УДК 517.9

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВА ИНТЕГРАЛЬНО УБЫВАЮЩИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

И. А. Тришина

Тришина Ирина Алевтиновна, аспирант кафедры нелинейных колебаний, Воронежский государственный университет, 394036, Россия, Воронеж, Университетская пл., 1, i.a.trishina@gmail.com

В статье введен в рассмотрение и изучен новый класс почти периодических на бесконечности функций, который определяется с помощью подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций. Он является более широким по сравнению с классом почти периодических на бесконечности функций, введенным в работах А. Г. Баскакова (относительно подпространства исчезающих на бесконечности функций). Достаточно обратиться к теории аппроксимации для нового класса функций, где коэффициентами Фурье являются медленно меняющиеся на бесконечности функции относительно подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций. Сформулированы три эквивалентных определения почти периодической на бесконечности функции относительно интегрально убывающих на бесконечности функций. Для их исследования применяется теория банаховых модулей над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$ суммируемых функций. Почти периодические на бесконечности функции естественным образом возникают как решение дифференциальных уравнений. Получены критерии почти периодичности на бесконечности ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений вида $\dot{x}(t) = Ax(t) + z(t)$, $t \in \mathbb{J}$, где A — линейный оператор и z — интегрально убывающая на бесконечности функция, определённая на бесконечном промежутке $\mathbb{J}$, совпадающем с одним из множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$.

Ключевые слова: почти периодические на бесконечности функции, медленно меняющиеся на бесконечности функции, интегрально убывающие на бесконечности функции.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-402-418

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Теория почти периодических функций, созданная Г. Бором [1], получила существенное развитие в работах С. Бохнера (Bochner) [2], А. Безиковича (Besicovitch) [3], Ж. Фавара (Favard) [4], Б. М. Левитана, В. В. Степанова [5] и др. В частности, теория почти периодических функций дала толчок развитию гармонического анализа функций на группах [6].

Введем в рассмотрение основные функциональные пространства и сформулируем основные понятия, связанные с определением почти периодических на бесконечности функций. Пусть $\mathbb{J}$ совпадает с одним из множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$.

Пусть $C_b(\mathbb{J}, X)$ — банахово пространство непрерывных ограниченных функций, определенных на $\mathbb{J}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве X.

Пусть $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ — замкнутое подпространство равномерно непрерывных ограниченных функций. Через $C_0(\mathbb{J}, X)$ обозначим (замкнутое) подпространство функций $x \in C_b$, исчезающих на бесконечности, т. е. $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0$, $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$.

В пространстве $C_b(\mathbb{J}, X)$ рассмотрим операторы сдвига $S(t) : C_b(\mathbb{J}, X) \to C_b(\mathbb{J}, X)$, $(S(t)x)(\tau) = x(\tau + t)$, $\tau \in \mathbb{J}$, $t \in \mathbb{J}$, $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$.

Определение 1. Функцию $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ назовем *интегрально убывающей на бесконечности*, если
$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|x(t+s)\|\, ds = 0.$$

Множество таких функций будем обозначать символом $C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$.

Введенный класс является более широким по сравнению с классом почти периодических на бесконечности функций, введенным в работе А. Г. Баскакова [7; см. так же 8, 9].

Теорема 1. *$C_{0,int}$ — банахово пространство.*

Символом $\mathscr{C}_0$ будем обозначать одно из двух подпространств $C_0(\mathbb{J}, X)$ или $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$. Далее используется запись $\mathscr{C}_0 \in \{C_0(\mathbb{J}, X), C_{0,int}(\mathbb{J}, X)\}$.

Определение 2. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности* функцией относительно подпространства $\mathscr{C}_0$, если для каждого $\alpha \in \mathbb{J}$ выполнено $S(\alpha)x - x \in \mathscr{C}_0$.

Отметим что в работах [8, 9] давалось определение медленно меняющейся функции с использованием подпространства $C_0 = C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. Свойства медленно меняющихся функций относительно подпространства C_0 также были отмечены в работах [9–12]. Множество всех медленно меняющихся на бесконечности функций из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ относительно подпространства $C_{0,int}$ будем обозначать через $C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$, относительно подпространства C_0 — через $C_{sl}(\mathbb{J}, X)$. Символом $\mathscr{C}_{sl}$ будем обозначать одно из двух подпространств $C_{sl}(\mathbb{J}, X)$, $C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$. Отметим, что $C_{sl}(\mathbb{J}, X) \subset C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$. Непосредственно из определения следует, что $C_{sl}(\mathbb{J}, X)$ является замкнутым подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, инвариантным относительно сдвигов функций.

Определение 3. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{J}$ называется *ε-периодом* функции $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$, если $\sup\limits_{t\in\mathbb{J}} \|x(t+\omega) - x(t)\| < \varepsilon$. Множество ε-периодов обозначим через $\Omega(x, \varepsilon)$.

Определение 4. Подмножество Ω из $\mathbb{R}$ называется *относительно плотным на* $\mathbb{J}$, если существует такое $l > 0$, что $[t, t+l] \cap \Omega \neq \varnothing$ для любого $t \in \mathbb{J}$.

Определение 5 (классическое определение Бора). Функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathscr{C}_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество ее ε-периодов $\Omega(x, \varepsilon)$ относительно плотно на $\mathbb{R}$, т. е. существует такое $l > 0$, что $[t, t+l] \cap \Omega(x, \varepsilon) \neq \varnothing$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Символом $AP(\mathbb{R}, X)$ обозначим банахово пространство почти периодических функций.

Определение 6. Функция $x \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$ называется *почти периодической* функцией, если она является сужением некоторой функцией из $AP(\mathbb{R}, X)$.

Определение 7. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{J}$ называется *ε-периодом* функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ относительно подпространства $\mathscr{C}_0$, если существует функция $x_0 \in \mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$ такая, что $\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon$ Множество ε-периодов функции x обозначим через $\Omega_\infty(x, \varepsilon)$.

Определение 8. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathscr{C}_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x, \varepsilon)$ относительно плотно на $\mathbb{J}$.

Определение 9 (аппроксимационное). Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется почти периодической на бесконечности относительно подпространства $\mathscr{C}_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, функции $x_1, \dots, x_k \in C_{sl,int}$ и функцию $x_0 \in C_{0,int}$ такие, что

$$\sup_{t\in\mathbb{J}} \|x(t) - \sum_{k=1}^{n} x_k(t) e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon.$$

Множество почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $C_{0,int}$ обозначим символом $AP_{\infty,int}(\mathbb{J}, X)$. Имеет место включение $AP(\mathbb{J}, X) \subset AP_{\infty,int}(\mathbb{J}, X)$.

Одним из основных результатов статьи является следующая

Теорема 2. *Определения 8 и 9 эквивалентны.*

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}(t) = Ax + z(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad z \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X). \tag{1}$$

Предполагается, что множество $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_N\}$ состоит из простых собственных значений. Здесь символом $\sigma(A)$ обозначается спектр оператора A, и спектр оператора A обладает свойством $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_N\}$, где $i\lambda_1, \dots, i\lambda_N$ — простые собственные значения.

Теорема 3. *Каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ уравнения 1 является почти периодической на бесконечности функцией $x \in AP_{\infty,int}(\mathbb{J}, X)$, которая допускает представление вида*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k e^{i\lambda_k t}, t \in \mathbb{R},$$

где $x_k \in C_{sl,int}$.

Статья организована следующим образом: парагр. 1 содержит результаты об интегрально убывающих на бесконечности функциях. В парагр. 2 излагаются необходимые результаты из теории банаховых модулей, которые используются при доказательстве основных теорем. Парагр. 3 содержит доказательство теоремы 2. Парагр. 4 содержит сведения о медленно меняющихся функциях. И в заключительном парагр. 5 доказывается теорема 3.

Используемые результаты из гармонического анализа, функций и векторов содержатся в монографиях и статьях [1, 7–9, 13–15].

1. ИНТЕГРАЛЬНО УБЫВАЮЩИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ

В статье систематически используется понятие банахова модуля (банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля [7,8]) над алгеброй суммируемых на $\mathbb{R}$ комплексных функций с нормой

$$\|f\|_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|, f \in L^1(\mathbb{R})$$

и со сверткой в качестве умножения

$$(f * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)\,ds, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Все рассматриваемые банаховы $L^1(\mathbb{R})$-модули строятся с помощью изометрических представлений. Пусть $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ — сильно непрерывная группа изометрий из банаховой алгебры $\operatorname{End} \mathscr{X}$ линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве $\mathscr{X}$.

Формула

$$fx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)T(-s)x\,ds, \qquad x \in \mathscr{X},$$

определяет на $\mathscr{X}$ структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля. Таким образом, отображение $(f, x) \mapsto fx : L^1(\mathbb{R}) \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ является билинейным и имеют место равенства

$$f(gx) = (f * g)(x) = (g * f)x$$

для любых f, g из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и любого вектора $x \in \mathscr{X}$. При этом

$$\|fx\| = \left\|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)T(-s)x\,ds\right\| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|\|T(-s)x\|\,ds \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|\,ds\|x\| = \|f\|_1\|x\|$$

для любых f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathscr{X}$.

Непосредственно из определений следует, что подпространство $C_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$ содержится в $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$. Следующее утверждение непосредственно получается из определения подпространства $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$C_{0,int}(\mathbb{J}, X) = \left\{ x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X) : \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds = 0, \ N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$ и $N = [\alpha]$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α и $\{\alpha\}$ — его дробная часть. Поскольку $|\,\|a\| - \|b\|\,| \leqslant \|a - b\|$ для любых векторов a и b из X, получаем, что имеют место оценки:

$$\left|\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha \|x(t+s)\|\,ds - \frac{1}{N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{1}{N} \int\limits_0^N \|x(t+s)\|\, ds + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{N} \right) \int\limits_0^N \|x(t+s)\| ds + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha} \int\limits_N^{N+\{\alpha\}} \|x(t+s)\|\, ds - \frac{1}{N} \int\limits_0^N \|x(t+s)\| ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{\{\alpha\}}{\alpha N} \int\limits_0^N \|x(t+s)\|\, ds + \frac{1}{\alpha} \int\limits_N^{N+\{\alpha\}} \|x(t+s)\|\, ds - \frac{1}{N} \int\limits_0^N \|x(t+s)\| ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N^2} \int\limits_0^N \|x(t+s)\|\, ds + \frac{1}{N} \int\limits_N^{N+1} \|x(t+s)\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N} \left(\frac{1}{N} \int\limits_0^N \|x(t+s)\|\, ds + \|x\|_\infty \right) \leqslant \frac{1}{N} 2\|x\|_\infty \to \infty, \qquad \alpha \to \infty.$$

□

Пример 1. Построим четную функцию y из $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$, не принадлежащую $C_0(\mathbb{R}, X)$. Для ее построения возьмем произвольную последовательность положительных чисел, обладающих свойствами: 1) $t_{n+1} - t_n \geqslant 2$, $n \geqslant 2$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \infty$; и любую ограниченную последовательность (α_n) чисел из $\mathbb{R}$, не сходящуюся к нулю, причем $|\alpha_n| \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Функцию y из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ определим на $\mathbb{R}_+$ следующим образом:

1) $y(t_n) = \alpha_n$, $n \geqslant 2$;

2) $y(t_{n-1}) = y(t_{n+1}) = 0$, $n \geqslant 2$;

3) на промежутке $[t_n - 1; t_n + 1]$ функция y линейна и непрерывна;

4) $y = 0$ на $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (t_n - 1; t_n + 1)$.

Докажем, что построенная функция y (полагается, что $y(-t) = y(t)$, $t \geqslant 0$) принадлежит $C_{0,int}(\mathbb{R})$. Ясно, что она не принадлежит подпространству $C_0(\mathbb{R})$. Используя лемму 2, получаем, что для любого $t \geqslant 0$

$$\int\limits_0^N y(s+t) ds \leqslant \int\limits_t^{t+N} y(s) ds \leqslant k_N,$$

где k_N — число точек из последовательности (α_N), содержащихся на промежутке $[t, t+N]$. Из свойства 2) последовательности (t_n) следует, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{k_n}{N} = 0.$$

Ясно, что $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_t^{t+N} y(s) ds = 0$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, $y \in C_{0,int}(\mathbb{R})$.

В частности, приведенным условиям удовлетворяют следующие две последовательности: $t_n = n^2, n \geqslant 2$ и $\alpha_n = 1$.

Введем в рассмотрение функционал $p : \mathbb{C}_{b,u} \to \mathbb{R}_+$, заданный формулой

$$p(x) = \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|\, ds.$$

Замечание 1. Непосредственно из определения подпространства $C_{0,int}$ и определения функционала p следует, что $C_{0,int}$ совпадает с его ядром:

$$Ker\, p = \{x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X) : p(x) = 0\}.$$

Лемма 2. *Функционал* $p : C_{b,u} \to \mathbb{R}_+$ *является полунормой и удовлетворяет оценке* $p(x) \leqslant \|x\|, x \in C_{b,u}$.

Доказательство. Проверим аксиомы полунормы.

Очевидна неотрицательность функционала p, а также очевидно свойство однородности функционала p.

Докажем неравенство $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ для любых x, $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$

$$p(x+y) = \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|(x(s+t) + y(t+s))\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \left(\int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|\, ds + \| \int\limits_0^\alpha \|y(s+t)\|\, ds \right) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|\, ds + \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \| \int\limits_0^\alpha \|y(s+t)\|\, ds = p(x) + p(y).$$

4. Из оценок

$$p(x) = \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|\, ds \leqslant \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_0^\alpha \|x\| ds \leqslant \|x\|$$

следует, что $p(x) \leqslant \|x\|, x \in \mathbb{C}_{b,u}$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1 вытекает из следующей леммы.

Лемма 3. *Множество функций* $C_{0,int}$ *обладает следующими свойствами:*

1) является замкнутым линейным подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$*;*

2) инвариантно относительно сдвигов, т. е. $S(t)x \in C_{0,int}$ *для любой функции* $x \in C_{0,int}$ *и любого* $t \in \mathbb{J}$*;*

3) является банаховым $L^1(\mathbb{R})$*-модулем (см. [7, 8]), если* $\mathbb{J} = \mathbb{R}$.

Доказательство. 1. Докажем что множество функций $C_{0,int}$ является линейным подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Пусть x, y — любые две функции из $C_{0,int}$ и $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|(\beta x(s+t) + \gamma y(t+s))\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \left(\int\limits_0^\alpha \|\beta x(s+t)\|\, ds + \int\limits_0^\alpha \|\gamma y(t+s)\|\, ds \right) \leqslant$$

$$\leqslant |\beta| \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\| ds + |\gamma| \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|y(t+s)\|\, ds = 0.$$

Докажем замкнутость подпространства $C_{0,int}$. Пусть последовательность функций (x_n) из $C_{0,int}$ сходится к x_0 из $\mathbb{C}_{b,u}(\mathbb{J},X)$, т. е. $\|x_n - x_0\|_\infty = 0$.

Поскольку $p(x_0) = p(x_n + x_0 - x_n) \leqslant p(x_n) + p(x_0 - x_n) = 0 + \|x_0 - x_n\|_\infty \to 0$, то $p(x_0) = 0$, т. е. $x_0 \in C_{0,int}$, согласно замечанию 1.

2. Докажем, что множество функций $C_{0,int}$ инвариантно относительно сдвигов. Для любого $\tau \in \mathbb{J}$ рассмотрим сдвиг $S(\tau)x$ функции $x \in C_{0,int}$ и тогда

$$p(S(\tau)x) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \left\| \int\limits_0^\alpha x(t+s+\tau)\, ds \right\| \leqslant p(x) = 0.$$

3. Докажем что множество функций $C_{0,int}$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем. Поскольку функция $x \in C_{0,int}(\mathbb{R},X)$ равномерно непрерывна, то и равномерно непрерывна функция $\tau \mapsto S(-\tau)x : \mathbb{R} \to C_{0,int}(\mathbb{R},X)$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\alpha_1,\dots,\alpha_2 \in \mathbb{C}$ и $\tau_1,\dots,\tau_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)S(-\tau)x\, d\tau - \sum_{i=1}^n \alpha_i S(-\tau_i)x \right\| < \varepsilon.$$

Тогда имеет место оценка

$$p(f*x) = p\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)S(-\tau)x\, d\tau - \sum_{i=1}^n \alpha_i S(-\tau_i)x + \sum_{i=1}^n \alpha_i S(-\tau_i)x \right) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + p(\sum_{i=1}^n \alpha_i S(-\tau_i)x) \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^n \alpha_i p(S(-\tau_i)x) = \varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности ε получаем, что $p(f*x) = 0$, т. е. $f*x \in C_{0,int}(\mathbb{R},X)$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Если $y \in C_{0,int}(\mathbb{R},X)$, то для любого числа $t \in \mathbb{R}$ функция $z(s) = \int\limits_s^{s+t} y(\tau)\, d\tau$, $s \in \mathbb{R}$, также принадлежит $C_{0,int}$.*

Доказательство. Представим функцию z в виде $z = f*y$, где $f = \chi_{[-1,0]}$, тогда

$$z(t) = (\chi_{[-t,0]} * y)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-t,0]}(t-\tau)y(\tau)\, d\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-t,0]}(s)y(s-\tau)\, d\tau =$$
$$= \int\limits_t^0 y(s-\tau)d\tau = \int\limits_s^{s+t} y(u)\, du.$$

Тогда из свойства 3) леммы 3 следует, что функция $z \in C_{0,int}$. Лемма доказана. □

Приведем пример медленно меняющейся функции из пространства $C_{sl,int}(\mathbb{R})$ (см. определение 2).

Пример 2. Построение функции будет осуществляться по последовательности (см. пример 1) $t_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, и последовательности

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ — четное,} \\ -1, & \text{если } n \text{ — нечетное, } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Определим функцию $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ формулой

$$z = \int\limits_0^s y(\tau)\, d\tau, \qquad s \in \mathbb{R},$$

где $y \in C_{0,int}(\mathbb{R})$ — функция из примера 1, построенная по рассматриваемым последовательностям (α_n) и (t_n) Проверим, что она принадлежит пространству $C_{sl,int}$. Из равенств

$$z(s+t) - z(s) = \int\limits_0^{s+t} y(\tau) d\tau - \int\limits_0^{s} y(\tau) d\tau = \int\limits_s^{s+t} y(\tau) d\tau, \qquad s \in \mathbb{R},$$

и свойства 3) леммы 3 следует, что функция $S(t)z - z$ принадлежит $C_{0,int}$, т. е. $z \in C_{sl,int}(\mathbb{R})$.

2. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ ИЗ БАНАХОВА $L^1(\mathbb{R})$-МОДУЛЯ

В этом параграфе приводятся некоторые известные результаты о почти периодических векторах (см. [7, 15]), которые существенно используются при построении теории почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$.

Пусть $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ — сильно непрерывное изометрическое представление, где $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство. Далее $\mathscr{X}$ рассматривается в качестве $L^1(\mathbb{R})$-модуля (см. парагр. 2).

Определение 10. Пусть $\varepsilon > 0$. Число ω из $\mathbb{R}$ называется ε-периодом вектора x из $\mathscr{X}$, если $\|T(\omega)x - x\| < \varepsilon$. Множество ε-периодов обозначим через $\Omega(\varepsilon, x)$.

Определение 11. Ненулевой вектор x_0 из $\mathscr{X}$ называется собственным вектором представления $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$, если существует вещественное число λ_0 такое, что $T(t)x_0 = e^{i\lambda_0 t}x_0, t \in \mathbb{R}$.

Определение 12. Вектор x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathscr{X}, T)$ называется *почти периодическим вектором*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) если для любого $\varepsilon > 0$ множество ε-периодов $\Omega(\varepsilon, x)$ вектора x относительно плотно на R;

2) множество $\{T(t)x, t \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в $\mathscr{X}$;

3) если для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют собственные векторы $x_1, \ldots, x_N$ представления T такие, что $\left\| x - \sum\limits_{k=1}^{N} x_k \right\| < \varepsilon$.

Замечание 2. Пусть $\mathscr{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и $T = S$ — группа сдвигов функции из $\mathscr{X}$. Функция $x_0 \in \mathscr{X}$ является собственной функцией представления $T = S$ тогда и только тогда, когда она представлена в виде $x_0(t) = y_0 e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$, где y_0 — некоторый вектор из X.

Замечание 3. Свойство 1) из определения 8 эквивалентно определению Бора (см. определение 7, свойство 2), эквивалентно определению Бохнера и, наконец, свойство 3) переписывается в виде

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t) - \sum_{k=1}^{N} x_k^0 e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon,$$

где x_k^0, $k = \overline{1, N}$ — векторы из X, что эквивалентно аппроксимационному определению (см. определение 9).

Лемма 5. *Если x_0 — собственный вектор, то x_0 является почти периодическим вектором.*

Доказательство. Так как x_0 — собственный вектор, то $T(t)x_0 = e^{i\lambda_0 t}x_0$, $t \in \mathbb{R}$. Используя критерий Бохнера, рассмотрим произвольную последовательность (t_n) из $\mathbb{R}$. Имеем

$$T(t_n)x_0 = e^{i\lambda_0 t_n}x_0, \qquad n \geqslant 1,$$

где $(e^{i\lambda_0 t_n})$ — последовательность находится в единичном круге $\mathbb{T}$. Тогда из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $(e^{i\lambda_0 t_{n_k}})$, следовательно, последовательность векторов $x_k = e^{i\lambda_0 t_{n_k}}x_0$ является сходящейся. Таким образом, x — почти периодический вектор. □

Замечание 4. Непосредственно из определений почти периодических векторов следует, что вектор $x \in \mathscr{X}$ является почти периодическим тогда и только тогда, когда функция $t \mapsto T(t)x : \mathbb{R} \to \mathscr{X}$ является непрерывной почти периодической функцией Бора.

Доказательство. Для произвольной последовательности чисел (t_n) из $\mathbb{R}$ рассмотрим последовательностей функций $\varphi_x(t + t_n)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$. Поскольку $\varphi_x(t + t_n) = T(t + t_n)x = T(t)T(t_n)x$, где $\{T(t_n)x,\ n \geqslant 1\}$ — предкомпактное множество, тогда множество $S(t_n)\varphi_x$, $n \geqslant 1$, — предкомпактно в $C_b(\mathbb{R}, X)$. □

Лемма 6. *Линейная комбинация собственных векторов представления T является почти периодическим вектором.*

Доказательство. Пусть $x = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k x_k$, где x_k, $k = 1 \ldots, N$, — собственные векторы и $c_k \in \mathbf{C}$, $k = 1 \ldots, N$, тогда $T(t)x = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k x_k e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$. Данная функция является почти периодической и поэтому x — почти периодический вектор в силу замечания 4. □

Подмодуль почти периодических векторов из $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) обозначим через $AP\mathscr{X}$. Если $\mathscr{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и $T = S$, то $AP\mathscr{X} = APC_{b,u}(\mathbb{R}, X)$.

Из сделанных замечаний и лемм следует

Теорема 4. *Все три условия (из определения 12) почти периодичности векторов из $\mathscr{X}$ эквивалентны.*

3. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ

Рассмотрим банахово пространство $C_{b,u}(\mathbb{J},X)$ и его подпространство $C_{0,int}(\mathbb{J},X)$. Пусть $\mathscr{X} = C_{b,u}(\mathbb{J},X)\backslash C_{0,int}(\mathbb{J},X)$. Обозначим через $\widetilde{x_0} = x_0 + C_{0,int}$ класс эквивалентности из $\mathscr{X}$, содержащий вектор x_0. Классы эквивалентности являются элементами векторного пространства $\mathscr{X}$ (называемого *фактор-пространством* пространства $C_{b,u}$ по подпространству $C_{0,int}$).

Фактор-пространство $\mathscr{X} = C_{b,u}(\mathbb{J},X)/C_{0,int}(\mathbb{J},X)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|\widetilde{x_0}\| = \inf_{y\in\widetilde{x_0}}\|y\| = \inf_{z\in C_{0,int}}\|x_0+z\|,$$

в нем действует изометрическая группа сдвигов

$$\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x}, t \geqslant 0.$$

При $t<0$ положим

$$\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)y} = S(t)y + C_{0,int},$$

где

$$y(s) = \begin{cases} x(s), & s\geqslant 0,\\ \frac{sx(0)}{a} - x(0), & -a\leqslant s\leqslant 0,\\ 0, & s<-a,\end{cases} \tag{2}$$

здесь $a>0$.

Лемма 7. *Представление $\widetilde{S}:\mathbb{R}\to \operatorname{End}\mathscr{X}$ сильно непрерывно и изометрично*

$$\|\widetilde{S}(t)\widetilde{x}\| = \|\widetilde{x}\|, \qquad x\in C_{b,u}(\mathbb{J},X), \qquad t\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Доказательство. Докажем равенство (3) при $\mathbb{J}=\mathbb{R}_+$ (при $\mathbb{J}=\mathbb{R}$ утверждение очевидно). Так как функция y, определенная равенством выше, равномерно непрерывна, то функция $t\mapsto \widetilde{S(t)x}:\mathbb{R}\to\mathscr{X}$ также непрерывна. Так как

$$y(s+t) = \begin{cases} x(s+t), & s\geqslant -t,\\ \frac{(s+t)x(0)}{a} - x(0), & -a-t\leqslant s\leqslant -t,\\ 0, & s<-t.\end{cases}$$

то

$$y(s+t)-y(s) = \begin{cases} x(s+t)-x(s), & t\geqslant 0,\\ \frac{(s+t)x(s)}{a} - \frac{sx(s)}{a}, & -a\leqslant t\leqslant 0,\\ 0, & t<-a.\end{cases}$$

Следовательно, функция $t\mapsto \widetilde{S(t)x}:\mathbb{R}\to X$ непрерывна.

Представление $\widetilde{S}:\mathbb{R}\to\operatorname{End}\mathscr{X}$ изометрично, так как

$$\|\widetilde{S}(t)\widetilde{x}\| = \inf_{v_0\in C_{0,int}}\sup_{s\in\mathbb{R}}\|y(s+t)-v_0(s)\| = \inf_{v_0\in C_{0,int}}\sup_{s\in\mathbb{R}}\|y(s)-v_0(s)\| = \|\widetilde{x}\|.$$

Лемма доказана. □

По представлению $\widetilde{S}$ наделим фактор-пространство $\mathscr{X}$ структурой банахова модуля:

$$f\widetilde{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\widetilde{S}(-t)\widetilde{x}\,dt, \qquad f\in L^1(\mathbb{R}), \qquad x\in\mathscr{X}.$$

Определение 13. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется почти периодической на бесконечности, если класс эквивалентности $\widetilde{x} \in \mathscr{X}$ является почти периодическим вектором из $AP\mathscr{X}$.

Лемма 8. *$\widetilde{S}(t)\widetilde{x}$ — предкомпактное множество в $\mathscr{X} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$.*

Доказательство теоремы 2. Утверждение теоремы будет вытекать из следующих двух лемм.

Лемма 9. *Функция $x \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$ принадлежит пространству $AP_{\infty,int}(\mathbb{R}_+, X)$ тогда и только тогда, когда $y \in AP_{\infty,int}(\mathbb{R}_+, X)$, для любой функции $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)$ вида* (2).

Доказательство. Заметим, что непосредственно из определения ε-периода на бесконечности следует, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\Omega_\infty(y, \varepsilon) = \Omega_\infty(x, \varepsilon) \cup (-\Omega_\infty(x, \varepsilon)), \tag{4}$$

$$y(t+\omega) - y(t) = \begin{cases} x(t+\omega) - x(t), & t \geqslant 0, \\ \varphi(t), & -a \leqslant t \leqslant 0, \\ 0, & t < -a, \end{cases}$$

и

$$y(t+(-\omega)) - y(t) = \begin{cases} x(t+\omega) - x(t), & t \geqslant 0, \\ \varphi(t) - a, & -a \leqslant t \leqslant 0, \\ 0, & t < -a, \end{cases}$$

где $a > 0$, $\omega > 0$ и $\varphi(t)$ — некоторая непрерывная функция, определенная согласно представлению (2). Из указанных представлений вытекает доказываемое равенство (4). □

Лемма 10. *Пусть $\varepsilon > 0$. Для любой функции $x \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$ множество ε-периодов $\Omega(\varepsilon, \widetilde{x})$, отвечающих ее классу эквивалентности $\widetilde{x} \in C_b/C_{0,int}$, совпадает с множеством $\Omega\infty(x, \varepsilon) \cup (-\Omega\infty(x, \varepsilon))$*

Доказательство. Пусть y — функция вида (2). Тогда имеет место равенство (4). Отметим, что $\Omega_\infty(y, \varepsilon) = \Omega(\widetilde{y}, \varepsilon) = \Omega(\widetilde{x}, \varepsilon)$, где $\widetilde{y} \in \mathscr{X}$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 2 следует из следующей теоремы.

Теорема 5. *Определения 8, 9 и 13 эквивалентны.*

Доказательство. Эквивалентность определений 8 и 13 следует из двух последних лемм. Эквивалентность определений 9 и 13 следует из эквивалентности условий 1) и 3) определения 12, если положить $T = \widetilde{S}$.

Отметим, что если $\widetilde{x} \in \mathscr{X}$, содержащий функцию $x \in AP_\infty(\mathbb{J}, X)$, то из условия 3) определения 12 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $y_k \in AP_\infty(\mathbb{J}, X)$, $1 \leqslant k \leqslant N$, и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, такие что $\left\| \widetilde{x} - \sum\limits_{k=1}^{N} \widetilde{y}_k \right\| < \varepsilon$. Причем $\widetilde{S}(t)\widetilde{y}_k = e^{i\lambda_k t}\widetilde{y}_k$, $1 \leqslant k \leqslant N$. Следовательно, функции $x_k(t) = y_k(t)e^{-i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant N$ обладают свойством $\widetilde{S}(t)x_k = x_k$, $t \in \mathbb{R}$. Поэтому $x_k \in C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$, $1 \leqslant k \leqslant N$ и $x_0 = x - \sum\limits_{k=1}^{N} x_k \in C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$. Теорема доказана. □

Свойства почти периодических функций относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ были рассмотрены в работах [10–12].

4. СВОЙСТВА МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе используются ранее введенные пространства. Рассмотрим пространство $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, подпространство $C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$ и фактор-пространство $\mathscr{X} = C_{b,u}/C_{0,int}$. Напомним, что символом $C_{sl,int}$ обозначаем пространство медленно меняющихся на бесконечности функций относительно подпространства $C_{0,int}$.

Пример 3. Построим функцию y из $C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$, но не принадлежащую пространству $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Для ее построения возьмем произвольную последовательность (t_n) положительных чисел, обладающих следующими свойствами:

1) $t_{n+1} - t_n \geqslant 2, n \geqslant 2$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \infty$;

и любую последовательность (t'_n) чисел из $\mathbb{R}$ такую, что:

1) $t_n < t'_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

2) $t'_n < t_n + 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (t'_n - t_n) = \infty$.

Функцию y из $C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ определим на $\mathbb{R}_+$ следующим образом:

1) на промежутке $[t_n; t'_n]$ функция $y = 1$, $n \geqslant 0$;

2) на промежутке $(t'_n; t_n + 1)$ и $(t'_n + 1; t_n + 2)$ функция линейна и непрерывна;

3) на промежутке $[t_n + 1; t'_n + 1]$ функция $y = -1$.

Докажем, что построенная функция y (полагается, что $y(-t) = y(t)$, $t \geqslant 0$) принадлежит $C_{sl,int}$.

Определим функцию $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ формулой

$$z = \int_0^s y(\tau) d\tau.$$

Проверим, что она принадлежит пространству $C_{sl,int}$. Из равенств

$$z(s+t) - z(s) = \int_0^{s+t} y(\tau)\, d\tau - \int_0^s y(\tau) d\tau = \int_s^{s+t} y(\tau)\, d\tau, \qquad s \in \mathbb{R},$$

и свойства 3) леммы 5 следует, что функция $S(t)z - z$ принадлежит $C_{0,int}$, т. е. $z \in C_{sl,int}(\mathbb{R})$.

Замечание 5. Непосредственно из определения медленно меняющейся на бесконечности функции относительно подпространства $C_{0,int}$ следует, что любое число $\omega \in \mathbb{J}$ является ее ε-периодом.

Лемма 11. $C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ — *замкнутое линейное подпространство из* $C_b(\mathbb{R}, X)$, *инвариантное относительно операторов сдвига* $S(t) : C_{b,u}(\mathbb{R}, X) \to C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 12. *Пространство* $C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$ — *банахово пространство.*

Доказательство. Возьмем последовательность функций (x_n) из $C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$, сходящуюся в $C_{b,u}$ к x_0. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} (S(\alpha)x_n - x_n) = S(\alpha)x_0 - x_0.$$

Так как $S(\alpha)x_n - x_n \in C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$ и $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$ — замкнутое подпространство, то $S(\alpha)x_0 - x_0 \in C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$. Следовательно, $x_0 \in C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$. □

Лемма 13. *Пространство медленно меняющихся функций $C_{sl,int}(\mathbb{R}_+, X)$ несепарабельно.*

Доказательство. Рассмотрим семейство функций $\{x_\alpha, \alpha \geqslant 0\}$ из $C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$ вида

$$x_\alpha(t) = e^{i\alpha \ln(1+t)}, \qquad \alpha \geqslant 0, \qquad t \geqslant 0.$$

Покажем, что $\{x_\alpha, \alpha \geqslant 0\} \subset C_{sl}(\mathbb{R}_+) \subset C_{sl,int}(\mathbb{R}_+)$. Для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ имеют место равенства:

$$\sup_{t \geqslant 0} \|x_\alpha - x_\beta\| = \sup_{t \geqslant 0} \|e^{i\alpha \ln(1+t)} - e^{i\beta \ln(1+t)}\| = \sup_{t \geqslant 0} \|e^{i \ln(1+t)\frac{\alpha}{\beta}} - 1| = \sqrt{2},$$

$\alpha \neq \beta$, α, $\beta \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, в пространстве $C_{sl,int}(\mathbb{R}_+)$ содержится семейство функций $\{x_\alpha,\ \alpha \geqslant 0\}$, состоящее из континуума линейно независимых функций, расстояние между которыми не меньше 2. Это значит, что пространство $C_{sl,int}(\mathbb{R}_+)$ несепарабельно. □

Лемма 14. *Пространство $C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем, структура которого определяется формулой свертки:*

$$(f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)x(s)\, ds, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}), \qquad x \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X).$$

Доказательство. Покажем корректность определения свертки, т. е. докажем включение $f * x \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$. Из представления $(f*x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t-s)x(s)ds, f \in L^1(\mathbb{R}), x \in C_{sl}(\mathbb{R})$, непрерывности отображения $\tau \mapsto S(-\tau)x : \mathbb{R} \to C_{b,u}(\mathbb{R})$ и определения интеграла следует, что функция $f * x$ является пределом в $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ линейных комбинаций сдвигов функции x. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и любой функции $x_0 \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ функция y_0, определяемая равенствами $y_0 = S(\alpha)f * x_0 - f * x_0 = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)S(-\tau)(S(\alpha)x_0 - x_0)d\tau = (f * (S(\alpha)x_0 - x_0))(t)$, есть предел в $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ линейных комбинаций сдвигов функции $S(\alpha)x_0 - x_0$, принадлежащей $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. В силу замкнутости подпространства $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$ функция y_0 принадлежит $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. □

5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим разностное уравнение:

$$x(t+1) = Bx(t) + y(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

где $y \in C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$, $B \in \operatorname{End} \mathscr{X}$ имеет вид $B = e^A$. Тогда $\sigma_0 = \sigma(B) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \gamma_2 \ldots, \gamma_m\}$, где $\gamma_k = e^{i\lambda_k}$, $1 \leqslant k \leqslant N$, и $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Любое решение уравнения (1) удовлетворяет равенству [16]

$$x(t) = e^{A(t-s)}x(s) + \int\limits_s^t e^{A(t-\tau)}z(\tau)d\tau, \qquad s \leqslant t, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$x(t+1) = e^A x(t) + \int\limits_t^{t+1} e^{A(t+1-\tau)} z(\tau) d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, ограниченное решение уравнения (5) будет совпадать с решением уравнения (1), где $B = e^A$, $z \in C_{0,int}$ и $y(t) = \int\limits_t^{t+1} e^{A(t+1-\tau)} z(\tau) d\tau$.

Спектр оператора $B \in \operatorname{End} \mathscr{X}$ представим в виде

$$\sigma(B) = \sigma_0 \cup \sigma_{in} \cup \sigma_{out}, \tag{6}$$

где $\sigma_{in} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| < 1\}$ — совокупность собственных значений, лежащих внутри окружности, $\sigma_{out} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| > 1\}$ — совокупность собственных значений, лежащих вне окружности. В соответствии с этим разбиением спектра рассмотрим проекторы $\mathscr{P}_0$, $\mathscr{P}_{in}$, $\mathscr{P}_{out}$, которые соответственно построены по спектральным множествам σ_0, σ_{in}, σ_{out}. Таким образом, $I = \mathscr{P}_0 + \mathscr{P}_{in} + \mathscr{P}_{out}$. Эти проекторы индуцируют разложение $X = X_0 \oplus X_{in} \oplus X_{out}$ пространства X, где $X_0 = \operatorname{Im} \mathscr{P}_0$, $X_{in} = \operatorname{Im} \mathscr{P}_{in}$, $X_{out} = \operatorname{Im} \mathscr{P}_{out}$. Эти подпространства являются инвариантными для оператора B. Обозначим $B_0 = B|X_0$, $B_{in} = B|X_{in}$, $B_{out} = B|X_{out}$. Таким образом, $B = B_0 \oplus B_{in} \oplus B_{out}$ относительно построенного разложения пространства X. Применяя проектор $\mathscr{P}_{in}$ к обеим частям уравнения (5), получим функцию $x_{in} = \mathscr{P}_{in} x$, удовлетворяющую равенству

$$S(1)x_{in}(t) = B_{in}x_{in}(t) + y_{in}(t), y_{in} = \mathscr{P}_{in} y \in C_{0,int}, t \in \mathbb{J}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что

$$(I - B_{in}S(-1))x_{in} = S(-1)y_{in}. \tag{8}$$

Поскольку $\|S(-1)\| = 1$, $B_{in}S(-1)x_{in}(t) = S(-1)B_{in}x_{in}(t)$, $t \in \mathbb{J}$, и спектральный радиус $r(B_{in})$ оператора B_{in} меньше единицы, то оператор $I - B_{in}S(-1)$ обратим и из (8) следует, что $x_{in} = (I - B_{in}S(-1))^{-1}S(-1)y_{in} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B_{in}^k S(-k-1) y_{in}$. Ясно, что $x_{in} \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. Аналогичный результат получим при применении проектора $\mathscr{P}_{out}$ к уравнению (5):

$$(S(1)x_{out})(t) = B_{out}x_{out}(t) + y_{out}(t), \qquad y_{out} = \mathscr{P}_{out} y \in C_{0,int}. \tag{9}$$

Оператор B_{out} обратим и $\sigma(B_{out}^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma_{out}\right\}$, т. е. его спектральный радиус меньше единицы. Используя перестановочность оператора S_N с B_{out} из (9), получим равенства

$$S(1)B_{out}^{-1}x_{out}(t) = x_{out}(t) + B_{out}^{-1}y_{out}(t), \qquad t \in \mathbb{J},$$

или

$$(I - S(1)B_{out}^{-1})x_{out}(t) = -B_{out}^{-1}y_{out}(t), \qquad t \in \mathbb{J}.$$

Таким образом,

$$x_{out} = -(I - S(1)B_{out}^{-1})^{-1}B_{out}^{-1}y_{out} = -\sum_{k=0}^{\infty}(B_{out}^{-1}S(1))^k B_{out}^{-1}y_{out}, \qquad y_{out} \in C_{0,int}.$$

Из этой формулы следует, что $x_{out} \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$.

Проектор P_0 можно представить в виде $P_0 = P_1 + \ldots + P_N$, где $P_k \in \operatorname{End} X_0$ — проектор, и $AP_k = \gamma_k P_k$, где $|\gamma_k| = 1$, $1 \leqslant k \leqslant N$.

Применим проектор P_0 к разностному уравнению (5) и далее применим проектор P_k, получим

$$P_k x_0(t+1) = P_k B_0 x_0(t) + P_k y_0(t), \qquad t \in \mathbb{J}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant N,$$

где $x_0(t) = P_0 x(t)$, $x_k(t) = P_k x_0(t)$ и $y_0(t) = P_0 y(t)$, где $t \in \mathbb{J}$. Пусть $y_k(t) = P_k y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, т. е. $y_k \in C_{0,int}$, и поэтому $\widetilde{y}_k = 0$. Тогда, сделав замену $x_k(t) = e^{-i\lambda_k t} x_k(t)$, $t \in \mathbb{J}$, $0 \leqslant \lambda_k <$, получим $\widetilde{x}_k(t+1) = \widetilde{x}_k(t) + \widetilde{y}_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{x}_k$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, а x_k отличается от $\widetilde{x}_k$ на множитель $e^{i\lambda_k t} = y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, т. е. $x_0 \in AP_{\infty,int}(\mathbb{R}, X)$. В итоге получаем, что функция X представима в виде $x = x_0 + x_{in} + x_{out}$. Следовательно, $x \in AP_{\infty,int}(\mathbb{R}, X)$.

Библиографический список

1. *Бор Г.* Почти периодические функии. М. : ОГИЗ, 1934. 126 с.
2. *Bochner S.* Uber gewisse Differential und algemeinere Gleichungen deren Losungen fastperiodisch sin // Math. Ann. 1930. Vol. 103. P. 588–597.
3. *Besicovitch A. S.* On generalist almost periodic functions // Proc. London Math. Soc. 1926. Vol. 25. P. 495–512.
4. *Favard J.* On the convergence of the Sturm – Liouville Series //Ann. Math. 1923. Vol. 24, № 2. P. 109–120.
5. *Левитан Б. М., Степанов В. В.* О почти периодических функциях, принадлежащих в собственном смысле классу W // Докл. АН СССР. 1939. Т. 22. С. 229–232.
6. *Штерн А. И.* Почти периодические функции и представления в локально выпуклых пространствах // УМН. 2005. Т. 60, вып. 3. С. 97–168. DOI: 10.1070/RM2005v060n03 ABEH000849.
7. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Функциональный анализ, СМФН. М. : МАИ, 2004. Т. 9, С. 3–151. DOI: 10.1007/s10958-006-0286-4.
8. *Баскаков А. Г., Калужина Н. С.* Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 643–661. DOI: 10.1134/S0001434612110016.
9. *Баскаков А. Г., Калужина Н. С., Поляков Д. М.* Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов // Изв. вузов. Матем. 2014. Т. 7. С. 3–14. DOI: 10.3103/S106 6369X14070019.
10. *Рыжкова А. А., Тришина И. А.* О периодических на бесконечности функциях // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2014. Т. 36, вып. 19(190). С. 71–75.
11. *Тришина И. А.* Алгебраические свойства почти периодических на бесконечности функций // Вестн. факультета прикладной математики, информатики и механики. 2016. Т. 12. С. 223–227.
12. *Рыжкова А. А., Тришина И. А.* О почти периодических на бесконечности решениях разностных уравнений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 45–49. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-45-49.
13. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М. : Изд-во МГУ, 1978. 205 с.
14. *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 3. С. 3–54. DOI: 10.1070/IM2005v069n03ABEH000535.

15. *Баскаков А. Г.* Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 174–190. DOI: 10.1134/S0001434615010198.
16. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука, 1970. 534 с.

Образец для цитирования:
Тришина И. А. Почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 402–418. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-402-418.

Almost Periodic at Infinity Functions Relative to the Subspace of Functions Integrally Decrease at Infinity

I. A. Trishina

Irina A. Trishina, orcid.org/0000-0001-6521-9570, Voronezh State University, 1, Universitetskaya Pl., Voronezh, Russia, 394036, i.a.trishina@gmail.com

In the paper we introduce and study a new class of almost periodic at infinity functions, which is defined by means of a subspace of integrally decreasing at infinity functions. It is wider than the class of almost periodic at infinity functions introduced in the papers of A. G. Baskakov (with respect to the subspace of functions vanishing at infinity). It suffices to turn to the approximation theory for a new class of functions, where the Fourier coefficients are slowly varying at infinity functions with respect to the subspace of functions that decrease integrally at infinity. Three equivalent definitions of functions almost periodic at infinity with respect to integrally decreasing functions at infinity are formulated. For their investigation, the theory of Banach modules over the algebra $L^1(\mathbb{R})$ of summable functions is applied. Almost periodic functions at infinity appear naturally as a solution of differential equations. Criteria for the almost periodicity at infinity of bounded solutions of ordinary differential equations of the form $\dot{x}(t) = Ax(t) + z(t)$, $t \in \mathbb{J}$ are formulated, where A is a linear operator and z is an integrally decreasing function at infinity, defined on infinite interval $\mathbb{J}$ that coincides with one of the sets $\mathbb{R}$ or $\mathbb{R}_+$.

Key words: almost periodic at infinity functions, slowly varying at infinity functions, integral decreasing at infinity functions.

References

1. Bor G. *Pochti periodicheskie funkcii* [Almost periodic functions]. Moscow, OGIZ, 1934. 126 p. (in Russian).
2. Bochner S. Uber gewisse Differential und algemeinere Gleichungen deren Losungen fast-periodisch sin. *Math. Ann.*, 1930, vol. 103, pp. 588–597.
3. Besicovitch A. S. On generalist almost periodic functions. *Proc. London Math. Soc.*, 1926, vol. 25, pp. 495–512.
4. Favard J. On the convergence of the Sturm – Liouville Series. *Ann. Math.*, 1923, vol. 24, no. 2, pp. 109–120.
5. Levitan B. M., Stepanov V. V. O pochti periodicheskih funkciyah, prinadlezhashchih v sobstvennom smysle klassu W [On almost periodic functions belonging in the proper sense to the class W]. *Dokl. AN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1939, vol. 22, pp. 229–232 (in Russian).

6. Shtern A. I. Almost periodic functions and representations in locally convex spaces. *Russian Math. Surveys*, 2005, vol. 60, iss. 3, pp. 489–557. DOI: 10.1070/RM2005v060n03 ABEH000849.
7. Baskakov A. G. Representation theory for Banach algebras, Abelian groups, and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 137, no. 4, pp. 4885–5036. DOI: 10.1007/s10958-006-0286-4.
8. Baskakov A. G., Kaluzhina N. S. Beurling's theorem for functions with essential spectrum from homogeneous spaces and stabilization of solutions of parabolic equations. *Math. Notes*, 2012, vol. 92 no. 5, pp. 587–605. DOI: 10.1134/S0001434612110016.
9. Baskakov A. G., Kaluzhina N. S., Polyakov D. M. Slowly varying at infinity operator semigroups. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014, vol. 58, no. 7, pp. 1–10. DOI: 10.3103/S1066369X14070019.
10. Ryzhkova A. A., Trishina I. A. About periodic functions at infinity. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*, 2014, vol. 36, iss. 19(190), pp. 71–75 (in Russian).
11. Trishina I. A. Algebraicheskie svojstva pochti periodicheskih na beskonechnosti funkcij [Algebraic properties of almost periodic functions at infinity]. *Vestnik fakul'teta prikladnoj matematiki, informatiki i mekhaniki* [Vestnik of the Department of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics], 2016, no. 12, pp. 223–227 (in Russian).
12. Ryzhkova A. A., Trishina I. A. Almost periodic at infinity solutions of difference equations. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 1, pp. 45–49 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-45-49.
13. Levitan B. M., Zhikov V. V. *Pochti-periodicheskie funkcii i differencial'nye uravneniya* [Almost-periodic functions and differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1978. 205 p. (in Russian).
14. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 439–486. DOI: 10.1070/IM2005v069n03ABEH000535.
15. Baskakov A. G. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 164–178. DOI: 10.1134/S0001434615010198.
16. Daleckij U. L., Krejn M. G. *Ustojchivost reshenij differencialnyx uravnenij v banakhovom prostranstve* [Stability of solutions of differential equations in a Banach space]. Moscow, Nauka, 1970. 534 p. (in Russian).

Cite this article as:

Trishina I. A. Almost Periodic at Infinity Functions Relative to the Subspace of Functions Integrally Decrease at Infinity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 402–418 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-402-418.