаздыванием // Новости научной мысли – 2006 : материалы науч.-практ. конф. Днепропетровск : Наука и образование, 2006. Т. 4. С. 65–69.
13. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 492 с.
14. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Физматгиз, 1959. 468 с.
15. *Кириллова Ф. М.* Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1260–1263.

Образец для цитирования:
Гребенникова И. В., Кремлёв А. Г. Аппроксимация управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при интегральных квадратичных ограничениях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 368–380. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-368-380.

Approximation of Control for Singularly Perturbed System with Delay with Integral Quadratic Constraints

I. V. Grebennikova, A. G. Kremlev

Irina V. Grebennikova, orcid.org/0000-0002-9050-1591, Ural Federal University, 19, Mira Str., Ekaterinburg, Russia, 620002, giv001@mail.ru
Alexandr G. Kremlev, orcid.org/0000-0003-2157-0777, Ural Federal University, 19, Mira Str., Ekaterinburg, Russia, 620002, kremlev001@mail.ru

The purpose of the work is the development and theoretical substantiation of analytical approximate or asymptotic methods for solving optimal control problems for singularly perturbed systems with constant delay in phase variables under conditions of uncertainty with respect to the initial data. For achievement of a goal the control problem for the singularly perturbed system with delay with indeterminate initial conditions and integral quadratic constraints on the control resources according to the minimax criterion is considered. A limit problem is formulated for which the quality functional is chosen in a special way. The proposed method is based on the idea of separating the asymptotics of the ensemble of trajectories of a singularly perturbed system with delay and representing the fundamental matrix of solutions divided into blocks in accordance with the dimensions of fast and slow variables in the form of a uniformly convergent sequence. We propose a procedure to construct an initial approximation of control response for the minimax problem of control. The work uses problem statements, concepts, methods and results of control theory under uncertainty, as well as methods of the theory of extremal problems, asymptotic analysis methods, classical methods of convex and real analysis.

Key words: singularly perturbed system with delay, optimal control, fundamental matrix.

References

1. Akulenko L. D. *Asimptoticheskie metody optimal'nogo upravleniia* [Asymptotic Methods of Optimal Control]. Moscow, Nauka, 1987. 368 p. (in Russian).
2. Gaitsgory V., Rossomakhine S. Averaging and linear programming in some singularly perturbed problems of optimal control. *Applied Mathematics and Optimization*, 2015, vol. 71, no. 2, pp. 195–276. DOI: 10.1007/s00245-014-9257-1.
3. Gajic Z., Lim M. *Optimal control of singularly perturbed linear systems and applications. High-accuracy techniques*. New York, Marcel Dekker, Inc., 2001. 312 p.
4. Glizer V. Y., Fridman E. H_∞ control of linear singularly perturbed systems with small state delay. *J. Math. Anal. and Appl.*, 2000, vol. 250, iss. 1, pp. 49–85.
5. Kalinin A. I., Lavrinovich L. I. Asymptotic of the solution to a singularly perturbed linear-quadratic optimal control problem. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, no. 2, pp. 194–205. DOI: 10.1134/S0965542515020128.
6. Kurina G. A., Nguyen T. H. Asymptotic solution of singularly perturbed linear-quadratic optimal control problems with discontinuous coefficients. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2012, vol. 52, no. 4, pp. 524–547. DOI: 10.1134/S0965542512040100.
7. Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J. *Singular perturbation methods in control: analysis and design*. Philadelphia, PA, USA, SIAM, 1999. 374 p.
8. Krasovskii N. N. *Teorija upravlenija dvizheniem* [The Theory of Motion Control]. Moscow, Nauka, 1968. 475 p. (in Russian).
9. Kurzhanskij A. B. *Upravlenie i nabljudenie v uslovijah neopredelennosti* [Control and Observation under the Uncertainty Conditions]. Moscow, Nauka, 1977. 392 p. (in Russian).
10. Grebennikova I. V., Kremlev A. G. Approximation of control for singularly perturbed system with delay with geometric constraints. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 142–151 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-142-151.
11. Grebennikova I. V., Kremlev A. G. Iterative procedure of constructing optimal solving in the minimax problem of control for singularly perturbed system with delay with geometric constraints. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 272–280 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-272-280.
12. Kremlev A. G., Grebennikova I. V. About asymptotic of a set of trajectories of a singularly perturbed system with delay. *Novosti nauchnoj mysli – 2006: materialy mezhdunarodnoi nauch. prakt. konf.* [News of Scientific Thought : Proc. Intern. Conf.]. Dnepropetrovsk, Nauka i obrazovanie, 2006, vol. 4, pp. 65–69 (in Russian).
13. Rokafellar R. *Vypuklyj analiz* [Convex Analysis]. Moscow, Mir, 1973. 492 p. (in Russian).
14. Krasovskii N. N. *Nekotorye zadachi teorii ustojchivosti dvizhenija* [Some Problems in the Theory of Stability of Motion]. Moscow, Fizmatgiz, 1959. 468 p. (in Russian).
15. Kirillova F. M. Relative controllability of linear dynamic systems with delay. *Dokl. AN SSSR*, 1967, vol. 174, no. 6, pp. 1260–1263 (in Russian).

Cite this article as:

Grebennikova I. V., Kremlev A. G. Approximation of Control for Singularly Perturbed System with Delay with Integral Quadratic Constraints. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 368–380 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-368-380.