УДК 517.51

ИСПРАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛАГРАНЖА В УЗЛАХ, БЛИЗКИХ К УЗЛАМ ЛЕЖАНДРА

В. В. Новиков

Новиков Владимир Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и стохастического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83 vvnovikov@yandex.ru

Известно, что интерполяционный процесс Лагранжа непрерывной функции с узлами в нулях многочленов Чебышева может расходиться всюду (с произвольными узлами –- почти всюду) подобно ряду Фурье суммируемой функции. В то же время известно, что любую измеримую (конечную п.в.) функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры так, что ее ряд Фурье станет равномерно сходящимся (так называемое усиленное C-свойство). Возникает вопрос, не обладает ли класс непрерывных функций подобным свойством по отношению к интерполяционному процессу по той или иной матрице узлов? В настоящей работе показано, что существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma$, как угодно близкая к матрице узлов Лежандра такая, что после исправления (с сохранением непрерывности) функции $f \in C[-1,1]$ на множестве как угодно малой меры, интерполяционный процесс с узлами $\mathfrak{M}\gamma$ будет сходится к исправленной функции равномерно на $[a,b] \in (-1,1)$.

Ключевые слова: интерполяция Лагранжа, ортогональные многочлены Лежандра, исправление функций.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-394-401

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\alpha, \beta > -1$, $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^\infty$ — последовательность многочленов Якоби, ортогональных на отрезке $[-1,1]$, с весом $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, и пусть

$$-1 < x_{n,n}^{(\alpha,\beta)} < x_{n-1,n}^{(\alpha,\beta)} < \ldots < x_{1,n}^{(\alpha,\beta)} < 1, \qquad n \geqslant 1,$$

— нули многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания. Для функции f, заданной на $[-1,1]$, обозначим через $L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)$ многочлен Лагранжа, интерполирующий ее в узлах n-й строки матрицы $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)} = \{x_{i,n}^{(\alpha,\beta)} :\ i = 1,\ldots,n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Для частного случая $\alpha = \beta = 0$ (многочлены Лежандра) узлы интерполирования будем обозначать как $x_{i,n} := x_{i,n}^{(0,0)}$.

Хорошо известно [1, 2], что интерполяционный процесс $\{L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)\}_{n=1}^\infty$ для $f \in C[-1,1]$ при $\alpha = \beta = -1/2$ может расходиться всюду (для произвольных узлов — почти всюду [3]) подобно ряду Фурье суммируемой функции. В то же время известно ([4], см. также [5]), что любую измеримую (конечную почти всюду) функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры так, что ее ряд Фурье станет равномерно сходящимся (усиленное C-свойство по терминологии Н. К. Бари). Возникает вопрос, не обладает ли класс непрерывных функций подобным свойством по отношению к интерполяционному процессу по той или иной матрице узлов? Здесь для случая $\alpha = \beta = 0$ показано, что существует матрица узлов $\mathfrak{M}_\gamma$, как угодно близкая к $\mathfrak{M}^{(0,0)}$ такая, что после исправления (с сохранением непрерывности) функции $f \in C[-1,1]$ на множестве как угодно малой меры интерполяционный процесс с узлами $\mathfrak{M}\gamma$ будет сходится к исправленной функции равномерно внутри $[-1,1]$. Доказательство проводится по схеме, предложенной в [6]. Отметим, что для самой матрицы $\mathfrak{M}^{(0,0)}$ (и тем более для $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}$ с произвольными α, β) вопрос открыт.

Теорема. *Пусть последовательность $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{k,n}\}_{k=1,n=1}^{n,\infty}$ со следующими свойствами:*

1) $|x_{k,n} - y_{k,n}| < \gamma_n$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$;

2) для любых $f \in C[-1,1]$, $-1 < a < b < 1$ и $0 < \delta < b-a$ найдутся функция $g \in C[-1,1]$ и множество $E \subset [a,b]$, $\operatorname{mes} E > b-a-\delta$ такие, что $f = g$ на E и $\lim\limits_{n\to\infty} \|L_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, \cdot) - g\|_{C[a,b]} = 0$.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ЛЕММЫ

Пусть отрезок $[a,b] \subset (-1,1)$ и числа $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ таковы, что $-1 < a-\varepsilon' < a-\varepsilon < a < b < b+\varepsilon < b+\varepsilon' < 1$. Обозначим $I = [a-\varepsilon', b+\varepsilon']$. Пусть далее $f \in C[-1;1]$, $n \geqslant 3$, и $\mathfrak{M}:\ -1 < y_{n,n} < y_{n-1,n} < \ldots < y_{1,n} < 1$ — произвольная матрица узлов интерполирования. Положим $\Delta_{i,n} = (y_{2i+1,n}, y_{2i-1,n})$, $\overline{\Delta}_{i,n} = [y_{2i+1,n}, y_{2i-1,n}]$, $|\Delta_{i,n}| = y_{2i-1,n} - y_{2i+1,n}$, $\Delta^2 f_i = f(y_{2i+1,n}) - 2f(y_{2i,n}) + f(y_{2i-1,n})$, $d_1(\mathfrak{M}, n) = \min\limits_{i:\ \Delta_{i,n}\subset I} |\Delta_{i,n}|$, $d_2(\mathfrak{M}, n) = \max\limits_{i:\ \Delta_{i,n}\subset I} |\Delta_{i,n}|$,

$$R_{n,p}(\mathfrak{M}, f) = \left| \sum_{i:\ 0<|y_{p,n}-y_{2i,n}|<\varepsilon} \frac{\Delta^2 f_i}{p-2i} \right|, \qquad R_n(\mathfrak{M}, f) = \max_{p:\ y_{p,n}\in[a,b]} R_{n,p}(\mathfrak{M}, f),$$

и обозначим $\varphi(x) = (1-x^2)^{1/4}$, $F(x) = \varphi(x) f(x)$. Для произвольного конечного множества $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_m\} \subset \mathbb{R}$ через $d(A) := \min\limits_{i,j}\{|a_i - a_j| : a_i \neq a_j\}$ будем обозначать наименьшее положительное расстояние между его точками. Кроме того, как обычно, через C обозначаются абсолютные, вообще говоря различные, постоянные.

Лемма 1. *Пусть числа a, b, ε удовлетворяют указанным выше условиям. Тогда существует последовательность $\gamma = \{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}_+$ такая, что для любой $f \in C[-1;1]$ и любой матрицы узлов $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{i,n}\}$, для которой*

$$|y_{i,n} - x_{i,n}| < \gamma_n, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad n \geqslant 3, \tag{1}$$

равенство

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\mathfrak{M}_\gamma, F) = 0$$

будет необходимым и достаточным условием для равномерной сходимости к f на $[a,b]$ интерполяционного процесса $\{L_n(\mathfrak{M}_\gamma, f, x)\}$.

Доказательство. Утверждение леммы нетрудно получить, используя представление для разности $f(x) - L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)$ из [7], а также факт непрерывной зависимости фундаментальных многочленов интерполяции от узлов и $x \in [a,b]$. Данное предложение является аналогом критерия сходимости из [8] (см. также [9]). $\square$

Замечание. Известно [10], что для матрицы узлов Лежандра $\mathfrak{M}^{(0,0)}$ справедливо неравенство $d_2(\mathfrak{M}^{(0,0)},n)/d_1(\mathfrak{M}^{(0,0)},n) \leqslant C = C(a,b,\varepsilon')$ и, кроме того, $d_2(\mathfrak{M}^{(0,0)},n) \to 0$ при $n \to \infty$. В дальнейшем мы будем считать последовательность $\{\gamma_n\}$ стремящейся к 0 настолько быстро, что указанными свойствами обладают и величины $d_1(\mathfrak{M}_\gamma,n)$, $d_2(\mathfrak{M}_\gamma,n)$.

Лемма 2. *Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$ — последовательность из леммы 1 и $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{i,n}\}$ — любая фиксированная матрица узлов, удовлетворяющая условию (1). Пусть, далее, $\sigma > 0$ — произвольное достаточно малое число и конечный набор точек $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{m+1}$ таков, что $\lambda_{m+1} := a - \varepsilon' < \lambda_m < \cdots < \lambda_1 < \lambda_0 := b + \varepsilon'$, $d(\Lambda) > \sigma$. Тогда найдется номер $n_0 = n_0(\sigma)$, зависящий только от σ, такой, что при $n > n_0$ равномерно по $p \in J_n(a,b) := \{p : \ y_{p,n} \in [a,b]\}$ будут верны неравенства*

$$Q_{p,n}(\Lambda) := \sum_i |p - 2i|^{-1} \leqslant 3, \tag{2}$$

где суммирование идет по тем i, для которых $2i \neq p$, $\overline{\Delta}_{i,n} \subset I$ и $\Delta_{i,n} \cap \Lambda \neq \varnothing$.

Доказательство. Фиксируем $\sigma > 0$ и пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{m+1}$ удовлетворяет условиям леммы. Предположим, что $d_2(\mathfrak{M}_\gamma,n) < 4^{-1}d(\Lambda)$. Тогда $Q_{p,n}(\Lambda)$ можно представить в виде не более чем двух сумм $Q_{p,n}(\Lambda) = \Sigma_1 + \Sigma_2$, каждая из которых имеет вид $\Sigma_\nu = \sum\limits_{s=1}^{r(\nu)} 1/i_s^{(\nu)}$, $\nu = 1,2$, где $r(\nu) \leqslant m$ и положительные целые $i_s^{(\nu)}$, $s = 1,\ldots,r(\nu)$, таковы, что

$$i_{s+1}^{(\nu)} - i_s^{(\nu)} \geqslant Cn\sigma, \qquad s = 1,\ldots,r(\nu)-1. \tag{3}$$

Очевидно, что $i_1^{(\nu)} \geqslant 1$, а из (3) получаем $\sum\limits_{s=2}^{r(\nu)} 1/i_s^{(\nu)} \leqslant 1/2$, если только n больше некоторого $n_0^{(\nu)}(\sigma)$. Таким образом, (2) верно для всех $n > n_0(\sigma) = \max\{n_0^{(1)}; n_0^{(2)}\}$. Лемма доказана. □

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Пусть $f \in C[-1,1]$ — произвольная непрерывная функция и числа $a,b,\varepsilon,\varepsilon'$ выбраны и зафиксированы как указано выше, $F(x) = \varphi(x)f(x)$ и $0 < \delta < b - a$ — сколь угодно малое фиксированное число. Пусть далее $\gamma = \{\gamma_n\}$ — последовательность, для которой выполнены все сделанные выше предположения и $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{i,n}\}$ — любая матрица такая, что верно (1). Потребуем, чтобы все точки $\{y_{i,n}\}$ были попарно различными и не совпадали с узлами сетки $t_{k,j} := -1 + k2^{1-j}$, $k = 1,...,2^j$, $j \in \mathbb{N}$.

Положим $I_{k,j} := [-1 + (k-1)2^{1-j}, -1 + k2^{1-j}]$, $\tilde{F}_j(x) := \min\limits_{t \in I_{k,j}} F(t)$, $x \in I_{k,j}$, $k = 1,...,2^j$, $j \in \mathbb{N}$, $x \in [-1,1]$.

Последовательность $\{\tilde{F}_j(x)\}_{j=1}^\infty$ не убывает по j и равномерно сходится к F на $[-1,1]$, поскольку $\left\|F - \tilde{F}_j\right\|_{C[-1,1]} \leqslant \omega(F, 2^{1-j})$, где $\omega(F,\cdot)$ — модуль непрерывности функции F. Положим $F_j(x) = \tilde{F}_j(x) - \tilde{F}_{j-1}(x) \geqslant 0$, $\tilde{F}_0(x) \equiv A := \min\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} F(x)$. Тогда ряд $\sum\limits_{j=1}^\infty F_j(x)$ равномерно и абсолютно сходится к $F - A$ на $[-1,1]$. Докажем, что для всех $j = 1,2...$ и для любого $N_j \in \mathbb{N}$ существует функция $G_j \in C(I)$ такая, что

$$G_j(x) = F_j(x), \qquad x \in [-1,1] \backslash I, \tag{4}$$

$$0 \leqslant G_j(x) \leqslant F_j(x), \qquad x \in I, \tag{5}$$
$$\operatorname{mes}\{t \in [-1,1] : F_j\,(t) \neq G_j\,(t)\} < 2^{-j}\delta, \tag{6}$$
$$\max_n R_n(\mathfrak{M}_\gamma, G_j) \;\leqslant C\,\|F_j\|_{C(I)} \to 0 \qquad \text{при} \quad j \to \infty, \tag{7}$$
$$R_n(\mathfrak{M}_\gamma, G_j) = 0, \qquad n = 1, ..., N_j, \qquad j = 1, 2, ..., \tag{8}$$
$$\lim_{n\to\infty} R_n(\mathfrak{M}_\gamma, G_j) = 0. \tag{9}$$

После того как функции $G_j(x)$ будут построены, мы покажем что $G(x) = A + \sum\limits_{j=1}^{\infty} G_j(x)$ — искомая.

Обозначим через L множество точек разрыва функции F_j, лежащих в I. Выберем номер $M_j > N_j$ так, чтобы при $n > M_j$ для всех индексов i суммы $R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, f)$, $p \in J_n(a,b)$, выполнялось условие $\Delta_{i,n} \in I$, и пусть $D_0 := L \cup \{y_{i,s} \in I : 1 \leqslant s \leqslant M_j\}$. В силу леммы 2 найдется номер $\mu(0)$, для которого

$$Q_{n,p}(D_0) \leqslant 3 \quad \forall\; n \geqslant \mu(0), \quad p \in J_n(a,b).$$

Пусть $\{\sigma_l\}_{l=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ — последовательность такая, что $\sigma \downarrow 0$ при $l \to \infty$, причем $\sigma_l/\sigma_{l-1} < 2^{-l}$, $l = 1, 2, \ldots$; окончательно мы подберем ее позже.

Для каждого $t \in D_0$ построим замкнутую окрестность $[t - \sigma_0, t + \sigma_0]$, при этом σ_0 выберем настолько малым, что:

1) $\sigma_0 < 4^{-1}d(\tilde{D}_0)$, где $\tilde{D}_0 := D_0 \cup \{y_{i,s} \in I : M_j + 1 \leqslant s \leqslant \mu(0)\}$;

2) общая длина окрестностей всех точек t из D_0 меньше, чем $2^{-j-1}\delta$;

3) $\max\{n :\; d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_0\} > \mu(0)$.

Для $x \in [-1,1]$ положим

$$G_{0,j}(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{если } x \in D_0, \\ F_j(x), \quad \text{если } x \in [-1,1] \setminus \cup_{t\in D_0} (t - \sigma_0, t + \sigma_0), \\ \text{линейная на } [t - \sigma_k, t] \text{ и } [t, t + \sigma_k],\; t \in D_0. \end{cases}$$

Предположим, что уже определены множества $D_0, \ldots, D_{l-1}$, выбраны числа $\sigma_0, \ldots, \sigma_{l-1}$ и построены функции $G_{0,j}, \ldots, G_{l-1,j}$, $l \geqslant 1$. Определим D_l, σ_l и построим $G_{l,j}$. Пусть $E_{u,v} := \cup_{s=u}^{v} \cup_{t\in D_s} [t - \sigma_s, t + \sigma_s]$ и $D_l := \{y_{i,s} :\; s = M_j + l,\; y_{i,s} \in I \setminus E_{0,l-1}\}$. Для конечного множества $D_l \cup P_{l-1}$, где $P_{l-1} := \cup_{s=0}^{l-1} \cup_{t\in D_s} \{t - \sigma_s;\; t;\; t + \sigma_s\}$, найдем, применяя лемму 2, число $\mu(l)$ такое, что:

1) $Q_{n,p}\,(D_l \cup P_{l-1}) < 3$, $\forall\; n \geqslant \mu(l)$, $\;p \in J_n(a,b)$;

2) $\mu(l) > \min\{n :\; d_2(\mathfrak{M}_\gamma, n) \leqslant \sigma_{l-1}\}$.

Теперь строим окрестности $[t - \sigma_l, t + \sigma_l]$, $t \in D_l$, выбирая σ_l так, что:

1) $\sigma_l < 4^{-1}d(\tilde{D}_l)$, где $\tilde{D}_l := D_l \cup \{y_{i,s} \in I \setminus E_{0,l-1} :\; M_j + l \leqslant s \leqslant \mu(l)\}$;

2) общая длина окрестностей всех точек t из D_l меньше, чем $2^{-j-l}\delta$;

3) $\max\{n :\; d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_l\} > \mu(l)$.

Обозначим $h_{k,j} := F_j(x),\; x \in I_{k,j}$, и для $x \in [-1,1]$ положим

$$G_{l,j}(x) = \begin{cases} h_{k,j} \sum\limits_{s=1}^{l} 2^{-l}, \quad \text{если } x \in D_l \cap I_{k,j}, \\ G_{l-1,j}(x), \quad \text{если } x \in [-1,1] \setminus \cup_{t\in D_l} (t - \sigma_l, t + \sigma_l), \\ \text{линейная на } [t - \sigma_l, t] \text{ и } [t, t + \sigma_l],\; t \in D_l. \end{cases}$$

Определим функцию $G_j(x) := \lim\limits_{l\to\infty} G_{l,j}(x)$, $x \in [-1,1]$, $j \in \mathbb{N}$, и проверим для нее выполнение условий (7) и (9) (справедливость (4)–(6) и (8), а также условия $G_j \in C(I)$ очевидны). Пусть $n > M_j$. Определим номер l из условий (формально полагаем $\sigma_{-1} := 2$)

$$d_2(\mathfrak{M}, n) \leqslant \sigma_{l-1}, \tag{10}$$

$$\exists\ i_0 : \ |\Delta_{i_0,n}| > \sigma_l, \quad \Delta_{i_0,n} \subset I. \tag{11}$$

Из определения F_j следует, что все узлы, участвующие в построении числителей суммы $R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G_j)$, содержатся в множестве $E_{0,n}$. При этом $\Delta^2 G_{j,i} = 0$, если $\Delta_{i,n}$ целиком лежит на промежутке линейности функции G_j, т. е. если при некоторых s и $t \in D_s$ имеет место включение $\Delta_{i,n} \subset (t - \sigma_s, t) \cup (t, t + \sigma_s)$. Далее, по построению окрестности $[y_{i,s} - \sigma_s, y_{i,s} + \sigma_s]$ узлов строк с номерами $s = M_j + l, \ldots, \mu(l)$ попарно не пересекаются. Тогда, предположив в дополнение к (10), что $n \leqslant \mu(l)$, получим, что из условия $\Delta_{i,n} \subset I \backslash E_{0,l-1}$ следует равенство $G_j(y_{2i-1,n}) = G_j(y_{2i,n}) = G_j(y_{2i+1,n})$, так что для указанных i снова имеем $\Delta^2 G_{j,i} = 0$. С учетом высказанных соображений можно записать

$$R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G_j) = \left| \left(\sum_{i \in J_1} + \sum_{i \in J_2} \right) \frac{\Delta^2 f_i}{p - 2i} \right| \equiv S_1 + S_2,$$

где

$$J_1 = \{ i : \ \Delta_{i,n} \cap P_{l-2} \neq \varnothing \}, \tag{12}$$

$$J_2 = \{ i : \ \Delta_{i,n} \cap \left(\cup_{t \in D_{l-1}} \{ t - \sigma_{l-1}; \ t; \ t + \sigma_{l-1} \} \right) \neq \varnothing \}. \tag{13}$$

Разумеется, если n недостаточно велико, то множества J_1, J_2 могут оказаться пустыми. В этом случае соответствующие части суммы считаем равными нулю. Положим $c_j := \|G_j\|_{C(I)} = \|F_j\|_{C(I)}$. Тогда из определения G_j, учитывая, что $\sigma_l / \sigma_{l-1} < 2^{-l}$, $l = 1, 2, \ldots$ получаем

$$\left| \Delta^2 G_{j,i} \right| \leqslant 2 c_j \max \left\{ \frac{\sigma_{l-1}}{\sigma_{l-2}}; \ 2^{1-l} \right\} \leqslant \frac{C c_j}{2^l}, \qquad i \in J_1, \tag{14}$$

$$\left| \Delta^2 G_{j,i} \right| \leqslant 2 c_j 2^{1-l} = \frac{C c_j}{2^l}, \qquad i \in J_2. \tag{15}$$

Так как $n > \mu(l-1)$, с учетом определения $\mu(l-1)$ и (14) имеем

$$S_1 \leqslant \frac{C c_j}{2^l} Q_{n,p}(P_{l-2}) \leqslant \frac{C c_j}{2^l}. \tag{16}$$

Аналогично

$$S_2 \leqslant \frac{C c_j}{2^l} \left(Q_{n,p}(D_{l-1}) + Q_{n,p}(D^-_{l-1}) + Q_{n,p}(D^+_{l-1}) \right) \leqslant \frac{C c_j}{2^l}, \tag{17}$$

где $D^-_s := \cup_{t \in D_s} \{ t - \sigma_s \}$, $D^+_s := \cup_{t \in D_s} \{ t + \sigma_s \}$, $s = 0, 1, \ldots$ Таким образом, для n таких, что верно (10) и $n \leqslant \mu(l)$ мы получим

$$R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G_j) \leqslant \frac{C c_j}{2^l}, \qquad p \in J_n(a, b). \tag{18}$$

Пусть теперь $n > \mu(l)$. Ясно, что $M_j + l + 1 < n$, кроме того, из (11) и определения $\mu(l+1)$ следует неравенство $n \leqslant \mu(l+1)$. Аналогично предыдущему получаем, что окрестности узлов строк с номерами от M_j+l+1 до $\mu(l+1)$ попарно не пересекаются. Значит, можно записать

$$R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G_j) = \left| \left(\sum_{i\in J_1} + \sum_{i\in J_2} + \sum_{i\in J_3} \right) \frac{\Delta^2 f_i}{p-2i} \right| \equiv S_1 + S_2 + S_3,$$

где J_1 и J_2 определены посредством (12) и (13), а $J_3 := \{i : \ \Delta_{i,n} \cap (D_l \cup D_l^- \cup D_l^+) \neq \neq \varnothing\}$. Для сумм S_1, S_2 и числителей суммы S_3 сохраняются прежние оценки, кроме того,

$$S_3 \leqslant \frac{Cc_j}{2^l} \left(Q_{n,p}(D_l) + Q_{n,p}(D_l^-) + Q_{n,p}(D_l^+) \right) \leqslant \frac{Cc_j}{2^l}.$$

Таким образом, для n, удовлетворяющих (11) и условию $n > \mu(l)$, мы снова получаем оценку (18). Итак, (18) верно при всех n. Поскольку $c_j \to 0$ при $j \to \infty$, из (18) следует (7). Кроме того, поскольку $l = l(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, из (18) следует также и (9).

Положим $G(x) = A + \sum\limits_{j=1}^{\infty} G_j(x)$, $g(x) = G(x)/\varphi(x)$, $x \in (-1,1)$, $g(\pm 1) := g(\pm 1 \mp 0)$. Так как $G_j \in C(I)$ и в силу (5) ряд сходится равномерно на I, имеем $G \in C(I)$. Кроме того, $G(x) = F(x)$, $x \in [-1,1]\backslash I$ и $G(a - \varepsilon' + 0) = F(a - \varepsilon')$, $G(b + \varepsilon' - 0) = F(b + \varepsilon')$, так что $G, \ g \in C[-1,1]$. Далее, из (6) следует, что

$$\operatorname{mes}\{x \in [-1,1] : F(x) \neq G(x)\} = \operatorname{mes}\{x \in [-1,1] : f(x) \neq g(x)\} < \delta. \tag{19}$$

Подберем теперь последовательность $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$ так, чтобы для функции G выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\mathfrak{M}_\gamma, G) = 0. \tag{20}$$

Возьмем в качестве M_1 произвольное натуральное число и предположим, что $M_1, \ldots, M_{j-1}$, $j \geqslant 2$, уже выбраны. За счет (9) можно подобрать M_j так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{s=1}^{j-1} R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G_s) < \frac{1}{j}, \qquad \forall\, n > M_j, \quad p \in J_n(a,b). \tag{21}$$

Завершив индукцию по j и выбрав $\{M_j\}$, мы окончательно построим функцию G. Пусть n — достаточно большой номер. Определим j из условия $M_j < n \leqslant M_{j+1}$. Имеем

$$R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G) \leqslant \sum_{s=1}^{j-1} R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G_s) + R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G_j) + R_{n,p}\left(\mathfrak{M}_\gamma, \sum_{s=j+1}^{\infty} G_s\right) \equiv$$
$$\equiv \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \tag{22}$$

Из (21), (7) и (8) соответственно находим $\Sigma_1 < 1/j$, $\Sigma_2 < Cc_j$ и $\Sigma_3 = 0$. С учетом этих соотношений и того, что $j \to \infty$ при $n \to \infty$, из (22) получаем (20).

В силу леммы 1 из (20) следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, \cdot) - g\|_{C[a,b]} = 0,$$

которое совместно с (19) показывает, что функция g является искомой. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Grünwald G.* Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome Stetiger Funktionen // Ann. Math. 1936. Vol. 37. P. 908–918.
2. *Marcinkiewicz J.* Sur la divergence des polynomes d'interpolation // Acta Litt. Sci. Szeged. 1936/37. Vol. 8. P. 131–135.
3. *Erdős P., Vertesi P.* On the almost everywhere divergence of Lagrange interpolatory polynomials for arbitrary system of nodes // Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 1980. Vol. 36, iss. 1–2. P. 71–89.
4. *Menchoff D.* Sur les seéries de Fourier des fonctions continues // Матем. сб. 1940. Т. 8(50), № 3. С. 493–518.
5. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматлит, 1961. 936 с.
6. *Новиков В. В.* Интерполяция типа Лагранжа – Якоби и аналог усиленного C-свойства // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 66–68.
7. *Неваи Г. П.* Замечания об интерполировании // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1974. Vol. 25, iss. 1–2. P. 123–144.
8. *Новиков В. В.* Критерий равномерной сходимости интерполяционного процесса Лагранжа – Якоби // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 2. С. 254–266. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-418-422.
9. *Привалов А. А.* Критерий равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Изв. вузов. Матем. 1986. № 5. С. 49–59.
10. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М. : Физматлит, 1962. 500 с.

Образец для цитирования:

Новиков В. В. Исправление функций и интерполяция Лагранжа в узлах, близких к узлам Лежандра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 394–401. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-394-401.

Adjustment of Functions and Lagrange Interpolation Based on the Nodes Close to the Legendre Nodes

V. V. Novikov

Vladimir V. Novikov, orcid.org/0000-0002-6147-1311, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, vvnovikov@yandex.ru

It is well known that the Lagrange interpolation of a continuous function based on the Chebyshev nodes may be divergent everywhere (for arbitrary nodes, almost everywhere) like the Fourier series of a summable function. On the other hand any measurable almost everywhere finite function can be “adjusted” in a set of arbitrarily small measure such that its Fourier series will be uniformly convergent. The question arises: does the class of continuous functions have a similar property with respect to any interpolation process? In the present paper we prove that there exists a matrix of nodes $\mathfrak{M}_\gamma$ arbitrarily close to the Legendre matrix with the following property: any function $f \in C[-1,1]$ can be adjusted in a set of arbitrarily small measure such that the interpolation process of adjusted continuous function g based on the nodes $\mathfrak{M}_\gamma$ will be uniformly convergent to g on $[a,b] \subset (-1,1)$.

Key words: Lagrange interpolation, Legendre orthogonal polynomials, adjustment of functions.

References

1. Grünwald G. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome Stetiger Funktionen. *Ann. Math.*, 1936, vol. 37, pp. 908–918.
2. Marcinkiewicz J. Sur la divergence des polynomes d'interpolation. *Acta Litt. Sci. Szeged*, 1936/37, vol. 8, pp. 131–135.
3. Erdős P., Vertesi P. On the almost everywhere divergence of Lagrange interpolatory polynomials for arbitrary system of nodes. *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.*, 1980, vol. 36, iss. 1–2. pp. 71–89.
4. Menchoff D. Sur les séries de Fourier des fonctions continues. *Rec. Math. (N.S)*, 1940, vol. 8(50), no. 3, pp. 493–518.
5. Bary N. K. *A treatise on trigonometric series*. Oxford, New York, Pergamon Press, 1964, vol. 1, 533 p.; vol. 2, 508 p. (Russ. ed. : Moscow, Fizmatlit, 1961. 936 p.)
6. Novikov V. V. Interpolyaciya tipa Lagranzha – Yakobi i analog usilennogo C-svojstva [Interpolation of the Lagrange – Jacobi type and an analogue of the strengthened C-property]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2007, iss. 9, pp. 66–68 (in Russian).
7. Nevai G. P. Zamechanija ob interpolirovanii [Remarks on interpolation]. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 1974, vol. 25, iss. 1–2, pp. 123–144 (in Russian).
8. Novikov V. V. A Criterion for Uniform Convergence of the Lagrange – Jacobi Interpolation Process. *Math. Notes*, 2006, vol. 79, no. 1, pp. 232–243. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-418-422.
9. Privalov A. A. A criterion for uniform convergence of Lagrange interpolation processes. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1986, vol. 30, no. 5, pp. 65–77.
10. Szegő G. *Orthogonal Polynomials.* Providence, Rhode Island, AMS, 1939. 440 p. (Russ. ed. : Moscow, Fizmatlit, 1962. 500 p.)

Cite this article as:

Novikov V. V. Adjustment of Functions and Lagrange Interpolation Based on the Nodes Close to the Legendre Nodes. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 394–401 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-394-401.