Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 4

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004

Научный журнал
2017 Том 17
ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)
Издается с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (группы научных специальностей: 01.01.00 – математика; 01.02.00 – механика; 05.13.00 – информатика, вычислительная техника и управление).
Журнал входит в международные базы данных MathSciNet, zbMATH

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов».
Журнал выходит 4 раза в год

Директор издательства
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Крылова Елена Борисовна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Кочкаева Инна Анатольевна

Верстка
Степанова Наталия Ивановна

Технический редактор
Каргин Игорь Анатольевич

Корректор
Кочкаева Инна Анатольевна

Адрес учредителя, издателя и издательства:
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89
E-mail: izvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 28.11.17.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 13,95(15,0).
Тираж 500 экз. Заказ 164-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.
Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу http://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov. Статьи бóльшего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования в журнале. В случае положительного решения об опубликовании статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: http://mmi.sgu.ru.

Адрес редколлегии серии:
410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: http://mmi.sgu.ru/

Ответственный секретарь серии:
Виктория Анатольевна Халова

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

Mechanics

Computer Sciences

Appendices

Personalia

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

АППРОКСИМАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

И. В. Гребенникова, А. Г. Кремлёв

Гребенникова Ирина Владимировна, старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, Екатеринбург, Мира, 19, giv001@mail.ru

Кремлёв Александр Гурьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования управляемых систем, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, Екатеринбург, Мира, 19, kremlev001@mail.ru

Целью работы является разработка и теоретическое обоснование аналитических приближенных или асимптотических методов решения задач оптимального управления для сингулярно возмущенных систем с постоянным запаздыванием по фазовым переменным в условиях неопределенности по начальным данным. Для достижения поставленной цели в работе рассмотрена задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием по быстрым и медленным переменным при неопределенных начальных условиях и интегральных квадратичных ограничениях на ресурсы управления. Сформулирована и решена предельная задача управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием, для которой специальным образом выбирается функционал качества. В основе предложенного метода лежат идеи выделения асимптотики ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы с запаздыванием и представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных переменных, в виде равномерно сходящейся последовательности. Предложена процедура построения начального приближения управляющего воздействия в минимаксной задаче управления. В работе используются постановки задач, понятия, методы и результаты теории управления в условиях неопределенности, а также методы теории экстремальных задач, асимптотические методы анализа, классические методы выпуклого и вещественного анализа.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием, оптимальное управление, фундаментальная матрица.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-368-380

ВВЕДЕНИЕ

Проблемам оптимального управления сингулярно возмущенными системами в последние годы посвящено много работ, в которых предлагаются различные приближенные аналитические методы построения субоптимальных режимов управления (см., например, [1–7]). В основном рассматривались задачи с функционалами качества либо зависящими лишь от медленных переменных, либо квадратичными по своей структуре. Применение этих методов построения управления позволили получить некоторые приближения оптимальных решений, выделить ряд специфических свойств сингулярно возмущенных задач управления (асимптотика траекторий, явление скачка в функционале качества, если последний зависит как от медленных, так и от быстрых переменных).

В данной работе рассматриваются динамические объекты, математическими моделями которых являются сингулярно возмущенные системы с постоянным запаздыванием по фазовым переменным. Рассматривается задача управления по минимаксному критерию в постановке [8, 9] для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием по фазовым переменным при неопределенных начальных условиях и интегральных квадратичных ограничениях на управляющие воздействия. Формулируется и решается предельная задача управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием, минимаксная по форме, для которой специальным образом выбирается функционал качества. В основе предлагаемого метода лежат идеи выделения асимптотики ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы с запаздыванием и представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных переменных, в виде равномерно сходящейся последовательности [10]. При реализации метода используются результаты исследований из [8–12], а также аппарат выпуклого анализа [13]. Приводится начальное приближение оптимального решения (относительного малого параметра), при этом не требуется чрезмерных условий гладкости (дифференцируемость не выше первого порядка), ограничений на класс допустимых управлений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром $\mu > 0$) с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_{11}(t)x(t-h) + \mu G_{12}(t)y(t-h) + B_1(t,\mu)u(t),\\ \mu\frac{dy(t)}{dt} &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_{21}(t)x(t-h) + \mu G_{22}(t)y(t-h) + B_2(t,\mu)u(t),\end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, A_{ij}, B_i, G_{ij}, $i, j = 1, 2,$ — матрицы соответствующих размеров с непрерывными элементами. Начальное состояние системы $x(t) = \psi_x(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t) = \psi_y(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $y(t_0) = y_0$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0, Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi_x(t) \in \Psi_x(t)$, $\psi_y(t) \in \Psi_y(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $\Psi_x(t)$, $\Psi_y(t)$ — заданные многозначные отображения со значениями в виде выпуклых компактов (в R^n, R^m), непрерывные по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$, — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию

$u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае

$$P = \left\{ u(\cdot) \Big| \int\limits_{t_0}^{t_1} u'(t)R(t)u(t)\,dt \leqslant \lambda^2 \right\}, \qquad \lambda = \mathrm{const} > 0,$$

$R(t)$ — симметричная, положительно определенная матрица с непрерывными элементами; штрих — знак транспонирования.

Будем предполагать выполненным следующее предположение.

Предположение 1. *Корни $\lambda_s(t)$ характеристического уравнения*

$$\left| A_{22}(t) - \mu\lambda E_m + \mu G_{22}(t)e^{-\lambda h} \right| = 0,$$

где E_m — единичная $m \times m$ матрица, удовлетворяют неравенству: $\mathrm{Re}\,\lambda_s(t) < < -2c < 0$*, при $t \in T$, $c = \mathrm{const} > 0$.*

Тогда по критерию асимптотической устойчивости для линейных систем с запаздыванием [14, с. 162] при достаточно малых μ $(0 < \mu \leqslant \mu_0)$ фундаментальная матрица решений $Y[t,\tau]$ системы $\mu dy/dt = A_{22}(t)y(t) + \mu G_{22}(t)y(t-h)$, $Y[t,\tau] = 0$, при $\tau > t$, $Y[\tau,\tau] = E_m$, при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1$ имеет оценку

$$\|Y[t,\tau]\| \leqslant c_0 \exp\{-c(t-\tau)/\mu\}, \tag{2}$$

$c_0 > 0$ — некоторая постоянная, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Введем следующие обозначения: $z' = (x', y')$, $Z_0 = X_0 \times Y_0$, $\psi' = (\psi'_x, \psi'_y)$, $\Psi = \Psi_x \times \Psi_y$, $Z(t, u(\cdot), Z_0, \psi(\cdot))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ — множество (ансамбль) траекторий $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ системы (1), исходящих из Z_0, при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Определим функционал $J(\cdot)$:

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot) : R^{n+m} \to R$ — заданная выпуклая функция (с конечными значениями).

Задача 1. *Среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу $J(u(\cdot))$ на множестве P:*

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot)).$$

Запишем систему (1) в виде

$$dz(t)/dt = A(t,\mu)z(t) + G(t,\mu)z(t-h) + B(t,\mu)u(t), \tag{3}$$

где матрицы $A(t,\mu)$, $B(t,\mu)$, $G(t,\mu)$ имеют следующий блочный вид:

$$A(t,\mu) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t)/\mu & A_{22}(t)/\mu \end{pmatrix}, \qquad G(t,\mu) = \begin{pmatrix} G_{11}(t) & \mu G_{12}(t) \\ G_{21}(t)/\mu & G_{22}(t) \end{pmatrix},$$

$$B(t,\mu) = \begin{pmatrix} B_1(t,\mu) \\ B_2(t,\mu)/\mu \end{pmatrix}.$$

Пусть $Z[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений системы (1) (при $u \equiv 0$), причем $Z[\tau,\tau] = E_{n+m}$, $Z[t,\tau] = 0$ при $\tau > t$. Матрицу $Z[t,\tau]$ представим в следующем блочном виде:

$$Z[t,\tau] = \begin{pmatrix} Z_{11}[t,\tau] & Z_{12}[t,\tau] \\ Z_{21}[t,\tau] & Z_{22}[t,\tau] \end{pmatrix},$$

здесь $Z_{11}[t,\tau]$, $Z_{12}[t,\tau]$, $Z_{21}[t,\tau]$, $Z_{22}[t,\tau]$ — матрицы с размерами соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$.

Решение задачи 1 при каждом фиксированном значении параметра $\mu > 0$ описывается следующими соотношениями (используя [9, с. 73], но для системы с запаздыванием):

$$\begin{gathered} \varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot)\in P} \max_{l\in R^{n+m}} \max_{z_0\in Z_0} \max_{\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)} \{l' z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)) - \varphi^*(l)\} = \\ = \max\{\chi^0(l,\mu) \mid l \in R^{n+m}\} = \chi^0(l^0,\mu), \\ \chi^0(l,\mu) = -h^{**}(l) - \rho(-r(\cdot; t_1, l, \mu)|\, \mathrm{P}), \end{gathered} \tag{4}$$

$$h(l) = \varphi^*(l) - \rho(l' Z[t_1,t_0] \mid Z_0) - \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho(l' Z[t,\tau] G(\tau) \mid \Psi(\tau - h)) d\tau,$$

$$r(\tau; t, l, \mu) = (p' Z_{11}[t,\tau] + q' Z_{21}[t,\tau]) B_1(\tau,\mu) + (1/\mu)(p' Z_{12}[t,\tau] + q' Z_{22}[t,\tau]) B_2(\tau,\mu),$$

где $l' = (p', q')$, $p \in R^n$, $q \in R^m$, $\varphi^*(l)$ — функция, сопряженная [13, с. 120] к $\varphi(z)$, $h^{**}(l) = \overline{(co\, h)}(l)$ — замыкание выпуклой оболочки [13, с. 120] функции $h(l)$; $\rho(s|X)$ — опорная функция множества X на элементе s.

Оптимальное управление $u^0(\cdot,\mu)$ удовлетворяет условию минимума:

$$\min_{u(\cdot)\in P} \int\limits_{t_0}^{t_1} r(\tau; t_1, l^0, \mu) u(\tau) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t_1} r(\tau; t_1, l^0, \mu) u^0(\tau,\mu) d\tau.$$

Полученные $u^0(\cdot,\mu)$, l^0, $\varepsilon^0(t_1)$ зависят от параметра μ. Однако эти величины при $\mu \to +0$ могут не сходиться к соответствующим решениям задачи 1 для вырожденной системы (полученной из исходной при $\mu = 0$).

Наряду с задачей 1 рассмотрим *вырожденную* задачу.

Задача 2. *Среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u_0 = u_0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу $J_0(u(\cdot))$:*

$$\varepsilon_0(t_1) = J_0(u_0) = \min_{u(\cdot)\in P} J_0(u(\cdot)),$$

$$J_0(u(\cdot)) = \max_{x_0\in X_0} \max_{\psi_x(\cdot)\in\Psi_x(\cdot)} \varphi(z_0(t_1; u(\cdot), x_0, \psi_x(\cdot))),$$

где $z_0(t; u(\cdot), x_0, \psi_x(\cdot))$ — решение вырожденной системы, полученной из (1) *при $\mu = 0$:*

$$dx(t)/dt = A_0(t)x(t) + G_0(t)x(t-h) + \hat{B}_0(t)u(t), \tag{5}$$

$$y(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x(t) - A_{22}^{-1}(t)G_{21}(t)x(t-h) - A_{22}^{-1}(t)B_2(t,0)u(t), \tag{6}$$

где $t \in T$, $A_0(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)$, $G_0(t) = G_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)G_{21}(t)$, $\hat{B}_0(t) = B_1(t,0) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t,0)$, предполагается существование $A_{22}^{-1}(t)$.

Прежде всего проведем исследование для системы (3) при $B_1(t,\mu) = B_1(t)$, $B_2(t,\mu) = \sqrt{\mu}B_2(t)$. Другие варианты обсудим уже на основе полученных результатов. При указанных условиях вырожденная система имеет вид: при $t \in T$, $x(t) = \psi_x(t) \in \Psi_x(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $x(t_0) \in X_0$

$$\begin{aligned} &dx(t)/dt = A_0(t)x(t) + G_0(t)x(t-h) + B_1(t)u(t), \\ &y(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x(t) - A_{22}^{-1}(t)G_{21}(t)x(t-h). \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть $X[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений системы (7) (при $u \equiv 0$), причем $X[\tau,\tau] = E_n$, $X[t,\tau] = 0$ при $\tau > t$.

Пользуясь методами из работы [9, с. 73], для системы с запаздыванием получим следующие соотношения при каждом фиксированном значении параметра $\mu > 0$:

$$\varepsilon_0(t_1) = \max\{\chi_0(p,q) |\ p \in R^n,\ q \in R^m\} = \chi_0(p_0,q_0), \tag{8}$$

$$\chi_0(p,q) = -h_0^{**}(p,q) - \lambda \left[\int\limits_{t_0}^{t_1} w'(\tau,p,q)B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau,p,q)d\tau \right]^{1/2},$$

где $h_0(p,q) = \varphi^*(p,q) - \rho(w'(t_0,p,q)|\ X_0) - \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho(w'(\tau,p,q)G_0(\tau)|\ \Psi_x(\tau-h))d\tau$, $w'(\tau,p,q) = s'(t_1,p,q)X[t_1,\tau] - q'A_{22}^{-1}(t_1)G_{21}(t_1)X[t_1-h,\tau]$, при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0+h$; $s'(t_1,p,q) = p' - q'A_{22}^{-1}(t_1)A_{21}(t_1)$.

Оптимальное управление $u_0(\cdot)$ при $\tau \in T$ имеет вид

$$u_0(\tau) = -\lambda R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau,p_0,q_0) \left[\int\limits_{t_0}^{t_1} w'(\tau,p_0,q_0)B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau,p_0,q_0)d\tau \right]^{-1/2}. \tag{9}$$

Предположение 2. *1. Система* (7) *относительно управляема [15] на* T.

2. Максимум в (8) *достигается на векторе* $l_0' = (p_0', q_0')$ *таком, что* $s'(t_1; p_0, q_0) \neq 0$.

Тогда условие (9) определяет управление $u_0(\cdot) \in P$ как некоторую измеримую на T функцию, при этом найдется такой вектор $x_0 \in X_0$, $\psi_x(\cdot) \in \Psi_x(\cdot)$, что $u_0(\cdot)$ приводит траекторию $z_0(\cdot; u_0(\cdot), x_0, \psi_x(\cdot))$ на границу множества достижимости $F_0(t_1, P, x_0, \psi_x(\cdot))$ вырожденной системы:

$$F_0(t_1,P,x_0,\psi_x(\cdot)) = \{z \in R^{n+m} |\ z = z_0(t_1,u(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot)), u(\cdot) \in P\}$$

и

$$\varepsilon_0(t_1) = J_0(u_0(\cdot)) = \max_{x_0 \in X_0} \max_{\psi_x(\cdot) \in \Psi_x(\cdot)} \varphi(z_0(t_1; u_0(\cdot), x_0, \psi_x(\cdot))).$$

Как уже отмечалось, решение $(u_0(\cdot),\ l_0,\ \varepsilon_0(t_1))$ задачи 2 не дает даже начального приближения решения задачи 1, но конструкция вырожденной системы (с некоторыми расширениями) будет использоваться в дальнейшем, поскольку с ней связаны асимптотические свойства траекторий исходной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. На основании же асимптотических свойств можно существенно упростить получение решения исходной задачи 1. Поэтому важное значение приобретают методы, позволяющие построить аппроксимацию оптимального управления $u^0(\cdot,\mu)$, доставляющую оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot,\mu))$ с заданной точностью (относительно μ). В данной работе в основе предложенного способа определения требуемого приближения лежит возможность представления блоков $Z_{ij}[t,\tau;\mu]$ $(i,j = 1,2)$ в виде пределов равномерно сходящихся на $[t_0,t_1]$ последовательностей $Z_{ij}^{(k)}[t,\tau;\mu]$, $k = 0,1,2,...$, при $0 < \mu \leqslant \mu_0$, μ_0 достаточно мало.

2. АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Теорема 1. [10, теорема 1] *Существуют такие достаточно малое число $\mu_0 > 0$ и постоянная $N > 0$, что в области μ $(0 < \mu \leqslant \mu_0)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1$ выполняются оценки:*

$$\|Z_{11}[t,\tau]\| \leqslant N/(1-\mu N); \|Z_{12}[t,\tau]\| \leqslant \mu N(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N),$$
$$\|Z_{21}[t,\tau]\| \leqslant N(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N),$$
$$\|Z_{22}[t,\tau]\| \leqslant \mathrm{c}_0 e^{-c(t-\tau)/\mu} + \mu N^2(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N).$$

В [10, с. 146] приведены оценки для блоков $Z_{ij}[t,\tau]$ $(i,j = 1,2)$, причем последние могут быть представлены в виде пределов равномерно сходящихся на T последовательностей $Z_{ij}^{(k)}[t,\tau;\mu]$, $k = 0,1,2,...$, при $0 < \mu \leqslant \mu_0$, μ_0 достаточно мало:

$$Z_{11}^{(k+1)}[t,\tau] = X[t,\tau] - \int_\tau^t (dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds)A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau] + G_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])ds,$$

$$Z_{22}^{(k+1)}[t,\tau] = Y[t,\tau] + \int_\tau^t Z_{21}^{(k)}[t,s](A_{12}(s)Y[s,\tau] + \mu G_{12}(s)Y[s-h,\tau])ds,$$

$$Z_{12}^{(k)}[t,\tau] = \int_\tau^t Z_{11}^{(k)}[t,s](A_{12}(s)Y[s,\tau] + \mu G_{12}(s)Y[s-h,\tau])ds,$$

$$Z_{21}^{(k)}[t,\tau] = (1/\mu)\int_\tau^t Y[t,s](A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau] + G_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])ds,$$

$$\left\|Z_{12}^{(k+1)}[t,\tau] - Z_{12}^{(k)}[t,\tau]\right\| \leqslant \mu^{k+2}N_0N_1^{k+1}(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu}),$$

$$\left\|Z_{21}^{(k+1)}[t,\tau] - Z_{21}^{(k)}[t,\tau]\right\| \leqslant \mu^{k+1}N_0N_1^{k+1}(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu}), \tag{10}$$

$$\left\|Z_{22}^{(k+1)}[t,\tau] - Z_{22}^{(k)}[t,\tau]\right\| \leqslant \mu^k N_0 N_1^k (c_0/c)^2(\mu(1-e^{-c(t-\tau)/\mu}) - c(t-\tau)e^{-c(t-\tau)/\mu}),$$

причем $Z_{11}^{(0)}[t,\tau] = X[t,\tau], Z_{22}^{(0)}[t,\tau] = Y[t,\tau]$, где $N_0 > 0, N_1 > 0$ — некоторые постоянные.

Для задачи 1 соотношение (4) можно представить, используя [10, с. 147], в следующем виде:

$$\varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot)\in P}\max_{p,q}\Big\{ -\varphi^*(p,q) + \rho(p'Z_{11}[t_1,t_0] + q'Z_{21}[t_1,t_0]|X_0) +$$

$$+\rho(p'Z_{12}[t_1,t_0]+q'Z_{22}[t_1,t_0]|Y_0)+\int\limits_{t_0}^{t_1}[(p'Z_{11}[t_1,\tau]+q'Z_{21}[t_1,\tau])B_0(\tau,\mu)+$$

$$+(1/\mu)q'Y[t_1,\tau]B_2(\tau,\mu)-\xi(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau,\mu)]u(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho((p'Z_{11}[t_1,\tau]+q'Z_{21}[t_1,\tau])G_0(\tau)-\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau)|\Psi_x(\tau-h))d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho((p'Z_{11}[t_1,\tau]+q'Z_{21}[t_1,\tau])\mu G_{12}(\tau)+(p'Z_{12}[t_1,\tau]+q'Z_{22}[t_1,\tau])\times$$

$$\left.\times G_{22}(\tau)|\Psi_y(\tau-h))d\tau\right\}, \qquad (11)$$

где

$$B_0(t,\mu)=B_1(t,\mu)-A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t,\mu),$$

$$\xi(\tau,t_1,p,q)=\frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1,\tau]+(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_1}q'Y[t_1,s]A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau]\,ds],$$

$$\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)=\frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1,\tau]+(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_0+h}q'Y[t_1,s]A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau]\,ds].$$

Лемма 1. [11, лемма 1] *При $0<\mu\leqslant\mu_0$, μ_0 достаточно мало, для любых $u(\cdot)\in P(\cdot)$, $p\in R^n$, $q\in R^m$ справедливы оценки*

$$\left\|\int\limits_{t_0}^{t_1}\xi(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau,\mu)u(\tau)d\tau\right\|\leqslant\omega(\mu)[\|p\|+N_1\|q\|],$$

$$\left\|\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau)|\Psi_x(\tau-h))d\tau\right\|\leqslant\omega(\mu)[\|p\|+N_2\|q\|], \qquad (12)$$

где $\omega(\mu)=o(1)$, N_1, $N_2>0$ — некоторые постоянные.

Построим начальное приближение $u_\mu^{(0)}(\cdot)$, доставляющее оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1)=J(u^0(\cdot))$ с точностью $o(1)$ при $\mu\to+0$.

Из (11) следует

$$\varepsilon^0(t_1)=\min_{u(\cdot)\in P}\max_{p,q}\{-h^{**}(p,q)-\int\limits_{t_0}^{t_1}[p'X[t_1,\tau]+q'Z_{21}^{(0)}[t_1,\tau]]B_0(\tau,\mu)u(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}(1/\mu)q'Y[t_1,\tau]B_2(\tau,\mu)u(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}[\xi_1(\tau,t_1,p,q)B_0(\tau,\mu)-\xi(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau,\mu)]u(\tau)d\tau\}, \tag{13}$$

где обозначено $\xi_1(\tau,t,p,q) = p'(Z_{11}[t,\tau] - Z_{11}^{(0)}[t,\tau]) + q'(Z_{21}[t,\tau] - Z_{21}^{(0)}[t,\tau])$, причем для $0<\mu\leqslant\mu_0$, функция $h(l)\equiv h(p,q)$ из (4) представима в виде

$$h(p,q) = h_0(p,q) + o(1).$$

Используя оценки (10), (12), получим следующий результат.

Лемма 2. *Существуют такие достаточно малое число $\mu_0>0$ и постоянная $N>0$, что для любых $t_0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant t_1$, $p\in R^n, q\in R^m$, $0<\mu\leqslant\mu_0$ имеет место оценка*

$$\|\xi_1(\tau,t,p,q)\|\leqslant\mu N^2(\|p\|+\|q\|\,(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})). \tag{14}$$

Следующую задачу будем называть *предельной*.

Задача 3. *Среди управлений $u(\tau)\in P$, $\tau\in T$, $v(s)$, $s\geqslant0$, удовлетворяющих условию $\{u(\cdot),\ v(\cdot)\}\in P^{(0)}$, где*

$$P^{(0)}=\left\{u(\cdot),\ v(\cdot)|\ \int\limits_{t_0}^{t_1}u'(\tau)R(\tau)u(\tau)d\tau+\int\limits_0^{\infty}v'(s)R(t_1)v(s)\,ds\leqslant\lambda^2\right\},$$

найти $u^{(0)}=u^{(0)}(\cdot)$, $v^{(0)}=v^{(0)}(\cdot)$, доставляющие минимум функционалу $J^{(0)}(u(\cdot),v(\cdot))$:

$$J^{(0)}(u^{(0)},v^{(0)})=\min\{J^{(0)}(u(\cdot),v(\cdot))|\{u(\cdot),v(\cdot)\}\in P^{(0)}\},$$
$$J^{(0)}(u(\cdot),v(\cdot))=\max\{\varphi(\tilde z(t_1;u(\cdot),v(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot)))|x_0\in X_0,\psi_x(\cdot)\in\Psi_x(\cdot)\},$$

где

$$\tilde z(t_1;u(\cdot),v(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))=\begin{pmatrix} x_0(t_1)\\ -A_{22}^{-1}(t_1)(A_{21}(t_1)x_0(t_1)+G_{21}(t_1)x_0(t_1-h))+\\ +\int\limits_0^{\infty}\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1,\mu)v(s)\,ds\end{pmatrix},$$

причем $x_0(\cdot)=x_0(\cdot;u(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot))$ — решение (7), $\Phi_0[t_1,s]=Y[t_1,t_1-\mu s]$.

Предположение 3. *1. Для любого $t\in T$*

$$\operatorname{rank}\{B_2(t_1,\mu),\ A_{22}(t_1)B_2(t_1,\mu),...,\ A_{22}^{m-1}(t_1)B_2(t_1,\mu)\}=m.$$

2. Вектор $(l^{(0)})'=(p^{(0)'},q^{(0)'})$, доставляющий максимум в

$$\varepsilon^{(0)}(t_1)=\max\{\chi^{(0)}(p,q)|\ p\in R^n,\ q\in R^m\}=\chi^{(0)}(p^{(0)},q^{(0)}), \tag{15}$$

таков, что $s'(t_1;p^{(0)},q^{(0)})\neq0$, $q^{(0)}\neq0$.

Здесь обозначено: $\chi^{(0)}(p,q)=-h_0^{**}(p,q)-\lambda(\sigma_0(p,q))^{1/2}$,

$$\sigma_0(p,q)=\int\limits_{t_0}^{t_1}w'(\tau,p,q)\times B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau,p,q)d\tau+$$

$$+\int_0^\infty q'\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1,\mu)R^{-1}(t_1)B_2'(t_1,\mu)\Phi_0'[t_1,s]q\,ds.$$

При выполнении условия 1 предположения 2 и условий предположения 3 задача 3 разрешима [8, с. 110; 9, с. 76], причем оптимальная пара этой задачи имеет следующий вид:

$$u^{(0)}(\tau)=-\lambda R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau,p^{(0)},q^{(0)})(\sigma_0(p^{(0)},q^{(0)}))^{-1/2},\qquad \tau\in T, \tag{16}$$

$$v^{(0)}(s)=-\lambda R^{-1}(t_1)B_2'(t_1,\mu)\Phi_0'[t_1,s]q^{(0)}(\sigma_0(p^{(0)},q^{(0)}))^{-1/2},\qquad s\geqslant 0, \tag{17}$$

и доставляет функционалу $J^{(0)}$ значение $J^{(0)}(u^{(0)},v^{(0)})=\varepsilon^{(0)}(t_1)$, где $\varepsilon^{(0)}(t_1)$ определено в (15).

Сравнивая предельную и вырожденную задачи, имеем следующее неравенство:

$$\varepsilon^{(0)}(t_1)\leqslant\varepsilon_0(t_1).$$

Рассмотрим управляющее воздействие $u_\mu^{(0)}(\cdot)$:

$$u_\mu^{(0)}(\tau)=\begin{cases}u^{(0)}(\tau), & t_0\leqslant\tau\leqslant t_1-\alpha(\mu),\\ (1/\sqrt{\mu})v^{(0)}((t_1-\tau)/\mu), & t_1-\alpha(\mu)<\tau\leqslant t_1,\end{cases} \tag{18}$$

где $\alpha=\alpha(\mu)\in R$, $\alpha>0$, $\alpha\to 0$, $\alpha/\mu\to+\infty$ при $\mu\to+0$.

Пусть μ_k, $k=1,2,\ldots$, где $0<\mu_k<\mu_0$ есть некоторая сходящаяся к нулю последовательность чисел, $u_k^{(0)}(\cdot)=u_{\mu_k}^{(0)}(\cdot)$, $k=1,2,\ldots$, — соответствующая последовательность оптимальных (для задачи 1) управлений. В силу слабой компактности множества P в пространстве $L_2^r(T)$ можно выделить подпоследовательность $u_{k_j}^{(0)}(\cdot)$, слабо сходящуюся к некоторой функции $u^{(0)}(\cdot)\in P$. Обозначим $v_{k_j}^0(\cdot)\equiv v^0(\cdot,\mu_{k_j})$, $v^0(s,\mu)=\sqrt{\mu}u^0(t_1-\mu s,\mu)$, $0\leqslant s\leqslant 1/\varepsilon<\alpha(\mu)/\mu$ при $0<\mu\leqslant\mu_0$, где $\varepsilon>0$ — произвольно выбранное число, μ_0 — достаточно мало.

Теорема 2. *Пусть выполнены условие 1 предположения 2 и условия предположения 3 и пусть максимум в* (15) *достигается на единственном векторе* $l^{(0)}$. *Тогда верно следующее:*

1) $u_{k_j}^0(\cdot)$ *слабо сходится к* $u^{(0)}(\cdot)$ (16), $v_{k_j}^0(\cdot)$ *слабо сходится к* $v^{(0)}(\cdot)$, *где* $v^{(0)}(\cdot)$ *определено в* (17) ($s\in[0,1/\varepsilon]$ *для любого* $\varepsilon>0$);

2) при $0<\mu\leqslant\mu_0$, μ_0 — *достаточно мало, справедливы соотношения*

$$\varepsilon^0(t_1,\mu)=J(u^0(\cdot))=J(u_\mu^{(0)}(\cdot))+o(1),\qquad \varepsilon^0(t_1,\mu)=\varepsilon^{(0)}(t_1)+o(1);$$

3) для $u_\mu^{(0)}(\cdot)$ (18), *при* $\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)$

$$\left|\rho(l|Z(t_1;u^0(\cdot),Z_0,\psi(\cdot)))-\rho(l|Z(t_1;u_\mu^{(0)}(\cdot),Z_0,\psi(\cdot)))\right|\leqslant\omega_0(\mu),$$

$\omega_0(\mu)=o(1)$, $0<\mu\leqslant\mu_0$, *равномерно по всем* $l\in R^{n+m}$, $l'l=1$;

4) при $\mu\to+0$ *множество* $Z(t_1;u^0(\cdot),Z_0,\psi(\cdot))$ *сходится в хаусдорфовой метрике к выпуклому, замкнутому, ограниченному множеству:*

$$\tilde Z(t_1;u^{(0)}(\cdot),v^{(0)}(\cdot),X_0,\psi_x(\cdot))=\{\tilde z\in R^{n+m}|\tilde z=\tilde z(t_1;u^{(0)}(\cdot),v^{(0)}(\cdot),x_0),x_0\in X_0,\psi_x(\cdot)\}.$$

Доказательство. В (4) имеем

$$\chi^0(l) = -h^{**}(l) - \lambda(\sigma^0(l;\mu))^{1/2}, \tag{19}$$

$$\sigma^0(l,\mu) = \int\limits_{t_0}^{t_1} l'Z[t_1,\tau;\mu]B(\tau,\mu)R^{-1}(\tau)B'(\tau,\mu)Z'[t_1,\tau;\mu]l d\tau.$$

Используя (13), получим

$$\sigma^0(l,\mu) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \tilde{\sigma}'(t_1,\tau;\mu)R^{-1}(\tau)\tilde{\sigma}(t_1,\tau;\mu)d\tau,$$

$$\tilde{\sigma}'(t_1,\tau;\mu) = (p'X[t_1,\tau] + q'Z_{21}^{(0)}[t_1,\tau;\mu])B_0(\tau,\mu)+$$
$$+(1/\mu)q'Y[t_1,\tau]B_2(\tau,\mu) + \xi_1(\tau,t_1,p,q;\mu)B_0(\tau,\mu) - \xi(\tau,t_1,p,q;\mu)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau,\mu),$$

где $B_2(t,\mu) = \sqrt{\mu}B_2(t)$, $B_0(\tau,\mu) = B_1(\tau) - \sqrt{\mu}A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)$.

Тогда, учитывая [12, лемма 1.2], оценки (12), (14), имеем $\sigma^0(l;\mu) = \sigma_0(p,q)+\hat{\xi}(l;\mu)$, причем $\left|\hat{\xi}(l,\mu)\right| \leqslant \|l\|\,\hat{\omega}(\mu)$, $\hat{\omega}(\mu) = o(1)$ при $0 < \mu \leqslant \mu_0$, откуда следует утверждение 2) теоремы.

В силу оценок (2), (12), учитывая [12, лемма 1.2], теорему 1 для любых $u(\cdot) \in P$, $v(s) = \sqrt{\mu}u(t_1 - \mu s)$, $s \in [0, \alpha(\mu)/\mu)$, $l' = (p',q') \in R^{n+m}$ справедливо представление

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} r(\tau;t_1,l,\mu)u(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha(\mu)} w'(\tau,p,q)B_1(\tau)u(\tau)d\tau+$$
$$+ \int\limits_{0}^{\alpha(\mu)/\mu} q'Y[t_1,t_1-\mu s;\mu]B_2(t_1-\mu s;\mu)v(s)\,ds + \xi'(l,\mu), \tag{20}$$

причем $|\xi'(l,\mu)| \leqslant \|l\|\,\omega'(\mu)$, где $\omega'(\mu) = o(1)$ при $0 < \mu \leqslant \mu_0$. Из предположения 3, единственности $l^{(0)}$ имеем $l^0 = l^{(0)} + o(1)$. Тогда из слабой компактности P получим утверждение 1). Неравенство 3) (а также 4 при оценке разности опорных функций указанных множеств) определяется на основании (20), свойств управления $u^0(\cdot)$ и управления $u^0_\mu(\cdot)$, определенного в (18). □

Обсудим теперь другие возможные варианты разложений (по параметру μ) коэффициентов $B(t,\mu)$ системы (3).

1. $B_1(t,\mu) = B_1(t), B_2(t,\mu) = \sigma(\mu)B_2(t)$, $\sigma(\mu) = o(\sqrt{\mu})$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$. В этом случае (19) представимо в виде

$$\sigma^0(l,\mu) = \int\limits_{t_0}^{t_1} w'(\tau,p,q)B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau,p,q)d\tau + \hat{\xi}_1(l;\mu),$$

$$\left|\hat{\xi}_1(l,\mu)\right| \leqslant \|l\|\,\hat{\omega}_1(\mu),$$

$\hat{\omega}_1(\mu) = o(1)$ при $0 < \mu \leqslant \mu_0$, и, следовательно, в предельной задаче 3 необходимо положить $B_2(\cdot) \equiv 0$, $v(\cdot) \equiv 0$, т. е. решения предельной и вырожденной задач совпадают.

2. $B_1(t,\mu) = B_1(t), B_2(t,\mu) = \sigma(\mu)B_2(t)$, $\sigma(\mu) = o(1)$, $\sigma(\mu)/\sqrt{\mu} \to +\infty$ при $\mu \to +0$. Здесь уже могут нарушаться условия регулярности [9, с. 53], поскольку имеется «излишек» ресурсов управления по быстрой переменной. Тогда для (19) получим при $0 < \mu \leqslant \mu_0$

$$\sigma^0(l;\mu) = \int\limits_{t_0}^{t_1} w'(\tau,p,q)B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)w(\tau,p,q)d\tau + (\sigma(\mu)/\sqrt{\mu})^2 \times$$
$$\times\left(\int\limits_0^\infty q'\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)R^{-1}(t_1)B_2'(t_1)\Phi_0'[t_1,s]q\,ds + \mu\hat{\xi}_2(l,\mu)\right) + \hat{\xi}_3(l,\mu), \qquad (21)$$

где $\hat{\xi}_2(l,\mu)$, $\hat{\xi}_3(l,\mu)$ имеют порядок малости $o(1)$. Соотношение (15) представимо в виде

$$\varepsilon^{(0)}(t_1) = \max_{p'p\leqslant 1}\left\{-h_0^{**}(p,0) - \lambda\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} p'X[t_1,\tau]B_1(\tau)R^{-1}(\tau)B_1'(\tau)X'[t_1,\tau]p d\tau\right)^{1/2}\right\}. \qquad (22)$$

При выполнении условий регулярности (максимум достигается на границе) в предельной задаче 3 следует положить $\tilde{z}'(t_1;u(\cdot),v(\cdot),x_0,\psi_x(\cdot)) = (x_0'(t_1),0')$, $v(\cdot) \equiv 0$, $l' = (p,0)$. Управление $u_\mu^{(0)}(\cdot)$ определяется соотношением (18), причем для $v^{(0)}(s)$, определенного в (17), недостаточно знать лишь начальное приближение $q^{(0)} = 0$, здесь следует найти более точно асимптотику, поскольку $\|q^0\| = o(\sqrt{\mu}/\sigma(\mu))$. q ищем в виде $q = (\sqrt{\mu}/\sigma(\mu))q_1 + o(\sqrt{\mu}/\sigma(\mu))$.

3. $B_1(t,\mu) = B_1(t), B_2(t,\mu) = B_2(t)$. Данный случай аналогичен случаю 2, в (21) нужно положить $\sigma(\mu) = 1$, отмеченные особенности остаются в силе, причем в (22) $B_1(\tau)$ заменяется на $B_0(\tau,\mu) = B_1(\tau) - A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)$. Однако множество достижимости вырожденной системы (5), (6) становится неограниченным (по быстрым переменным). Здесь q следует искать в виде $q = \sqrt{\mu}q_1 + o(\sqrt{\mu})$.

Библиографический список

1. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М. : Наука, 1987. 368 с.
2. *Gaitsgory V., Rossomakhine S.* Averaging and linear programming in some singularly perturbed problems of optimal control // Applied Mathematics and Optimization. 2015. Vol. 71, № 2. P. 195–276. DOI: 10.1007/s00245-014-9257-1.
3. *Gajic Z., Lim M.* Optimal control of singularly perturbed linear systems and applications. High-accuracy techniques. N. Y. : Marcel Dekker, Inc., 2001. 312 p.
4. *Glizer V. Y., Fridman E.* H_∞ control of linear singularly perturbed systems with small state delay // J. Math. Anal. and Appl. 2000. Vol. 250, iss. 1. P. 49–85.
5. *Калинин А. И., Лавринович Л. И.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 194–206. DOI: 10.7868/S004446691502012X.
6. *Курина Г. А., Нгуен Т. Х.* Асимптотическое решение сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления с разрывными коэффициентами // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52, № 4. С. 628–652.
7. *Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J.* Singular perturbation methods in control : analysis and design. Philadelphia, PA, USA : SIAM, 1999. 374 p.
8. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М. : Наука, 1968. 475 с.
9. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 392 с.

10. *Гребенникова И. В., Кремлёв А. Г.* Аппроксимация управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при геометрических ограничениях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 142–151. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-142-151.
11. *Гребенникова И. В., Кремлёв А. Г.* Итерационная процедура построения оптимального решения в минимаксной задаче управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при геометрических ограничениях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 272–280. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-272-280.
12. *Кремлёв А. Г., Гребенникова И. В.* Об асимптотике ансамбля траекторий управляемой сингулярно возмущенной системы с запаздыванием // Новости научной мысли – 2006 : материалы науч.-практ. конф. Днепропетровск : Наука и образование, 2006. Т. 4. С. 65–69.
13. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 492 с.
14. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Физматгиз, 1959. 468 с.
15. *Кириллова Ф. М.* Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1260–1263.

Образец для цитирования:
Гребенникова И. В., Кремлёв А. Г. Аппроксимация управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при интегральных квадратичных ограничениях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 368–380. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-368-380.

Approximation of Control for Singularly Perturbed System with Delay with Integral Quadratic Constraints

I. V. Grebennikova, A. G. Kremlev

Irina V. Grebennikova, orcid.org/0000-0002-9050-1591, Ural Federal University, 19, Mira Str., Ekaterinburg, Russia, 620002, giv001@mail.ru
Alexandr G. Kremlev, orcid.org/0000-0003-2157-0777, Ural Federal University, 19, Mira Str., Ekaterinburg, Russia, 620002, kremlev001@mail.ru

The purpose of the work is the development and theoretical substantiation of analytical approximate or asymptotic methods for solving optimal control problems for singularly perturbed systems with constant delay in phase variables under conditions of uncertainty with respect to the initial data. For achievement of a goal the control problem for the singularly perturbed system with delay with indeterminate initial conditions and integral quadratic constraints on the control resources according to the minimax criterion is considered. A limit problem is formulated for which the quality functional is chosen in a special way. The proposed method is based on the idea of separating the asymptotics of the ensemble of trajectories of a singularly perturbed system with delay and representing the fundamental matrix of solutions divided into blocks in accordance with the dimensions of fast and slow variables in the form of a uniformly convergent sequence. We propose a procedure to construct an initial approximation of control response for the minimax problem of control. The work uses problem statements, concepts, methods and results of control theory under uncertainty, as well as methods of the theory of extremal problems, asymptotic analysis methods, classical methods of convex and real analysis.

Key words: singularly perturbed system with delay, optimal control, fundamental matrix.

References

1. Akulenko L. D. *Asimptoticheskie metody optimal'nogo upravleniia* [Asymptotic Methods of Optimal Control]. Moscow, Nauka, 1987. 368 p. (in Russian).
2. Gaitsgory V., Rossomakhine S. Averaging and linear programming in some singularly perturbed problems of optimal control. *Applied Mathematics and Optimization*, 2015, vol. 71, no. 2, pp. 195–276. DOI: 10.1007/s00245-014-9257-1.
3. Gajic Z., Lim M. *Optimal control of singularly perturbed linear systems and applications. High-accuracy techniques*. New York, Marcel Dekker, Inc., 2001. 312 p.
4. Glizer V. Y., Fridman E. H_∞ control of linear singularly perturbed systems with small state delay. *J. Math. Anal. and Appl.*, 2000, vol. 250, iss. 1, pp. 49–85.
5. Kalinin A. I., Lavrinovich L. I. Asymptotic of the solution to a singularly perturbed linear-quadratic optimal control problem. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, no. 2, pp. 194–205. DOI: 10.1134/S0965542515020128.
6. Kurina G. A., Nguyen T. H. Asymptotic solution of singularly perturbed linear-quadratic optimal control problems with discontinuous coefficients. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2012, vol. 52, no. 4, pp. 524–547. DOI: 10.1134/S0965542512040100.
7. Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J. *Singular perturbation methods in control: analysis and design*. Philadelphia, PA, USA, SIAM, 1999. 374 p.
8. Krasovskii N. N. *Teorija upravlenija dvizheniem* [The Theory of Motion Control]. Moscow, Nauka, 1968. 475 p. (in Russian).
9. Kurzhanskij A. B. *Upravlenie i nabljudenie v uslovijah neopredelennosti* [Control and Observation under the Uncertainty Conditions]. Moscow, Nauka, 1977. 392 p. (in Russian).
10. Grebennikova I. V., Kremlev A. G. Approximation of control for singularly perturbed system with delay with geometric constraints. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 142–151 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-142-151.
11. Grebennikova I. V., Kremlev A. G. Iterative procedure of constructing optimal solving in the minimax problem of control for singularly perturbed system with delay with geometric constraints. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 272–280 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-272-280.
12. Kremlev A. G., Grebennikova I. V. About asymptotic of a set of trajectories of a singularly perturbed system with delay. *Novosti nauchnoj mysli – 2006: materialy mezhdunarodnoi nauch. prakt. konf.* [News of Scientific Thought : Proc. Intern. Conf.]. Dnepropetrovsk, Nauka i obrazovanie, 2006, vol. 4, pp. 65–69 (in Russian).
13. Rokafellar R. *Vypuklyj analiz* [Convex Analysis]. Moscow, Mir, 1973. 492 p. (in Russian).
14. Krasovskii N. N. *Nekotorye zadachi teorii ustojchivosti dvizhenija* [Some Problems in the Theory of Stability of Motion]. Moscow, Fizmatgiz, 1959. 468 p. (in Russian).
15. Kirillova F. M. Relative controllability of linear dynamic systems with delay. *Dokl. AN SSSR*, 1967, vol. 174, no. 6, pp. 1260–1263 (in Russian).

Cite this article as:

Grebennikova I. V., Kremlev A. G. Approximation of Control for Singularly Perturbed System with Delay with Integral Quadratic Constraints. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 368–380 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-368-380.

УДК 514.76

СВЯЗНОСТИ НЕНУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ НА ТРЕХМЕРНЫХ НЕРЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н. П. Можей

Можей Наталья Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 220013, Беларусь, Минск, П. Бровки, 6, mozheynatalya@mail.ru

В каком случае однородное пространство допускает инвариантную аффинную связность? Если существует хотя бы одна инвариантная связность, то пространство является изотропно-точным, но обратное неверно. Если однородное пространство является редуктивным, то оно всегда допускает инвариантную связность. Целью данной работы является описание трехмерных нередуктивных однородных пространств, допускающих аффинные связности только ненулевой кривизны, а также самих связностей, их тензоров кривизны и кручения. В работе определены основные понятия: изотропно-точечная пара, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, редуктивное пространство. Приведено в явном виде локальное описание трехмерных нередуктивных однородных пространств, не допускающих связностей нулевой кривизны. Локальная классификация таких пространств эквивалентна описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли. Описаны также в явном виде все инвариантные аффинные связности на найденных однородных пространствах, их тензоры кривизны и кручения.

Ключевые слова: инвариантная связность, тензор кривизны, редуктивное пространство, группа преобразований, алгебра Ли.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-381-393

ВВЕДЕНИЕ

Многообразия, снабженные дифференциально-геометрическими структурами, являлись объектом многих исследований, специализация многообразия приводит к важнейшим понятиям геометрии: группе Ли, главному расслоению, однородным пространствам, пространствам со связностями и пр. Двумерные однородные пространства были локально классифицированы еще Софусом Ли (Lie) [1], однако многие исследователи (например, В. В. Горбацевич и А. Л. Онищик [2]) считали невозможной классификацию однородных пространств размерности три и выше. Важный подкласс среди всех однородных пространств формируют изотропно-точные пространства. В частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. «Если на поверхности зафиксирован способ «параллельно» переносить касательные вектора вдоль кривых, то говорят, что на этой поверхности задана связность. Необходимость сравнивать те или иные геометрические величины в разных точках «кривого» пространства делает понятие связности одним из важнейших в геометрии и физике» [3]. С описанием трехмерных редуктивных пространств и связностей на них можно ознакомиться в [4], целью же данной работы является описание трехмерных нередуктивных однородных пространств, допускающих инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, а также самих связностей, их тензоров кривизны и кручения. Рассматриваемая тема имеет также многочисленные приложения, например, А. З. Петров [5] дал алгебраическую классификацию полей тяготения, связанную со структурой тензора кривизны пространства.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $(\overline{G}, M)$ — трехмерное однородное пространство, где $\overline{G}$ — группа Ли на многообразии M. Зафиксируем произвольную точку $o \in M$ и обозначим через $G = \overline{G}_o$ стабилизатор точки o. Известно, что проблема классификации однородных пространств $(\overline{G}, M)$ эквивалентна классификации пар групп Ли $(\overline{G}, G)$ таких, что $G \subset \overline{G}$ (см., например, [6]). Для изучения однородных пространств важно рассматривать не саму группу $\overline{G}$, а ее образ на $\mathrm{Diff}(M)$, другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия $\overline{G}$ на M. Поставим в соответствие $(\overline{G}, M)$ пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли, где $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ — подалгебра $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе G. Два однородных пространства локально изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие пары алгебр Ли эквивалентны. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *эффективной*, если $\mathfrak{g}$ не содержит ненулевых идеалов алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, однородное пространство $(\overline{G}, M)$ является локально эффективным тогда и только тогда, когда соответствующая пара алгебр Ли эффективна. *Изотропный* $\mathfrak{g}$*-модуль* $\mathfrak{m}$ — это $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ такой, что $x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$. Соответствующее представление $\lambda\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ является *изотропным представлением* пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если ее изотропное представление – инъекция. Для классификации трехмерных изотропно-точных пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ сначала классифицированы (с точностью до изоморфизма) точные трехмерные $\mathfrak{g}$-модули U, что эквивалентно классификации подалгебр $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ с точностью до сопряженности, для каждого полученного $\mathfrak{g}$-модуля U классифицированы (с точностью до эквивалентности) все такие пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, что $\mathfrak{g}$-модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и U изоморфны. Соответствующая классификация приведена в [4].

Между инвариантными аффинными связностями на $(\overline{G}, M)$ и линейными отображениями $\Lambda\colon \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такими, что $\Lambda|_{\mathfrak{g}} = \lambda$ и отображение Λ является $\mathfrak{g}$-инвариантным, существует взаимно-однозначное соответствие (см. [7]). Будем называть такие отображения *(инвариантными) аффинными связностями* на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Если возможна хотя бы одна связность на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, то такая пара является изотропно-точной (см. [8]). Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем, эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензоры кручения $T \in Inv\,T_2{}^1(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in Inv\,T_3{}^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют соответственно вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$.

Того, что пара является изотропно-точной, не достаточно для существования инвариантных связностей (см., например, [9]). Однородное пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ для $\bar{G}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ для G и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \bigcap \mathfrak{m} = 0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна. Класс редуктивных однородных пространств ввел в рассмотрение П. К. Рашевский [10], у них при параллельном переносе сохраняются тензоры кривизны и кручения. Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность [8]. Найдем нередуктивные пространства $\overline{G}/G$, допускающие инвариантные аффинные связности, кривизна которых не может быть нулевой. Будем определять пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \dots, e_n\}$ будем обозначать базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Полагаем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, \dots, e_{n-3}$. Пусть $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Будем описывать аффинную связность через $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$ (поскольку $\Lambda|_{\mathfrak{g}} = \lambda$), запишем тензор кривизны R его значениями $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – его значениями $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$. Для ссылки на пару будем использовать обозначение $d.n.m$, где d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, соответствующий приведенному в [4]. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$, такая пара будет обозначаться $d.n.1$, она всегда является редуктивной.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ НЕРЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ И СВЯЗНОСТЕЙ НА НИХ

Найдем нередуктивные пары, допускающие инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны. Информация о самих парах, связностях на них, тензорах кривизны и кручения содержится в доказательстве теоремы.

Теорема 1. *Если нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, $\mathrm{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ допускает инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, то $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ эквивалентна одной из следующих подалгебр:*

$$4.21.\ \begin{bmatrix} x & y & u \\ & x & z \\ & & \end{bmatrix}; \qquad 3.25.\ \begin{bmatrix} & x & z \\ & & y \\ & & \end{bmatrix}; \qquad 3.20.\ \begin{bmatrix} x & y & z \\ & \lambda x & \\ & & \mu x \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{c} (\lambda, \mu) = (0, 1/2); \\ (\lambda, \mu) = (1/5, 2/5); \end{array}$$

$$2.13.\ \begin{bmatrix} & y & x \\ & & y \\ & & \end{bmatrix}; \qquad 2.20.\ \begin{bmatrix} & y & x \\ & & \\ & & \end{bmatrix}; \qquad 1.5.\ \begin{bmatrix} & & x \\ & & \\ & & \end{bmatrix}.$$

Здесь предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принимают все значения из $\mathbb{R}$, а параметры обозначаются греческими буквами, подалгебры с различными значениями параметров не сопряжены друг другу.

Базис подалгебры будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Доказательство. Для подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ из [4] найдем изотропно-точные пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и выберем из них нередуктивные, далее определим пары (и подалгебры), допускающие инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны.

Рассмотрим, например, случай 4.21.

Лемма 1. *Любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 4.21, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и* *только одной из пар 4.21.24, 4.21.25 ($\delta = 0, 1$ соответственно):*

4.21.24(25).	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	u_2	0
e_2	0	0	e_4	0	0	u_1	e_2
e_3	$-e_3$	$-e_4$	0	0	0	0	u_2
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_4+u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	αe_4
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$\alpha e_3+\delta e_4-u_2$
u_3	0	$-e_2$	$-u_2$	$-e_4-u_1$	$-\alpha e_4$	$-\alpha e_3-\delta e_4+u_2$	0

,

где $\alpha < -1/4$.

Доказательство. Использовав тождество Якоби, имеем $[e_4, u_3] = se_4 + u_1$, $[e_2, u_3] = se_2$, $[u_1, u_2] = 0$, $[u_1, u_3] = b_4e_4 + \beta_1 u_1$, $[u_2, u_3] = b_4e_3 + c_4e_4 + \gamma_1 u_1 + (\beta_1 - s)u_2$, $s \neq 0$. Отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}' \to \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,4}$, $\pi(u_j) = (1/s)u_j$, $j = \overline{1,3}$, установит эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$, где последняя имеет указанный вид при $s = 1$. Отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}'' \to \bar{\mathfrak{g}}'$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = 1, 2, 4$, $\pi(e_3) = e_3 - (\gamma_1/2)e_4$, $\pi(u_1) = u_1$, $\pi(u_2) = u_2 - (\gamma_1/2)e_4 - (\gamma_1/2)u_1$, $\pi(u_3) = u_3$, установит эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}'', \mathfrak{g}'')$ и $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$, где последняя примет найденный вид при $s = 1, \gamma_1 = 0$. Отображение $\pi : \bar{\mathfrak{g}}''' \to \bar{\mathfrak{g}}''$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1,4}$, $\pi(u_1) = u_1 - (\beta_1/2)e_4$, $\pi(u_2) = u_2 - (\beta_1/2)e_3$, $\pi(u_3) = u_3 + (\beta_1/2)e_1$, задает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}'', \mathfrak{g}'')$ и $(\bar{\mathfrak{g}}''', \mathfrak{g}''')$, где последняя имеет указанный вид при $s = 1, \gamma_1 = \beta_1 = 0$.

Если $c_4 = 0$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}}''', \mathfrak{g}''')$ эквивалентна паре 4.21.24.

Если $c_4 \neq 0$, то пары $(\bar{\mathfrak{g}}''', \mathfrak{g}''')$ и 4.21.25 эквивалентны посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}}_{25} \to \bar{\mathfrak{g}}'''$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = 1, 2, 4, \pi(e_3) = (1/c_4)e_3, \pi(u_1) = u_1, \pi(u_2) = (1/c_4)u_2$, $\pi(u_3) = u_3$.

Рассмотрим пары типа 4.21.24, а именно $(\bar{\mathfrak{g}}_{24}, \mathfrak{g}_{24})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}'_{24}, \mathfrak{g}'_{24})$ с параметрами α и α' соответственно. Покажем, что при $\alpha \neq \alpha'$ эти пары не эквивалентны. Пусть $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{g}}_{24}/D^2\bar{\mathfrak{g}}_{24}$ и φ — естественная проекция $\bar{\mathfrak{g}}_{24}$ на $\bar{\mathfrak{a}}$. Тогда $\mathfrak{a} = \varphi(\mathfrak{g}_{24})$ для пары $(\bar{\mathfrak{g}}_{24}, \mathfrak{g}_{24})$. Аналогично определим $\bar{\mathfrak{a}}'$ и $\mathfrak{a}'$ для пары $(\bar{\mathfrak{g}}'_{24}, \mathfrak{g}'_{24})$. Покажем, что пары $(\bar{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a})$ и $(\bar{\mathfrak{a}}', \mathfrak{a}')$ не эквивалентны при $\alpha \neq \alpha'$. Предположим, что эти пары эквивалентны при помощи отображения $\pi : \bar{\mathfrak{a}} \to \bar{\mathfrak{a}}'$. Из равенства $\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)]$ для базисных векторов $\bar{\mathfrak{a}}$ с учетом $\pi(D\bar{\mathfrak{a}}) \subset D\bar{\mathfrak{a}}'$, $\pi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}'$, $\pi(D\mathfrak{a}) \subset D\mathfrak{a}'$ и $\pi(Z(\mathfrak{a})) \subset Z(\mathfrak{a}')$ следует, что $\alpha' = \alpha$. Поэтому пары $(\bar{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a})$ и $(\bar{\mathfrak{a}}', \mathfrak{a}')$ не эквивалентны при $\alpha \neq \alpha'$. Следовательно, пары $(\bar{\mathfrak{g}}_{24}, \mathfrak{g}_{24})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}'_{24}, \mathfrak{g}'_{24})$ не эквивалентны при $\alpha \neq \alpha'$. Аналогично пары типа 4.21.25 (с параметрами α и α' соответственно) не эквивалентны при $\alpha \neq \alpha'$, пары 4.21.25 и 4.21.24 также не эквивалентны.

Для каждой пары найдем аффинные связности, тензоры кривизны и кручения и определим, когда кривизна может быть только ненулевой. Прямыми вычислениями получаем, что аффинная связность в случаях 4.21.24 и 4.21.25 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & 0 \\ 0 & r_{1,1}+1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3}+1 \end{pmatrix}$$

(здесь и далее $p_{ij}, q_{ij}, r_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = \overline{1,3})$). В случае 4.21.24 тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & {p_{1,3}}^2 + p_{1,3} - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2q_{1,3}p_{1,3} + 2q_{1,3} \\ 0 & 0 & {p_{1,3}}^2 + p_{1,3} - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\alpha \geqslant -1/4$ уравнение ${p_{1,3}}^2 + p_{1,3} - \alpha = 0$ имеет решение, т. е. если $p_{1,3}$ — корень этого уравнения, а $q_{1,3} = 0$, то тензор кривизны нулевой. Если $\alpha < -1/4$, то при любых значениях параметров $p_{1,3}$, $q_{1,3} \in \mathbb{R}$ тензор кривизны не может оказаться нулевым.

Аналогично в случае 4.21.25 тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & {p_{1,3}}^2+p_{1,3}-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2q_{1,3}p_{1,3}+2q_{1,3}-1 \\ 0 & 0 & {p_{1,3}}^2+p_{1,3}-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор ненулевой при $\alpha < -1/4$. Тензор кручения в случаях 4.21.24, 4.21.25 — $(0,0,0)$, $(p_{1,3} - r_{1,1}, 0, 0)$, $(2q_{1,3}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0)$. □

Лемма 2. *Любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 2.13, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и только одной из пар 2.13.7, 2.13.8, где*

2.13.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	u_2
e_2	0	0	0	0	$e_2 + u_1$
u_1	0	0	0	0	αu_1
u_2	$-u_1$	0	0	0	$\beta e_1 + \alpha u_2$
u_3	$-u_2$	$-e_2 - u_1$	$-\alpha u_1$	$-\beta e_1 - \alpha u_2$	0

(здесь $\beta \neq 1/4 - \alpha/2$), а 2.13.7 совпадает с 2.13.8, кроме $[u_2, u_3] = (1-\alpha)e_1 + e_2 + \alpha u_2$, $\alpha \neq 3/2$.

Доказательство. В силу тождества Якоби $[e_2, u_3] = se_1 + te_2 + u_1$, $[e_1, u_1] = [e_2, u_2] = re_2$, $[u_1, u_2] = a_1e_1 + a_2e_2 + \alpha_1 u_1$, $[u_2, u_3] = c_1e_1 + c_2e_2 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3$, $[u_1, u_3] = b_2e_2 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$ и

$$\begin{cases} \alpha_1 r - r^2 = 0,\ a_1 + rs = 0,\ \beta_1 r - a_2 - rt = 0,\ \beta_2 - \alpha_1 - r = 0,\ \beta_2 r + rs = 0,\ \beta_1 r + \beta_2 t + a_2 = 0, \\ \gamma_1 r - b_2 = 0,\ \beta_2 s + a_1 - rs = 0,\ \beta_2 + s + \alpha_1 - r = 0,\ a_2 r - 2\beta_1 a_1 = 0,\ a_2 - \alpha_1\beta_1 - \beta_1\beta_2 = 0, \\ a_1 + \alpha_1\beta_2 - \beta_2^2 = 0,\ a_2 t + c_1 r - b_2 r - 2\beta_1 a_2 + \alpha_1 b_2 - \beta_2 b_2 = 0. \end{cases}$$

При $r \neq 0$ имеем $[e_2, u_3] = -2re_1 + u_1$, $[u_1, u_2] = r^2 e_1 + ru_1$, $[u_1, u_3] = pre_2 + 2ru_2$, $[u_2, u_3] = 2pe_1 + ce_2 + pu_1 + 2ru_3$. Полученная пара не допускает инвариантных аффинных связностей и не входит в рассматриваемый в работе класс.

При $r = 0$ имеем $a_1 = a_2 = b_2 = \alpha_1 = \beta_2 = s = 0$.

Если $t \neq 0$, то эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ задается посредством $\pi : \bar{\mathfrak{g}} \to \bar{\mathfrak{g}}'$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = 1, 2$, $\pi(u_i) = (1/t)u_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. У пары $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ $[e_1, u_1] = [e_2, u_2] = 0$, $[e_2, u_3] = e_2 + u_1$, $[u_1, u_2] = 0$, $[u_1, u_3] = \alpha u_1$, $[u_2, u_3] = \beta e_1 + \gamma e_2 + \delta u_1 + \alpha u_2$. Заметим, что любая пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ такого вида однозначно определяется набором параметров $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, а две пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ с наборами $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ и $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ соответственно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$, такие, что $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = b(\alpha + \beta - 1)r/a + a\gamma$, $\delta' = a\delta - b/a + c$. Действительно, предположим, что пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$ эквивалентны при помощи $\pi : \bar{\mathfrak{g}} \to \bar{\mathfrak{g}}'$. Пусть $H = (h_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 5}$ – матрица отображения π. Поскольку $\pi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}'$, имеем $h_{ij} = 0$ при

$3 \leqslant i \leqslant 5$ и $j = 1, 2$. Поскольку π — изоморфизм алгебр Ли, $\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)]$ для $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Проверив это условие для векторов из базиса, получим искомый результат. Таким образом, классификация (с точностью до эквивалентности) пар указанного вида сводится к классификации четверок $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ с точностью до преобразований, определенных ранее. После прямых вычислений получим, что каждая четверка эквивалентна только одной из следующих: $(\alpha, \beta, 0, 0)$, $(\alpha, 1-\alpha, 1, 0)$. Соответствующие пары – 2.13.8 и 2.13.7.

Если $t = 0$, то рассуждениями, аналогичными приведенным выше, получаем пары, являющиеся редуктивными, не входящие в рассматриваемый в работе класс.

Аффинная связность в случаях 2.13.7, 2.13.8 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 1/2+p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1}+1/2 & r_{1,2}+q_{1,3} \\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3}+1 \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны в случае 2.13.7

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & {p_{1,3}}^2+p_{1,3}-\alpha p_{1,3} \\ 0 & 0 & -\alpha p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3/4+\alpha/2 & 3q_{1,3}/2+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-1-\alpha q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}-3/4+{p_{1,3}}^2+\alpha/2-\alpha p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\alpha \neq 3/2$ тензор кривизны ненулевой, в случае 2.13.8 —

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & {p_{1,3}}^2+p_{1,3}-\alpha p_{1,3} \\ 0 & 0 & -\alpha p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4-\beta-\alpha/2 & 3q_{1,3}/2+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-\alpha q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}+1/4+{p_{1,3}}^2-\beta-\alpha/2-\alpha p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\beta \neq 1/4 - \alpha/2$ тензор кривизны ненулевой, тензор кручения — $(0, 0, 0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1}-\alpha, 0, 0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2}, p_{1,3}-r_{1,1}-\alpha, 0)$. □

Лемма 3. *Любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 3.25, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и только одной из пар 3.25.25, 3.25.26 (при $\delta = 0, 1$ соответственно):*

3.25.25(26).	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_2	0	u_1	e_1
e_2	0	0	0	0	0	u_1
e_3	e_2	0	0	0	0	$-e_3+u_2$
u_1	0	0	0	0	0	$\alpha e_2+(1+\beta)u_1$
u_2	$-u_1$	0	0	0	0	$\delta e_2+\alpha e_3+\beta u_2$
u_3	$-e_1$	$-u_1$	e_3-u_2	$-\alpha e_2-(1+\beta)u_1$	$-\delta e_2-\alpha e_3-\beta u_2$	0

(*здесь* $\alpha < -(\beta+1)^2/4$).

Доказательство. С учетом тождества Якоби получаем $[e_1,u_3]=pe_1+re_3$, $[e_2,u_2]=se_2$, $[e_3,u_2]=te_1+2se_3$, $[e_3,u_3]=-pe_3+u_2$, $[u_1,u_2]=-\gamma_2 se_2-su_1$, $[u_1,u_3]=(rt+2sp)e_1+b_2e_2+(\gamma_2+p)u_1$, $[u_2,u_3]=\gamma_1 se_1+c_2e_2+b_2e_3+\gamma_1u_1+\gamma_2u_2+2su_3$, $\gamma_2 t-2pt=0$, $2\gamma_2 s-2sp-tr=0$, $rs=0$, $s(tr+2sp)=0$, $\gamma_2 sp+2\gamma_2^2 s-3sb_2=0$, $rt+2\gamma_2 s+4sp=0$. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в случае 2.13.

Аффинная связность в случаях 3.25.25, 3.25.26 имеет вид

$$\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&p_{1,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}r_{1,1}&-q_{1,3}&r_{1,3}\\0&r_{1,1}+1&0\\0&0&r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix},$$

заменой базиса можно получить $r_{1,3}=0$, тензор кривизны в случаях 3.25.25 и 3.25.26 ($\delta=0,1$ соответственно) —

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0&0&{p_{1,3}}^2-\alpha-p_{1,3}-p_{1,3}\beta\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0&0&2q_{1,3}p_{1,3}-\delta-\beta q_{1,3}\\0&0&{p_{1,3}}^2-\alpha-p_{1,3}-p_{1,3}\beta\\0&0&0\end{pmatrix},$$

при $\alpha<-(\beta+1)^2/4$ тензор кривизны ненулевой. Тензор кручения в случаях 3.25.25, 3.25.26 — $(0,0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1}-1-\beta,0,0)$, $(2q_{1,3},p_{1,3}-r_{1,1}-1-\beta,0)$. □

Лемма 4. *Любая нередуктивная пара* $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ *типа 2.20, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и только одной из пар 2.20.3, 2.20.6, 2.20.8, 2.20.9, 2.20.12, 2.20.14, 2.20.22:*

2.20.3, 2.20.8.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	e_1+u_1	0
e_2	0	0	0	δe_1+e_2	u_1
u_1	0	0	0	$2u_1$	0
u_2	$-e_1-u_1$	$-\delta e_1-e_2$	$-2u_1$	0	e_2-u_3
u_3	0	$-u_1$	0	$-e_2+u_3$	0

,

(*здесь* $\delta=0,1$),

2.20.6.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	0
e_2	0	0	0	e_1	u_1
u_1	0	0	0	0	0
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0	e_2
u_3	0	$-u_1$	0	$-e_2$	0

,

2.20.12, 2.20.14.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	$-2e_1$
e_2	0	0	0	δe_1	$-e_2+u_1$
u_1	0	0	0	0	$-3u_1$
u_2	$-u_1$	$-\delta e_1$	0	0	e_2-u_2
u_3	$2e_1$	e_2-u_1	$3u_1$	u_2-e_2	0

(*здесь* $\delta=\pm1$),

2.20.9.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	αe_1
e_2	0	0	0	0	$u_1+(\alpha+1)e_2$
u_1	0	0	0	0	$2\alpha u_1$
u_2	$-u_1$	0	0	0	$e_1+\alpha u_2$
u_3	$-\alpha e_1$	$-u_1-(\alpha+1)e_2$	$-2\alpha u_1$	$-e_1-\alpha u_2$	0

,

2.20.22.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	αe_1
e_2	0	0	0	e_1	$u_1+(\alpha+1)e_2$
u_1	0	0	0	0	$(\alpha-1)u_1$
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0	$-u_2$
u_3	$-\alpha e_1$	$-u_1-(\alpha+1)e_2$	$(1-\alpha)u_1$	u_2	0

.

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{a}=\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}e_2\oplus\mathbb{R}u_1$ — коммутативная подалгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{a}=Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\mathfrak{g})$. Докажем, что $\mathfrak{a}$ – идеал $\bar{\mathfrak{g}}$. Очевидно, что $[e_1,x]\in\mathfrak{a}$ и $[e_2,x]\in\mathfrak{a}$ для всех $x\in\bar{\mathfrak{g}}$. Предположим, что существует $x\in\bar{\mathfrak{g}}$, такое, что $[u_1,x]\notin\mathfrak{a}$. Тогда существует $y\in\mathfrak{g}$, такое, что $\big[y,[u_1,x]\big]\neq 0$. Но $\big[u_1,[x,y]\big]=0$ (поскольку $[x,y]\in\mathfrak{a}$) и $\big[x,[y,u_1]\big]=0$ (поскольку $[y,u_1]=0$). Тождество Якоби для тройки (x,y,u_1) $\big[y,[u_1,x]\big]+\big[u_1,[x,y]\big]+\big[x,[y,u_1]\big]=0$ не выполняется, приходим к противоречию, поэтому $\mathfrak{a}$ — коммутативный идеал $\bar{\mathfrak{g}}$.

Если алгебра Ли не содержит подалгебр, дополнительных к $\mathfrak{a}$, то $[\,e_1,e_2\,]=0$, $[\,e_1,u_1\,]=0$, $[\,e_1,u_2\,]=u_1$, $[\,e_1,u_3\,]=0$, $[\,e_2,u_1\,]=0$, $[\,e_2,u_2\,]=0$, $[\,e_2,u_3\,]=u_1$. Поскольку $\mathfrak{a}$ — идеал, можно считать, что $[\,u_1,u_2\,]=a_1e_1+a_2e_2+\alpha_1u_1$, $[\,u_1,u_3\,]=b_1e_1+b_2e_2+\beta_1u_1$, $[\,u_2,u_3\,]=c_1e_1+c_2e_2+\gamma_1u_1+\gamma_2u_2+\gamma_3u_3$. Использовав тождество Якоби, определим, что $[\,u_1,u_2\,]=-\gamma_3u_1$, $[\,u_1,u_3\,]=\gamma_2u_1$. Положим $u_2'=u_2+x_1e_1+x_2e_2+x_3u_1$ и $u_3'=u_3+y_1e_1+y_2e_2+y_3u_1$. Подпространство $\mathbb{R}u_2'\oplus\mathbb{R}u_3'$ не является подалгеброй, дополнительной к $\mathfrak{a}$, тогда и только тогда, когда уравнение $[\,u_2',u_3'\,]=su_2'+tu_3'$ неразрешимо (относительно $s,t,\ x_i,y_j,\ i,j=\overline{1,3}$). Отсюда следует, что $s=\gamma_2$, $t=\gamma_3$, а переменные x_i,y_j удовлетворяют уравнениям $\gamma_2x_1+\gamma_3y_1=c_1$, $\gamma_2x_2+\gamma_3y_2=c_2$, $y_1-x_2=\gamma_1$. Система неразрешима, если $\gamma_2=\gamma_3=0$ и $c_1^2+c_2^2\neq 0$. В этом случае пара является редуктивной и не входит в рассматриваемый в работе класс. Аналогично рассматриваются другие случаи.

Если алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ содержит подалгебру $\mathfrak{b}$, дополнительную к идеалу $\mathfrak{a}$, то пусть d — проекция $\bar{\mathfrak{g}}$ на $\mathfrak{a}$, соответствующая разложению $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}$. Тогда $d\in Der(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})=\{\phi\in Der(\bar{\mathfrak{g}})|\,\phi(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}\}$. Действительно, поскольку $\mathfrak{g}\in\mathfrak{a}$, имеем $d(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$. Для любой дополнительной подалгебры $\mathfrak{b}$ построим алгебру Ли $\bar{\mathfrak{p}}=\bar{\mathfrak{p}}(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{b})$ следующим образом: $\bar{\mathfrak{p}}=\bar{\mathfrak{g}}\times\mathbb{R}$, где скобочная операция $\big[(x,a),(y,b)\,\big]=\big([\,x,y\,]+\mathrm{ad}(y)-bd(x),0\big)$. Здесь d — проекция $\bar{\mathfrak{g}}$ на идеал $\mathfrak{a}$. Заметим, что $(\bar{\mathfrak{p}},\mathfrak{p})$ — изотропно-точная пара типа 3.20 ($\lambda=\mu=0$), пары $(\bar{\mathfrak{p}},\mathfrak{p})$, соответствующие различным дополнительным подалгебрам $\mathfrak{b}$, попарно эквивалентны. Поскольку $\dim\bar{\mathfrak{p}}=\dim\bar{\mathfrak{g}}+1$, $\bar{\mathfrak{g}}$ — максимальная подалгебра в $\bar{\mathfrak{p}}$ такая, что $\bar{\mathfrak{g}}\supset D\bar{\mathfrak{p}}$. Более того, алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ однозначно определяется подалгеброй $\mathfrak{g}$, а именно $\mathfrak{g}=\bar{\mathfrak{g}}\cap\mathfrak{p}$. Поэтому для того чтобы найти все пары, достаточно: для любой пары $(\bar{\mathfrak{p}},\mathfrak{p})$ типа 3.20 ($\lambda=\mu=0$) отыскать (с точностью до действия группы $Aut(\bar{\mathfrak{p}},\mathfrak{p})$) все максимальные подалгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ в $\bar{\mathfrak{p}}$ коразмерности 1 такие, что $\bar{\mathfrak{g}}\supset D\bar{\mathfrak{p}}$; для любой найденной подалгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ построить пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}=\bar{\mathfrak{g}}\cap\mathfrak{p}$; выбрать изотропно-точные пары типа 2.20 из полученных. Проведя вычисления, получим искомый результат.

Аффинные связности имеют следующий вид:

2.20.3 ($\delta=0$), 2.20.8 ($\delta=1$)

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2}+1 & p_{1,3}\\ 0 & \delta & q_{1,1}+1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ 0 & r_{1,1} & 0\\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix},\qquad \delta=0,1,$$

2.20.6

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 1 & q_{1,1}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ 0 & r_{1,1} & 0\\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix},$$

2.20.9 ($\delta=0$), 2.20.22 ($\delta=1$)

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & \delta & q_{1,1}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ 0 & r_{1,1}+\alpha & 0\\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}+\alpha+1\end{pmatrix}, \quad \delta=0,1,$$

2.20.12 ($\delta=1$), 2.20.14 ($\delta=-1$)

$$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & p_{1,3}\\ 0 & \delta & q_{1,1}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ 0 & r_{1,1}-2 & 0\\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3}-1\end{pmatrix}, \quad \delta=\pm1.$$

Тензоры кривизны соответственно:
2.20.3 ($\delta=0$), 2.20.8 ($\delta=1$)

$$\begin{pmatrix}0 & {p_{1,2}}^2-p_{1,2}+\delta p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3}-p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & p_{1,2}p_{1,3} & {p_{1,3}}^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}r_{1,1} & q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-\delta r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-1\\ 0 & p_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1} & {p_{1,3}}^2\\ 0 & p_{1,2}-{p_{1,2}}^2-\delta p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix}, \quad \delta=0,1,$$

2.20.6

$$\begin{pmatrix}0 & {p_{1,2}}^2+p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & p_{1,2}p_{1,3} & {p_{1,3}}^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-1\\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} & {p_{1,3}}^2\\ 0 & -{p_{1,2}}^2-p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3}\end{pmatrix},$$

2.20.9

$$\begin{pmatrix}0 & {p_{1,2}}^2 & p_{1,2}p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & -\alpha p_{1,2}+p_{1,2}p_{1,3} & {p_{1,3}}^2-\alpha p_{1,3}+p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-\alpha q_{1,1} & q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-1 & q_{1,3}p_{1,3}+q_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}\\ 0 & p_{1,2}p_{1,3}-\alpha q_{1,1}-\alpha p_{1,2} & {p_{1,3}}^2-\alpha p_{1,3}+p_{1,3}\\ 0 & -{p_{1,2}}^2 & -p_{1,2}p_{1,3}-\alpha q_{1,1}\end{pmatrix},$$

2.20.12 ($\delta=1$), 2.20.14 ($\delta=-1$)

$$\begin{pmatrix}0 & {p_{1,2}}^2+\delta p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & p_{1,2}+p_{1,2}p_{1,3} & {p_{1,3}}^2+2p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} q_{1,1} & -q_{1,2}+q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-\delta r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3}-1 \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3}+q_{1,1}+p_{1,2} & {p_{1,3}}^2+2p_{1,3} \\ 0 & -{p_{1,2}}^2-\delta p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3}+q_{1,1} \end{pmatrix}, \qquad \delta=\pm 1,$$

2.20.22

$$\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2+p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} q_{1,1} & p_{1,2}\alpha+p_{1,2}p_{1,3}+q_{1,2} & {p_{1,3}}^2+p_{1,3}\alpha+p_{1,3}+q_{1,3} \\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 1 & q_{1,1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & q_{1,2}\alpha+q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,2}p_{1,2}-r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3}+q_{1,3}\alpha+q_{1,3}-r_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} & {p_{1,3}}^2+p_{1,3} \\ 0 & -1-{p_{1,2}}^2-p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3} \end{pmatrix},$$

а тензоры кручения:
2.20.3, 2.20.8 — $(p_{1,2}-q_{1,1}-2,0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1},0,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},q_{1,1}+2-p_{1,2})$;
2.20.6 — $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1},0,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1},q_{1,1}-p_{1,2})$;
2.20.9 — $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1}-2\alpha,0,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1}-2\alpha,q_{1,1}-p_{1,2})$;
2.20.12, 2.20.14 — $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1}+3,0,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1}+3,q_{1,1}-p_{1,2})$;
2.20.22 — $(p_{1,2}-q_{1,1},0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1}-\alpha+1,1,0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},p_{1,3}-r_{1,1}-\alpha+1,q_{1,1}-p_{1,2})$.

Очевидно, что, например, в случаях 2.20.3, 2.20.6, 2.20.8 для того чтобы тензор кривизны был нулевым, требуется $p_{1,3}=0$, но тогда $R(u_2,u_3)\neq 0$ при любых значениях остальных параметров. В остальных случаях рассуждения аналогичны. □

Аналогично любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ типа 3.20, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и только одной из пар 3.20.22, 3.20.27:

$3.20.22.\lambda=0,\mu=1/2$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$(1/2)e_3$	u_1	0	$(1/2)u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(1/2)e_3$	0	0	0	e_3	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	$2u_1$	0
u_2	0	$-u_1$	$-e_3$	$-2u_1$	0	e_3-u_3
u_3	$-(1/2)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3+u_3$	0

,

$3.20.27.\lambda=1/5,\mu=2/5$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(4/5)e_2$	$(3/5)e_3$	u_1	$(1/5)u_2$	$(2/5)u_3$
e_2	$-(4/5)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(3/5)e_3$	0	0	0	e_2	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-(1/5)u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	e_3
u_3	$-(2/5)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3$	0

.

В случае 3.20.27 аффинная связность и тензор кривизны имеют вид соответственно

$$\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix},$$

очевидно, что тензор кривизны ненулевой; тензор кручения нулевой.

В случае 3.20.22 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1}+p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1}+1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

заменой базиса можно получить $r_{1,3}=0$, а тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & {p_{1,2}}^2-2p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}-{p_{1,2}}^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны ненулевой при любых значениях параметра $p_{1,2}$.

Тензор кручения — $(p_{1,2}-q_{1,1}-2,0,0)$, $(0,0,0)$, $(0,0,q_{1,1}+2-p_{1,2})$.

Любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ типа 1.5, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна 1.5.21, где

1.5.21.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_1	u_1
u_1	0	0	u_1	$-e_1$
u_2	$-e_1$	$-u_1$	0	0
u_3	$-u_1$	e_1	0	0

Аффинная связность в случае 1.5.21 —

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{2,2} & q_{2,3} \\ 0 & 0 & q_{1,1}-1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1}+p_{1,3} \end{pmatrix},$$

тензор кривизны —

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2}-q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2} & p_{1,2}q_{2,3}-2p_{1,3}-q_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1}-2p_{2,3}-q_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} & p_{1,2}r_{2,2}+p_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}p_{1,2} & p_{1,2}r_{2,3}+{p_{1,3}}^2-r_{1,2}p_{2,3}+1 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & p_{2,3}r_{1,1}+2p_{2,3}p_{1,3}-r_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -q_{1,2}p_{2,3} & q_{1,1}r_{1,2}+q_{1,2}r_{2,2}+q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}q_{1,2}-r_{1,2}q_{2,2} & q_{1,2}r_{2,3}+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}q_{2,3}+r_{1,3} \\ -q_{2,2}p_{2,3}+p_{2,3}q_{1,1} & p_{1,2}q_{2,3}+q_{1,2}p_{2,3} & \begin{array}{r} q_{2,2}r_{2,3}+q_{2,3}r_{1,1}+q_{2,3}p_{1,3}+ \\ +p_{2,3}q_{1,3}-r_{2,2}q_{2,3}-r_{2,3}q_{1,1}+r_{2,3} \end{array} \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2}-p_{1,2}q_{2,2} & -p_{1,2}q_{2,3} \end{pmatrix},$$

а тензор кручения — $(p_{1,2}-q_{1,1}-1,0,0)$, $(p_{1,3}-r_{1,1},2p_{2,3},0)$, $(q_{1,3}-r_{1,2},q_{2,3}-r_{2,2}, q_{1,1}+1-p_{1,2})$, при любых значениях параметров тензор кривизны ненулевой.

Продолжая таким же образом для всех подалгебр, получаем, что трехмерных нередуктивных пар, допускающих инвариантные связности только ненулевой кривизны, за исключением представленных в доказательстве теоремы, не существует. □

Таким образом, нередуктивные пространства, не допускающие связностей нулевой кривизны локально имеют вид 4.21.24 ($\alpha < -1/4$), 4.21.25 ($\alpha < -1/4$), 3.20.22, 3.20.27, 3.25.25 ($\alpha < -(\beta+1)^2/4$), 3.25.26 ($\alpha < -(\beta+1)^2/4$), 2.13.7 ($\alpha \neq 3/2$), 2.13.8 ($\beta \neq 1/4 - \alpha/2$), 2.20.3, 2.20.6, 2.20.8, 2.20.9, 2.20.12, 2.20.14, 2.20.22, 1.5.21. Заметим, что у всех найденных нередуктивных пространств группа преобразований разрешима, т.е. нередуктивных пространств с неразрешимой группой преобразований, допускающих связности только ненулевой кривизны, не существует.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описаны все трехмерные нередуктивные однородные пространства, допускающие инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, что эквивалентно описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли, а также сами аффинные связности на указанных пространствах, их тензоры кривизны и кручения.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также иметь приложения в различных областях геометрии, топологии, дифференциальных уравнений, анализа, алгебры, в общей теории относительности, которая, с математической точки зрения, базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др., поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

Библиографический список

1. *Lie S., Engel F.* Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig : Teubner, 1893. Vol. 3. 830 p.
2. *Горбацевич В. В., Онищик А. Л.* Группы Ли преобразований // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундаментальные направления. М. : ВИНИТИ АН СССР, 1988. Т. 20. С. 103–240.
3. *Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундаментальные направления. М. : ВИНИТИ АН СССР, 1988. Т. 28. С. 5–297.
4. *Можей Н. П.* Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. 394 с.
5. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. М. : Наука, 1966. 496 с.
6. *Онищик А. Л.* Топология транзитивных групп Ли преобразований. М. : Физматлит, 1995. 384 с.
7. *Nomizu K.* Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. J. Math. 1954. Vol. 76, № 1. P. 33–65.
8. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. N. Y. : John Wiley and Sons, 1963. Vol. 1; 1969. Vol. 2.
9. *Можей Н. П.* Трехмерные однородные пространства, не допускающие инвариантных связностей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 413–421. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-413-421.
10. *Рашевский П. К.* Симметрические пространства аффинной связности с кручением // Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. 1969. № 8. С. 82–92.

Образец для цитирования:

Можей Н. П. Связности ненулевой кривизны на трехмерных нередуктивных пространствах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 381–393. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-381-393.

Connections of Nonzero Curvature on Three-dimensional Non-reductive Spaces

N. P. Mozhey

Natalya P. Mozhey, orcid.org/0000-0001-9237-7208, Belarussian State University of Informatics and Radioelectronics, 6, P. Brovki Str., Minsk, Belarus, 220013, mozheynatalya@mail.ru

When a homogeneous space admits an invariant affine connection? If there exists at least one invariant connection then the space is isotropy-faithful, but the isotropy-faithfulness is not sufficient for the space in order to have invariant connections. If a homogeneous space is reductive, then the space admits an invariant connection. The purpose of the work is a description of three-dimensional non-reductive homogeneous spaces, admitting invariant affine connections of nonzero curvature only, and the affine connections, curvature and torsion tensors. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, an affine connection, curvature and torsion tensors, a reductive space are defined. The local description of three-dimensional non-reductive homogeneous spaces, admitting connections of nonzero curvature only, is given. The local classification of such spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. All invariant affine connections on those spaces are described, curvature and torsion tensors are found.

Key words: affine connection, curvature tensor, reductive space, transformation group, Lie algebra.

References

1. Lie S., Engel F. *Theorie der Transformationsgruppen*. Leipzig, Teubner, 1893, vol. 3. 830 p.
2. Gorbatsevich V. V., Onishchik A. L. Lie groups of transformations. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.* Moscow, VINITI, 1988, vol. 20, pp. 103–240 (in Russian).
3. Alekseevskii D. V., Vinogradov A. M., Lychagin V. V. Basic ideas and concepts of differential geometry. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.* Moscow, VINITI, 1988, vol. 28, pp. 5–297 (in Russian).
4. Mozhey N. P. *Trekhmernye izotropno-tochnye odnorodnye prostranstva i sviaznosti na nikh* [Three-dimensional isotropy-faithful homogeneous spaces and connections on them]. Kazan', Kazan' Univ. Press, 2015. 394 p. (in Russian).
5. Petrov A. Z. *Novyye metody v obshchey teorii otnositel'nosti* [New methods in the general theory of relativity]. Moscow, Nauka, 1966. 496 p. (in Russian).
6. Onishchik A. L. *Topologiya tranzitivnykh grupp Li preobrazovaniy* [Topology of transitive Lie transformation groups]. Moscow, Fizmatlit, 1995. 384 p. (in Russian).
7. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *Amer. J. Math.*, 1954, vol. 76, no. 1, pp. 33–65.
8. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*. New York, John Wiley and Sons, 1963, vol. 1; 1969, vol. 2.
9. Mozhey N. Three-dimensional Homogeneous Spaces, Not Admitting Invariant Connections. *Izv. Saratov Univ. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 413–421 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-413-421.
10. Rashevski P. K. Simmetricheskiye prostranstva affinnoy svyaznosti s krucheniyem [Symmetric spaces of affine connection with torsion]. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu* [Proceedings of the seminar on vector and tensor analysis], 1969, vol. 8, pp. 82–92 (in Russian).

Cite this article as:

Mozhey N. P. Connections of Nonzero Curvature on Three-dimensional Non-reductive Spaces. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 381–393 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-381-393.

УДК 517.51

ИСПРАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛАГРАНЖА В УЗЛАХ, БЛИЗКИХ К УЗЛАМ ЛЕЖАНДРА

В. В. Новиков

Новиков Владимир Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и стохастического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83
vvnovikov@yandex.ru

Известно, что интерполяционный процесс Лагранжа непрерывной функции с узлами в нулях многочленов Чебышева может расходиться всюду (с произвольными узлами –- почти всюду) подобно ряду Фурье суммируемой функции. В то же время известно, что любую измеримую (конечную п.в.) функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры так, что ее ряд Фурье станет равномерно сходящимся (так называемое усиленное C-свойство). Возникает вопрос, не обладает ли класс непрерывных функций подобным свойством по отношению к интерполяционному процессу по той или иной матрице узлов? В настоящей работе показано, что существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma$, как угодно близкая к матрице узлов Лежандра такая, что после исправления (с сохранением непрерывности) функции $f \in C[-1,1]$ на множестве как угодно малой меры, интерполяционный процесс с узлами $\mathfrak{M}\gamma$ будет сходится к исправленной функции равномерно на $[a,b] \in (-1,1)$.

Ключевые слова: интерполяция Лагранжа, ортогональные многочлены Лежандра, исправление функций.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-394-401

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\alpha,\beta > -1$, $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^\infty$ — последовательность многочленов Якоби, ортогональных на отрезке $[-1,1]$, с весом $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, и пусть

$$-1 < x_{n,n}^{(\alpha,\beta)} < x_{n-1,n}^{(\alpha,\beta)} < \ldots < x_{1,n}^{(\alpha,\beta)} < 1, \qquad n \geqslant 1,$$

— нули многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания. Для функции f, заданной на $[-1,1]$, обозначим через $L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)$ многочлен Лагранжа, интерполирующий ее в узлах n-й строки матрицы $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)} = \{x_{i,n}^{(\alpha,\beta)} :\ i = 1,\ldots,n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Для частного случая $\alpha = \beta = 0$ (многочлены Лежандра) узлы интерполирования будем обозначать как $x_{i,n} := x_{i,n}^{(0,0)}$.

Хорошо известно [1, 2], что интерполяционный процесс $\{L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)\}_{n=1}^\infty$ для $f \in C[-1,1]$ при $\alpha = \beta = -1/2$ может расходиться всюду (для произвольных узлов — почти всюду [3]) подобно ряду Фурье суммируемой функции. В то же время известно ([4], см. также [5]), что любую измеримую (конечную почти всюду) функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры так, что ее ряд Фурье станет равномерно сходящимся (усиленное C-свойство по терминологии Н. К. Бари). Возникает вопрос, не обладает ли класс непрерывных функций подобным свойством по отношению к интерполяционному процессу по той или иной матрице узлов? Здесь для случая $\alpha = \beta = 0$ показано, что существует матрица узлов $\mathfrak{M}_\gamma$, как угодно близкая к $\mathfrak{M}^{(0,0)}$ такая, что после исправления (с сохранением непрерывности) функции $f \in C[-1,1]$ на множестве как угодно малой меры интерполяционный процесс с узлами $\mathfrak{M}\gamma$ будет сходится к исправленной функции равномерно внутри $[-1,1]$. Доказательство проводится по схеме, предложенной в [6]. Отметим, что для самой матрицы $\mathfrak{M}^{(0,0)}$ (и тем более для $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}$ с произвольными α, β) вопрос открыт.

Теорема. *Пусть последовательность $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{k,n}\}_{k=1,n=1}^{n,\infty}$ со следующими свойствами:*

1) $|x_{k,n} - y_{k,n}| < \gamma_n$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$;

2) для любых $f \in C[-1,1]$, $-1 < a < b < 1$ и $0 < \delta < b - a$ найдутся функция $g \in C[-1,1]$ и множество $E \subset [a,b]$, $\operatorname{mes} E > b - a - \delta$ такие, что $f = g$ на E и $\lim\limits_{n\to\infty} \|L_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, \cdot) - g\|_{C[a,b]} = 0$.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ЛЕММЫ

Пусть отрезок $[a,b] \subset (-1,1)$ и числа $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ таковы, что $-1 < a-\varepsilon' < a-\varepsilon < a < b < b+\varepsilon < b+\varepsilon' < 1$. Обозначим $I = [a-\varepsilon', b+\varepsilon']$. Пусть далее $f \in C[-1;1]$, $n \geqslant 3$, и $\mathfrak{M}:\ -1 < y_{n,n} < y_{n-1,n} < \ldots < y_{1,n} < 1$ — произвольная матрица узлов интерполирования. Положим $\Delta_{i,n} = (y_{2i+1,n}, y_{2i-1,n})$, $\overline{\Delta}_{i,n} = [y_{2i+1,n}, y_{2i-1,n}]$, $|\Delta_{i,n}| = y_{2i-1,n} - y_{2i+1,n}$, $\Delta^2 f_i = f(y_{2i+1,n}) - 2f(y_{2i,n}) + f(y_{2i-1,n})$, $d_1(\mathfrak{M}, n) = \min\limits_{i:\, \Delta_{i,n} \subset I} |\Delta_{i,n}|$, $d_2(\mathfrak{M}, n) = \max\limits_{i:\, \Delta_{i,n} \subset I} |\Delta_{i,n}|$,

$$R_{n,p}(\mathfrak{M}, f) = \left| \sum_{i:\, 0<|y_{p,n}-y_{2i,n}|<\varepsilon} \frac{\Delta^2 f_i}{p-2i} \right|, \qquad R_n(\mathfrak{M}, f) = \max_{p:\, y_{p,n} \in [a,b]} R_{n,p}(\mathfrak{M}, f),$$

и обозначим $\varphi(x) = (1-x^2)^{1/4}$, $F(x) = \varphi(x) f(x)$. Для произвольного конечного множества $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_m\} \subset \mathbb{R}$ через $d(A) := \min\limits_{i,j}\{|a_i - a_j| : a_i \neq a_j\}$ будем обозначать наименьшее положительное расстояние между его точками. Кроме того, как обычно, через C обозначаются абсолютные, вообще говоря различные, постоянные.

Лемма 1. *Пусть числа a, b, ε удовлетворяют указанным выше условиям. Тогда существует последовательность $\gamma = \{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}_+$ такая, что для любой $f \in C[-1;1]$ и любой матрицы узлов $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{i,n}\}$, для которой*

$$|y_{i,n} - x_{i,n}| < \gamma_n, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad n \geqslant 3, \tag{1}$$

равенство

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\mathfrak{M}_\gamma, F) = 0$$

будет необходимым и достаточным условием для равномерной сходимости к f на $[a,b]$ интерполяционного процесса $\{L_n(\mathfrak{M}_\gamma, f, x)\}$.

Доказательство. Утверждение леммы нетрудно получить, используя представление для разности $f(x) - L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)$ из [7], а также факт непрерывной зависимости фундаментальных многочленов интерполяции от узлов и $x \in [a,b]$. Данное предложение является аналогом критерия сходимости из [8] (см. также [9]). $\square$

Замечание. Известно [10], что для матрицы узлов Лежандра $\mathfrak{M}^{(0,0)}$ справедливо неравенство $d_2(\mathfrak{M}^{(0,0)},n)/d_1(\mathfrak{M}^{(0,0)},n) \leqslant C = C(a,b,\varepsilon')$ и, кроме того, $d_2(\mathfrak{M}^{(0,0)},n) \to 0$ при $n \to \infty$. В дальнейшем мы будем считать последовательность $\{\gamma_n\}$ стремящейся к 0 настолько быстро, что указанными свойствами обладают и величины $d_1(\mathfrak{M}_\gamma,n)$, $d_2(\mathfrak{M}_\gamma,n)$.

Лемма 2. *Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$ — последовательность из леммы 1 и $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{i,n}\}$ — любая фиксированная матрица узлов, удовлетворяющая условию (1). Пусть, далее, $\sigma > 0$ — произвольное достаточно малое число и конечный набор точек $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{m+1}$ таков, что $\lambda_{m+1} := a - \varepsilon' < \lambda_m < \dots < \lambda_1 < \lambda_0 := b + \varepsilon'$, $d(\Lambda) > \sigma$. Тогда найдется номер $n_0 = n_0(\sigma)$, зависящий только от σ, такой, что при $n > n_0$ равномерно по $p \in J_n(a,b) := \{p:\ y_{p,n} \in [a,b]\}$ будут верны неравенства*

$$Q_{p,n}(\Lambda) := \sum_i |p-2i|^{-1} \leqslant 3, \tag{2}$$

где суммирование идет по тем i, для которых $2i \neq p$, $\overline{\Delta}_{i,n} \subset I$ и $\Delta_{i,n} \cap \Lambda \neq \varnothing$.

Доказательство. Фиксируем $\sigma > 0$ и пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{m+1}$ удовлетворяет условиям леммы. Предположим, что $d_2(\mathfrak{M}_\gamma,n) < 4^{-1}d(\Lambda)$. Тогда $Q_{p,n}(\Lambda)$ можно представить в виде не более чем двух сумм $Q_{p,n}(\Lambda) = \Sigma_1 + \Sigma_2$, каждая из которых имеет вид $\Sigma_\nu = \sum\limits_{s=1}^{r(\nu)} 1/i_s^{(\nu)}$, $\nu = 1,2$, где $r(\nu) \leqslant m$ и положительные целые $i_s^{(\nu)}$, $s = 1,\dots,r(\nu)$, таковы, что

$$i_{s+1}^{(\nu)} - i_s^{(\nu)} \geqslant Cn\sigma, \qquad s = 1,\dots,r(\nu)-1. \tag{3}$$

Очевидно, что $i_1^{(\nu)} \geqslant 1$, а из (3) получаем $\sum\limits_{s=2}^{r(\nu)} 1/i_s^{(\nu)} \leqslant 1/2$, если только n больше некоторого $n_0^{(\nu)}(\sigma)$. Таким образом, (2) верно для всех $n > n_0(\sigma) = \max\{n_0^{(1)}; n_0^{(2)}\}$. Лемма доказана. □

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Пусть $f \in C[-1,1]$ — произвольная непрерывная функция и числа $a, b, \varepsilon, \varepsilon'$ выбраны и зафиксированы как указано выше, $F(x) = \varphi(x)f(x)$ и $0 < \delta < b-a$ — сколь угодно малое фиксированное число. Пусть далее $\gamma = \{\gamma_n\}$ — последовательность, для которой выполнены все сделанные выше предположения и $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{i,n}\}$ — любая матрица такая, что верно (1). Потребуем, чтобы все точки $\{y_{i,n}\}$ были попарно различными и не совпадали с узлами сетки $t_{k,j} := -1 + k2^{1-j}$, $k = 1,\dots,2^j$, $j \in \mathbb{N}$.

Положим $I_{k,j} := [-1+(k-1)2^{1-j}, -1+k2^{1-j}]$, $\tilde{F}_j(x) := \min\limits_{t \in I_{k,j}} F(t)$, $x \in I_{k,j}$, $k = 1,\dots,2^j$, $j \in \mathbb{N}$, $x \in [-1,1]$.

Последовательность $\{\tilde{F}_j(x)\}_{j=1}^\infty$ не убывает по j и равномерно сходится к F на $[-1,1]$, поскольку $\left\|F - \tilde{F}_j\right\|_{C[-1,1]} \leqslant \omega(F, 2^{1-j})$, где $\omega(F,\cdot)$ — модуль непрерывности функции F. Положим $F_j(x) = \tilde{F}_j(x) - \tilde{F}_{j-1}(x) \geqslant 0$, $\tilde{F}_0(x) \equiv A := \min\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} F(x)$. Тогда ряд $\sum\limits_{j=1}^\infty F_j(x)$ равномерно и абсолютно сходится к $F - A$ на $[-1,1]$. Докажем, что для всех $j = 1,2\dots$ и для любого $N_j \in \mathbb{N}$ существует функция $G_j \in C(I)$ такая, что

$$G_j(x) = F_j(x), \qquad x \in [-1,1]\backslash I, \tag{4}$$

$$0 \leqslant G_j(x) \leqslant F_j(x), \qquad x \in I, \tag{5}$$

$$\operatorname{mes}\{t \in [-1,1] : F_j\,(t) \neq G_j\,(t)\} < 2^{-j}\delta, \tag{6}$$

$$\max_n R_n(\mathfrak{M}_\gamma, G_j) \ \leqslant C\,\|F_j\|_{C(I)} \to 0 \qquad \text{при} \quad j \to \infty, \tag{7}$$

$$R_n(\mathfrak{M}_\gamma, G_j) = 0, \qquad n = 1, ..., N_j, \qquad j = 1, 2, ..., \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\mathfrak{M}_\gamma, G_j) = 0. \tag{9}$$

После того как функции $G_j(x)$ будут построены, мы покажем что $G(x) = A + \sum\limits_{j=1}^{\infty} G_j(x)$ — искомая.

Обозначим через L множество точек разрыва функции F_j, лежащих в I. Выберем номер $M_j > N_j$ так, чтобы при $n > M_j$ для всех индексов i суммы $R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, f)$, $p \in J_n(a,b)$, выполнялось условие $\Delta_{i,n} \in I$, и пусть $D_0 := L \cup \{y_{i,s} \in I : 1 \leqslant s \leqslant M_j\}$. В силу леммы 2 найдется номер $\mu(0)$, для которого

$$Q_{n,p}(D_0) \leqslant 3 \quad \forall\ n \geqslant \mu(0), \quad p \in J_n(a,b).$$

Пусть $\{\sigma_l\}_{l=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ — последовательность такая, что $\sigma \downarrow 0$ при $l \to \infty$, причем $\sigma_l/\sigma_{l-1} < 2^{-l}$, $l = 1, 2, \ldots$; окончательно мы подберем ее позже.

Для каждого $t \in D_0$ построим замкнутую окрестность $[t - \sigma_0, t + \sigma_0]$, при этом σ_0 выберем настолько малым, что:

1) $\sigma_0 < 4^{-1}d(\tilde{D}_0)$, где $\tilde{D}_0 := D_0 \cup \{y_{i,s} \in I : M_j + 1 \leqslant s \leqslant \mu(0)\}$;
2) общая длина окрестностей всех точек t из D_0 меньше, чем $2^{-j-1}\delta$;
3) $\max\{n :\ d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_0\} > \mu(0)$.

Для $x \in [-1,1]$ положим

$$G_{0,j}(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{если } x \in D_0, \\ F_j(x), \quad \text{если } x \in [-1,1] \setminus \cup_{t\in D_0}\,(t - \sigma_0, t + \sigma_0), \\ \text{линейная на } [t - \sigma_k, t] \text{ и } [t, t + \sigma_k],\ t \in D_0. \end{cases}$$

Предположим, что уже определены множества $D_0, \ldots, D_{l-1}$, выбраны числа $\sigma_0, \ldots, \sigma_{l-1}$ и построены функции $G_{0,j}, \ldots, G_{l-1,j}$, $l \geqslant 1$. Определим D_l, σ_l и построим $G_{l,j}$. Пусть $E_{u,v} := \cup_{s=u}^{v} \cup_{t\in D_s} [t - \sigma_s, t + \sigma_s]$ и $D_l := \{y_{i,s} :\ s = M_j + l,\ y_{i,s} \in I \setminus E_{0,l-1}\}$. Для конечного множества $D_l \cup P_{l-1}$, где $P_{l-1} := \cup_{s=0}^{l-1} \cup_{t\in D_s} \{t - \sigma_s;\ t;\ t + \sigma_s\}$, найдем, применяя лемму 2, число $\mu(l)$ такое, что:

1) $Q_{n,p}\,(D_l \cup P_{l-1}) < 3$, $\forall\ n \geqslant \mu(l)$, $p \in J_n(a,b)$;
2) $\mu(l) > \min\{n :\ d_2(\mathfrak{M}_\gamma, n) \leqslant \sigma_{l-1}\}$.

Теперь строим окрестности $[t - \sigma_l, t + \sigma_l]$, $t \in D_l$, выбирая σ_l так, что:

1) $\sigma_l < 4^{-1}d(\tilde{D}_l)$, где $\tilde{D}_l := D_l \cup \{y_{i,s} \in I \setminus E_{0,l-1} :\ M_j + l \leqslant s \leqslant \mu(l)\}$;
2) общая длина окрестностей всех точек t из D_l меньше, чем $2^{-j-l}\delta$;
3) $\max\{n :\ d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_l\} > \mu(l)$.

Обозначим $h_{k,j} := F_j(x)$, $x \in I_{k,j}$, и для $x \in [-1,1]$ положим

$$G_{l,j}(x) = \begin{cases} h_{k,j} \sum\limits_{s=1}^{l} 2^{-l}, \quad \text{если } x \in D_l \cap I_{k,j}, \\ G_{l-1,j}(x), \quad \text{если } x \in [-1,1] \setminus \cup_{t\in D_l}\,(t - \sigma_l, t + \sigma_l), \\ \text{линейная на } [t - \sigma_l, t] \text{ и } [t, t + \sigma_l],\ t \in D_l. \end{cases}$$

Определим функцию $G_j(x) := \lim\limits_{l\to\infty} G_{l,j}(x)$, $x \in [-1,1]$, $j \in \mathbb{N}$, и проверим для нее выполнение условий (7) и (9) (справедливость (4)–(6) и (8), а также условия $G_j \in C(I)$ очевидны). Пусть $n > M_j$. Определим номер l из условий (формально полагаем $\sigma_{-1} := 2$)

$$d_2(\mathfrak{M}, n) \leqslant \sigma_{l-1}, \tag{10}$$

$$\exists\, i_0 :\ |\Delta_{i_0,n}| > \sigma_l, \quad \Delta_{i_0,n} \subset I. \tag{11}$$

Из определения F_j следует, что все узлы, участвующие в построении числителей суммы $R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G_j)$, содержатся в множестве $E_{0,n}$. При этом $\Delta^2 G_{j,i} = 0$, если $\Delta_{i,n}$ целиком лежит на промежутке линейности функции G_j, т. е. если при некоторых s и $t \in D_s$ имеет место включение $\Delta_{i,n} \subset (t-\sigma_s, t) \cup (t, t+\sigma_s)$. Далее, по построению окрестности $[y_{i,s}-\sigma_s, y_{i,s}+\sigma_s]$ узлов строк с номерами $s = M_j + l, \ldots, \mu(l)$ попарно не пересекаются. Тогда, предположив в дополнение к (10), что $n \leqslant \mu(l)$, получим, что из условия $\Delta_{i,n} \subset I \backslash E_{0,l-1}$ следует равенство $G_j(y_{2i-1,n}) = G_j(y_{2i,n}) = G_j(y_{2i+1,n})$, так что для указанных i снова имеем $\Delta^2 G_{j,i} = 0$. С учетом высказанных соображений можно записать

$$R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G_j) = \left| \left(\sum_{i\in J_1} + \sum_{i \in J_2} \right) \frac{\Delta^2 f_i}{p-2i} \right| \equiv S_1 + S_2,$$

где

$$J_1 = \{ i :\ \Delta_{i,n} \cap P_{l-2} \neq \varnothing \}, \tag{12}$$

$$J_2 = \{ i :\ \Delta_{i,n} \cap \left(\cup_{t \in D_{l-1}} \{ t - \sigma_{l-1};\ t;\ t+\sigma_{l-1} \} \right) \neq \varnothing \}. \tag{13}$$

Разумеется, если n недостаточно велико, то множества J_1, J_2 могут оказаться пустыми. В этом случае соответствующие части суммы считаем равными нулю. Положим $c_j := \|G_j\|_{C(I)} = \|F_j\|_{C(I)}$. Тогда из определения G_j, учитывая, что $\sigma_l/\sigma_{l-1} < 2^{-l}$, $l = 1, 2, \ldots$ получаем

$$\left|\Delta^2 G_{j,i}\right| \leqslant 2c_j \max\left\{ \frac{\sigma_{l-1}}{\sigma_{l-2}};\ 2^{1-l} \right\} \leqslant \frac{Cc_j}{2^l}, \qquad i \in J_1, \tag{14}$$

$$\left|\Delta^2 G_{j,i}\right| \leqslant 2c_j 2^{1-l} = \frac{Cc_j}{2^l}, \qquad i \in J_2. \tag{15}$$

Так как $n > \mu(l-1)$, с учетом определения $\mu(l-1)$ и (14) имеем

$$S_1 \leqslant \frac{Cc_j}{2^l} Q_{n,p}(P_{l-2}) \leqslant \frac{Cc_j}{2^l}. \tag{16}$$

Аналогично

$$S_2 \leqslant \frac{Cc_j}{2^l} \left(Q_{n,p}(D_{l-1}) + Q_{n,p}(D^-_{l-1}) + Q_{n,p}(D^+_{l-1}) \right) \leqslant \frac{Cc_j}{2^l}, \tag{17}$$

где $D_s^- := \cup_{t\in D_s}\{t-\sigma_s\}$, $D_s^+ := \cup_{t\in D_s}\{t+\sigma_s\}$, $s = 0, 1, \ldots$ Таким образом, для n таких, что верно (10) и $n \leqslant \mu(l)$ мы получим

$$R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G_j) \leqslant \frac{Cc_j}{2^l}, \qquad p \in J_n(a,b). \tag{18}$$

Пусть теперь $n > \mu(l)$. Ясно, что $M_j + l + 1 < n$, кроме того, из (11) и определения $\mu(l+1)$ следует неравенство $n \leqslant \mu(l+1)$. Аналогично предыдущему получаем, что окрестности узлов строк с номерами от $M_j + l + 1$ до $\mu(l+1)$ попарно не пересекаются. Значит, можно записать

$$R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G_j) = \left| \left(\sum_{i \in J_1} + \sum_{i \in J_2} + \sum_{i \in J_3} \right) \frac{\Delta^2 f_i}{p - 2i} \right| \equiv S_1 + S_2 + S_3,$$

где J_1 и J_2 определены посредством (12) и (13), а $J_3 := \{i : \ \Delta_{i,n} \cap (D_l \cup D_l^- \cup D_l^+) \neq \neq \varnothing\}$. Для сумм S_1, S_2 и числителей суммы S_3 сохраняются прежние оценки, кроме того,

$$S_3 \leqslant \frac{Cc_j}{2^l} \left(Q_{n,p}(D_l) + Q_{n,p}(D_l^-) + Q_{n,p}(D_l^+) \right) \leqslant \frac{Cc_j}{2^l}.$$

Таким образом, для n, удовлетворяющих (11) и условию $n > \mu(l)$, мы снова получаем оценку (18). Итак, (18) верно при всех n. Поскольку $c_j \to 0$ при $j \to \infty$, из (18) следует (7). Кроме того, поскольку $l = l(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, из (18) следует также и (9).

Положим $G(x) = A + \sum\limits_{j=1}^{\infty} G_j(x)$, $g(x) = G(x)/\varphi(x)$, $x \in (-1,1)$, $g(\pm 1) := g(\pm 1 \mp 0)$. Так как $G_j \in C(I)$ и в силу (5) ряд сходится равномерно на I, имеем $G \in C(I)$. Кроме того, $G(x) = F(x)$, $x \in [-1,1] \backslash I$ и $G(a - \varepsilon' + 0) = F(a - \varepsilon')$, $G(b + \varepsilon' - 0) = F(b + \varepsilon')$, так что $G,\ g \in C[-1,1]$. Далее, из (6) следует, что

$$\mathrm{mes}\{x \in [-1,1] : F(x) \neq G(x)\} = \mathrm{mes}\{x \in [-1,1] : f(x) \neq g(x)\} < \delta. \qquad (19)$$

Подберем теперь последовательность $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$ так, чтобы для функции G выполнялось условие

$$\lim_{n \to \infty} R_n(\mathfrak{M}_\gamma, G) = 0. \qquad (20)$$

Возьмем в качестве M_1 произвольное натуральное число и предположим, что $M_1, \ldots, M_{j-1}$, $j \geqslant 2$, уже выбраны. За счет (9) можно подобрать M_j так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{s=1}^{j-1} R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G_s) < \frac{1}{j}, \qquad \forall\ n > M_j, \quad p \in J_n(a,b). \qquad (21)$$

Завершив индукцию по j и выбрав $\{M_j\}$, мы окончательно построим функцию G. Пусть n — достаточно большой номер. Определим j из условия $M_j < n \leqslant M_{j+1}$. Имеем

$$R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G) \leqslant \sum_{s=1}^{j-1} R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G_s) + R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, G_j) + R_{n,p}\left(\mathfrak{M}_\gamma, \sum_{s=j+1}^{\infty} G_s \right) \equiv$$
$$\equiv \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \qquad (22)$$

Из (21), (7) и (8) соответственно находим $\Sigma_1 < 1/j$, $\Sigma_2 < Cc_j$ и $\Sigma_3 = 0$. С учетом этих соотношений и того, что $j \to \infty$ при $n \to \infty$, из (22) получаем (20).

В силу леммы 1 из (20) следует равенство

$$\lim_{n \to \infty} \| L_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, \cdot) - g \|_{C[a,b]} = 0,$$

которое совместно с (19) показывает, что функция g является искомой. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Grünwald G.* Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome Stetiger Funktionen // Ann. Math. 1936. Vol. 37. P. 908–918.
2. *Marcinkiewicz J.* Sur la divergence des polynomes d'interpolation // Acta Litt. Sci. Szeged. 1936/37. Vol. 8. P. 131–135.
3. *Erdős P., Vertesi P.* On the almost everywhere divergence of Lagrange interpolatory polynomials for arbitrary system of nodes // Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 1980. Vol. 36, iss. 1–2. P. 71–89.
4. *Menchoff D.* Sur les seéries de Fourier des fonctions continues // Матем. сб. 1940. Т. 8(50), № 3. С. 493–518.
5. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматлит, 1961. 936 с.
6. *Новиков В. В.* Интерполяция типа Лагранжа – Якоби и аналог усиленного C-свойства // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 66–68.
7. *Неваи Г. П.* Замечания об интерполировании // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1974. Vol. 25, iss. 1–2. P. 123–144.
8. *Новиков В. В.* Критерий равномерной сходимости интерполяционного процесса Лагранжа – Якоби // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 2. С. 254–266. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-418-422.
9. *Привалов А. А.* Критерий равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Изв. вузов. Матем. 1986. № 5. С. 49–59.
10. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М. : Физматлит, 1962. 500 с.

Образец для цитирования:
Новиков В. В. Исправление функций и интерполяция Лагранжа в узлах, близких к узлам Лежандра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 394–401. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-394-401.

Adjustment of Functions and Lagrange Interpolation Based on the Nodes Close to the Legendre Nodes

V. V. Novikov

Vladimir V. Novikov, orcid.org/0000-0002-6147-1311, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, vvnovikov@yandex.ru

It is well known that the Lagrange interpolation of a continuous function based on the Chebyshev nodes may be divergent everywhere (for arbitrary nodes, almost everywhere) like the Fourier series of a summable function. On the other hand any measurable almost everywhere finite function can be "adjusted" in a set of arbitrarily small measure such that its Fourier series will be uniformly convergent. The question arises: does the class of continuous functions have a similar property with respect to any interpolation process? In the present paper we prove that there exists a matrix of nodes $\mathfrak{M}_\gamma$ arbitrarily close to the Legendre matrix with the following property: any function $f \in C[-1,1]$ can be adjusted in a set of arbitrarily small measure such that the interpolation process of adjusted continuous function g based on the nodes $\mathfrak{M}_\gamma$ will be uniformly convergent to g on $[a,b] \subset (-1,1)$.

Key words: Lagrange interpolation, Legendre orthogonal polynomials, adjustment of functions.

References

1. Grünwald G. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome Stetiger Funktionen. *Ann. Math.*, 1936, vol. 37, pp. 908–918.
2. Marcinkiewicz J. Sur la divergence des polynomes d'interpolation. *Acta Litt. Sci. Szeged*, 1936/37, vol. 8, pp. 131–135.
3. Erdős P., Vertesi P. On the almost everywhere divergence of Lagrange interpolatory polynomials for arbitrary system of nodes. *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.*, 1980, vol. 36, iss. 1–2. pp. 71–89.
4. Menchoff D. Sur les séries de Fourier des fonctions continues. *Rec. Math. (N.S)*, 1940, vol. 8(50), no. 3, pp. 493–518.
5. Bary N. K. *A treatise on trigonometric series*. Oxford, New York, Pergamon Press, 1964, vol. 1, 533 p.; vol. 2, 508 p. (Russ. ed. : Moscow, Fizmatlit, 1961. 936 p.)
6. Novikov V. V. Interpolyaciya tipa Lagranzha – Yakobi i analog usilennogo C-svojstva [Interpolation of the Lagrange – Jacobi type and an analogue of the strengthened C-property]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2007, iss. 9, pp. 66–68 (in Russian).
7. Nevai G. P. Zamechanija ob interpolirovanii [Remarks on interpolation]. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 1974, vol. 25, iss. 1–2, pp. 123–144 (in Russian).
8. Novikov V. V. A Criterion for Uniform Convergence of the Lagrange – Jacobi Interpolation Process. *Math. Notes*, 2006, vol. 79, no. 1, pp. 232–243. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-418-422.
9. Privalov A. A. A criterion for uniform convergence of Lagrange interpolation processes. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1986, vol. 30, no. 5, pp. 65–77.
10. Szegő G. *Orthogonal Polynomials*. Providence, Rhode Island, AMS, 1939. 440 p. (Russ. ed. : Moscow, Fizmatlit, 1962. 500 p.)

Cite this article as:

Novikov V. V. Adjustment of Functions and Lagrange Interpolation Based on the Nodes Close to the Legendre Nodes. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 394–401 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-394-401.

УДК 517.9

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВА ИНТЕГРАЛЬНО УБЫВАЮЩИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

И. А. Тришина

Тришина Ирина Алевтиновна, аспирант кафедры нелинейных колебаний, Воронежский государственный университет, 394036, Россия, Воронеж, Университетская пл., 1, i.a.trishina@gmail.com

В статье введен в рассмотрение и изучен новый класс почти периодических на бесконечности функций, который определяется с помощью подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций. Он является более широким по сравнению с классом почти периодических на бесконечности функций, введенным в работах А. Г. Баскакова (относительно подпространства исчезающих на бесконечности функций). Достаточно обратиться к теории аппроксимации для нового класса функций, где коэффициентами Фурье являются медленно меняющиеся на бесконечности функции относительно подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций. Сформулированы три эквивалентных определения почти периодической на бесконечности функции относительно интегрально убывающих на бесконечности функций. Для их исследования применяется теория банаховых модулей над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$ суммируемых функций. Почти периодические на бесконечности функции естественным образом возникают как решение дифференциальных уравнений. Получены критерии почти периодичности на бесконечности ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений вида $\dot{x}(t) = Ax(t) + z(t)$, $t \in \mathbb{J}$, где A — линейный оператор и z — интегрально убывающая на бесконечности функция, определённая на бесконечном промежутке $\mathbb{J}$, совпадающем с одним из множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$.

Ключевые слова: почти периодические на бесконечности функции, медленно меняющиеся на бесконечности функции, интегрально убывающие на бесконечности функции.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-402-418

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Теория почти периодических функций, созданная Г. Бором [1], получила существенное развитие в работах С. Бохнера (Bochner) [2], А. Безиковича (Besicovitch) [3], Ж. Фавара (Favard) [4], Б. М. Левитана, В. В. Степанова [5] и др. В частности, теория почти периодических функций дала толчок развитию гармонического анализа функций на группах [6].

Введем в рассмотрение основные функциональные пространства и сформулируем основные понятия, связанные с определением почти периодических на бесконечности функций. Пусть $\mathbb{J}$ совпадает с одним из множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$.

Пусть $C_b(\mathbb{J}, X)$ — банахово пространство непрерывных ограниченных функций, определенных на $\mathbb{J}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве X.

Пусть $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ — замкнутое подпространство равномерно непрерывных ограниченных функций. Через $C_0(\mathbb{J}, X)$ обозначим (замкнутое) подпространство функций $x \in C_b$, исчезающих на бесконечности, т. е. $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0$, $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$.

В пространстве $C_b(\mathbb{J}, X)$ рассмотрим операторы сдвига $S(t) : C_b(\mathbb{J}, X) \to C_b(\mathbb{J}, X)$, $(S(t)x)(\tau) = x(\tau + t)$, $\tau \in \mathbb{J}$, $t \in \mathbb{J}$, $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$.

Определение 1. Функцию $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ назовем *интегрально убывающей на бесконечности*, если

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|x(t+s)\|\, ds = 0.$$

Множество таких функций будем обозначать символом $C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$.

Введенный класс является более широким по сравнению с классом почти периодических на бесконечности функций, введенным в работе А. Г. Баскакова [7; см. так же 8, 9].

Теорема 1. $C_{0,int}$ — *банахово пространство.*

Символом $\mathscr{C}_0$ будем обозначать одно из двух подпространств $C_0(\mathbb{J}, X)$ или $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$. Далее используется запись $\mathscr{C}_0 \in \{C_0(\mathbb{J}, X), C_{0,int}(\mathbb{J}, X)\}$.

Определение 2. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности* функцией относительно подпространства $\mathscr{C}_0$, если для каждого $\alpha \in \mathbb{J}$ выполнено $S(\alpha)x - x \in \mathscr{C}_0$.

Отметим что в работах [8, 9] давалось определение медленно меняющейся функции с использованием подпространства $C_0 = C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. Свойства медленно меняющихся функций относительно подпространства C_0 также были отмечены в работах [9–12]. Множество всех медленно меняющихся на бесконечности функций из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ относительно подпространства $C_{0,int}$ будем обозначать через $C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$, относительно подпространства C_0 — через $C_{sl}(\mathbb{J}, X)$. Символом $\mathscr{C}_{sl}$ будем обозначать одно из двух подпространств $C_{sl}(\mathbb{J}, X)$, $C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$. Отметим, что $C_{sl}(\mathbb{J}, X) \subset C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$. Непосредственно из определения следует, что $C_{sl}(\mathbb{J}, X)$ является замкнутым подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, инвариантным относительно сдвигов функций.

Определение 3. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{J}$ называется *ε-периодом* функции $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$, если $\sup\limits_{t\in\mathbb{J}} \|x(t+\omega) - x(t)\| < \varepsilon$. Множество ε-периодов обозначим через $\Omega(x, \varepsilon)$.

Определение 4. Подмножество Ω из $\mathbb{R}$ называется *относительно плотным на* $\mathbb{J}$, если существует такое $l > 0$, что $[t, t+l] \cap \Omega \neq \varnothing$ для любого $t \in \mathbb{J}$.

Определение 5 (классическое определение Бора). Функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathscr{C}_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество ее ε-периодов $\Omega(x, \varepsilon)$ относительно плотно на $\mathbb{R}$, т. е. существует такое $l > 0$, что $[t, t+l] \cap \Omega(x, \varepsilon) \neq \varnothing$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Символом $AP(\mathbb{R}, X)$ обозначим банахово пространство почти периодических функций.

Определение 6. Функция $x \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$ называется *почти периодической* функцией, если она является сужением некоторой функцией из $AP(\mathbb{R}, X)$.

Определение 7. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{J}$ называется *ε-периодом* функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ относительно подпространства $\mathscr{C}_0$, если существует функция $x_0 \in \mathscr{C}_0(\mathbb{J}, X)$ такая, что $\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon$ Множество ε-периодов функции x обозначим через $\Omega_\infty(x, \varepsilon)$.

Определение 8. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathscr{C}_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x, \varepsilon)$ относительно плотно на $\mathbb{J}$.

Определение 9 (аппроксимационное). Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется почти периодической на бесконечности относительно подпространства $\mathscr{C}_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, функции $x_1, \dots, x_k \in C_{sl,int}$ и функцию $x_0 \in C_{0,int}$ такие, что

$$\sup_{t \in \mathbb{J}} \|x(t) - \sum_{k=1}^{n} x_k(t) e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon.$$

Множество почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $C_{0,int}$ обозначим символом $AP_{\infty,int}(\mathbb{J}, X)$. Имеет место включение $AP(\mathbb{J}, X) \subset AP_{\infty,int}(\mathbb{J}, X)$.

Одним из основных результатов статьи является следующая

Теорема 2. *Определения 8 и 9 эквивалентны.*

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}(t) = Ax + z(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad z \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X). \tag{1}$$

Предполагается, что множество $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_N\}$ состоит из простых собственных значений. Здесь символом $\sigma(A)$ обозначается спектр оператора A, и спектр оператора A обладает свойством $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \dots, i\lambda_N\}$, где $i\lambda_1, \dots, i\lambda_N$ — простые собственные значения.

Теорема 3. *Каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \to X$ уравнения 1 является почти периодической на бесконечности функцией $x \in AP_{\infty,int}(\mathbb{J}, X)$, которая допускает представление вида*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k e^{i\lambda_k t}, t \in \mathbb{R},$$

где $x_k \in C_{sl,int}$.

Статья организована следующим образом: парагр. 1 содержит результаты об интегрально убывающих на бесконечности функциях. В парагр. 2 излагаются необходимые результаты из теории банаховых модулей, которые используются при доказательстве основных теорем. Парагр. 3 содержит доказательство теоремы 2. Парагр. 4 содержит сведения о медленно меняющихся функциях. И в заключительном парагр. 5 доказывается теорема 3.

Используемые результаты из гармонического анализа, функций и векторов содержатся в монографиях и статьях [1, 7–9, 13–15].

1. ИНТЕГРАЛЬНО УБЫВАЮЩИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ

В статье систематически используется понятие банахова модуля (банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля [7,8]) над алгеброй суммируемых на $\mathbb{R}$ комплексных функций с нормой

$$\|f\|_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|, f \in L^1(\mathbb{R})$$

и со сверткой в качестве умножения

$$(f * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)\, ds, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Все рассматриваемые банаховы $L^1(\mathbb{R})$-модули строятся с помощью изометрических представлений. Пусть $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ — сильно непрерывная группа изометрий из банаховой алгебры $\operatorname{End} \mathscr{X}$ линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве $\mathscr{X}$.

Формула

$$fx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)T(-s)x\, ds, \qquad x \in \mathscr{X},$$

определяет на $\mathscr{X}$ структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля. Таким образом, отображение $(f, x) \mapsto fx : L^1(\mathbb{R}) \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ является билинейным и имеют место равенства

$$f(gx) = (f * g)(x) = (g * f)x$$

для любых f, g из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и любого вектора $x \in \mathscr{X}$. При этом

$$\|fx\| = \left\| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)T(-s)x\, ds \right\| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|\|T(-s)x\|\, ds \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|\, ds\|x\| = \|f\|_1\|x\|$$

для любых f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathscr{X}$.

Непосредственно из определений следует, что подпространство $C_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$ содержится в $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$. Следующее утверждение непосредственно получается из определения подпространства $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$C_{0,int}(\mathbb{J}, X) = \left\{ x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X) : \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^N \|x(t+s)\| ds = 0,\ N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$ и $N = [\alpha]$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α и $\{\alpha\}$ — его дробная часть. Поскольку $|\, \|a\| - \|b\|\, | \leqslant \|a - b\|$ для любых векторов a и b из X, получаем, что имеют место оценки:

$$\left| \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^\alpha \|x(t+s)\|\, ds - \frac{1}{N} \int\limits_0^N \|x(t+s)\|\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{1}{N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|\,ds + \left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{N}\right)\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds + \right.$$

$$\left. +\frac{1}{\alpha}\int\limits_N^{N+\{\alpha\}} \|x(t+s)\|\,ds - \frac{1}{N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{\{\alpha\}}{\alpha N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|\,ds + \frac{1}{\alpha}\int\limits_N^{N+\{\alpha\}} \|x(t+s)\|\,ds - \frac{1}{N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N^2}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|\,ds + \frac{1}{N}\int\limits_N^{N+1} \|x(t+s)\|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}\int\limits_0^N \|x(t+s)\|\,ds + \|x\|_\infty\right) \leqslant \frac{1}{N}2\|x\|_\infty \to \infty, \qquad \alpha\to\infty. \qquad \square$$

Пример 1. Построим четную функцию y из $C_{0,int}(\mathbb{R},X)$, не принадлежащую $C_0(\mathbb{R},X)$. Для ее построения возьмем произвольную последовательность положительных чисел, обладающих свойствами: 1) $t_{n+1}-t_n \geqslant 2$, $n\geqslant 2$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{n}=\infty$; и любую ограниченную последовательность (α_n) чисел из $\mathbb{R}$, не сходящуюся к нулю, причем $|\alpha_n|\leqslant 1$, $n\in\mathbb{N}$.

Функцию y из $C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ определим на $\mathbb{R}_+$ следующим образом:

1) $y(t_n)=\alpha_n$, $n\geqslant 2$;

2) $y(t_{n-1})=y(t_{n+1})=0$, $n\geqslant 2$;

3) на промежутке $[t_n-1;t_n+1]$ функция y линейна и непрерывна;

4) $y=0$ на $\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(t_n-1;t_n+1)$.

Докажем, что построенная функция y (полагается, что $y(-t)=y(t)$, $t\geqslant 0$) принадлежит $C_{0,int}(\mathbb{R})$. Ясно, что она не принадлежит подпространству $C_0(\mathbb{R})$. Используя лемму 2, получаем, что для любого $t\geqslant 0$

$$\int\limits_0^N y(s+t)ds \leqslant \int\limits_t^{t+N} y(s)ds \leqslant k_N,$$

где k_N — число точек из последовательности (α_N), содержащихся на промежутке $[t,t+N]$. Из свойства 2) последовательности (t_n) следует, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{k_n}{N}=0.$$

Ясно, что $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int\limits_t^{t+N} y(s)ds=0$ равномерно по $t\in\mathbb{R}$. Таким образом, $y\in C_{0,int}(\mathbb{R})$.

В частности, приведенным условиям удовлетворяют следующие две последовательности: $t_n=n^2, n\geqslant 2$ и $\alpha_n=1$.

Введем в рассмотрение функционал $p:\mathbb{C}_{b,u}\to\mathbb{R}_+$, заданный формулой

$$p(x)=\overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\frac{1}{\alpha}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|\,ds.$$

Замечание 1. Непосредственно из определения подпространства $C_{0,int}$ и определения функционала p следует, что $C_{0,int}$ совпадает с его ядром:

$$Ker\, p = \{x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X) : p(x) = 0\}.$$

Лемма 2. *Функционал $p : C_{b,u} \to \mathbb{R}_+$ является полунормой и удовлетворяет оценке $p(x) \leqslant \|x\|, x \in C_{b,u}$.*

Доказательство. Проверим аксиомы полунормы.

Очевидна неотрицательность функционала p, а также очевидно свойство однородности функционала p.

Докажем неравенство $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ для любых x, $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$

$$p(x+y) = \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|(x(s+t) + y(t+s))\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \left(\int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|\, ds + \| \int\limits_0^\alpha \|y(s+t)\|\, ds \right) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|\, ds + \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \| \int\limits_0^\alpha \|y(s+t)\|\, ds = p(x) + p(y).$$

4. Из оценок

$$p(x) = \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\|\, ds \leqslant \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_0^\alpha \|x\| ds \leqslant \|x\|$$

следует, что $p(x) \leqslant \|x\|, x \in \mathbb{C}_{b,u}$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1 вытекает из следующей леммы.

Лемма 3. *Множество функций $C_{0,int}$ обладает следующими свойствами:*

1) является замкнутым линейным подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$;

2) инвариантно относительно сдвигов, т. е. $S(t)x \in C_{0,int}$ для любой функции $x \in C_{0,int}$ и любого $t \in \mathbb{J}$;

3) является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем (см. [7, 8]), если $\mathbb{J} = \mathbb{R}$.

Доказательство. 1. Докажем что множество функций $C_{0,int}$ является линейным подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Пусть x, y — любые две функции из $C_{0,int}$ и $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|(\beta x(s+t) + \gamma y(t+s))\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \left(\int\limits_0^\alpha \|\beta x(s+t)\|\, ds + \int\limits_0^\alpha \|\gamma y(t+s)\|\, ds \right) \leqslant$$

$$\leqslant |\beta| \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|x(s+t)\| ds + |\gamma| \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \int\limits_0^\alpha \|y(t+s)\|\, ds = 0.$$

Докажем замкнутость подпространства $C_{0,int}$. Пусть последовательность функций (x_n) из $C_{0,int}$ сходится к x_0 из $\mathbb{C}_{b,u}(\mathbb{J},X)$, т. е. $\|x_n - x_0\|_\infty = 0$.

Поскольку $p(x_0) = p(x_n + x_0 - x_n) \leqslant p(x_n) + p(x_0 - x_n) = 0 + \|x_0 - x_n\|_\infty \to 0$, то $p(x_0) = 0$, т. е. $x_0 \in C_{0,int}$, согласно замечанию 1.

2. Докажем, что множество функций $C_{0,int}$ инвариантно относительно сдвигов. Для любого $\tau \in \mathbb{J}$ рассмотрим сдвиг $S(\tau)x$ функции $x \in C_{0,int}$ и тогда

$$p(S(\tau)x) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t\in\mathbb{J}} \left\| \int\limits_0^\alpha x(t+s+\tau)\,ds \right\| \leqslant p(x) = 0.$$

3. Докажем что множество функций $C_{0,int}$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем. Поскольку функция $x \in C_{0,int}(\mathbb{R},X)$ равномерно непрерывна, то и равномерно непрерывна функция $\tau \mapsto S(-\tau)x : \mathbb{R} \to C_{0,int}(\mathbb{R},X)$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_2 \in \mathbb{C}$ и $\tau_1,\ldots,\tau_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)S(-\tau)x\,d\tau - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(-\tau_i)x \right\| < \varepsilon.$$

Тогда имеет место оценка

$$p(f*x) = p\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)S(-\tau)x\,d\tau - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(-\tau_i)x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(-\tau_i)x \right) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + p(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(-\tau_i)x) \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p(S(-\tau_i)x) = \varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности ε получаем, что $p(f*x) = 0$, т. е. $f*x \in C_{0,int}(\mathbb{R},X)$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Если $y \in C_{0,int}(\mathbb{R},X)$, то для любого числа $t \in \mathbb{R}$ функция $z(s) = \int\limits_s^{s+t} y(\tau)\,d\tau$, $s \in \mathbb{R}$, также принадлежит $C_{0,int}$.*

Доказательство. Представим функцию z в виде $z = f*y$, где $f = \chi_{[-1,0]}$, тогда

$$z(t) = (\chi_{[-t,0]} * y)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-t,0]}(t-\tau)y(\tau)\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-t,0]}(s)y(s-\tau)\,d\tau =$$
$$= \int\limits_t^0 y(s-\tau)d\tau = \int\limits_s^{s+t} y(u)\,du.$$

Тогда из свойства 3) леммы 3 следует, что функция $z \in C_{0,int}$. Лемма доказана. □

Приведем пример медленно меняющейся функции из пространства $C_{sl,int}(\mathbb{R})$ (см. определение 2).

Пример 2. Построение функции будет осуществляться по последовательности (см. пример 1) $t_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, и последовательности

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ — четное,} \\ -1, & \text{если } n \text{ — нечетное, } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Определим функцию $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ формулой

$$z = \int_0^s y(\tau)\, d\tau, \qquad s \in \mathbb{R},$$

где $y \in C_{0,int}(\mathbb{R})$ — функция из примера 1, построенная по рассматриваемым последовательностям (α_n) и (t_n) Проверим, что она принадлежит пространству $C_{sl,int}$. Из равенств

$$z(s+t) - z(s) = \int_0^{s+t} y(\tau) d\tau - \int_0^s y(\tau) d\tau = \int_s^{s+t} y(\tau) d\tau, \qquad s \in \mathbb{R},$$

и свойства 3) леммы 3 следует, что функция $S(t)z - z$ принадлежит $C_{0,int}$, т. е. $z \in C_{sl,int}(\mathbb{R})$.

2. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ ИЗ БАНАХОВА $L^1(\mathbb{R})$-МОДУЛЯ

В этом параграфе приводятся некоторые известные результаты о почти периодических векторах (см. [7, 15]), которые существенно используются при построении теории почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$.

Пусть $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ — сильно непрерывное изометрическое представление, где $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство. Далее $\mathscr{X}$ рассматривается в качестве $L^1(\mathbb{R})$-модуля (см. парагр. 2).

Определение 10. Пусть $\varepsilon > 0$. Число ω из $\mathbb{R}$ называется ε-периодом вектора x из $\mathscr{X}$, если $\|T(\omega)x - x\| < \varepsilon$. Множество ε-периодов обозначим через $\Omega(\varepsilon, x)$.

Определение 11. Ненулевой вектор x_0 из $\mathscr{X}$ называется собственным вектором представления $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$, если существует вещественное число λ_0 такое, что $T(t)x_0 = e^{i\lambda_0 t} x_0, t \in \mathbb{R}$.

Определение 12. Вектор x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathscr{X}, T)$ называется *почти периодическим вектором*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) если для любого $\varepsilon > 0$ множество ε-периодов $\Omega(\varepsilon, x)$ вектора x относительно плотно на R;

2) множество $\{T(t)x, t \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в $\mathscr{X}$;

3) если для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют собственные векторы $x_1, \ldots, x_N$ представления T такие, что $\left\| x - \sum\limits_{k=1}^{N} x_k \right\| < \varepsilon$.

Замечание 2. Пусть $\mathscr{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и $T = S$ — группа сдвигов функции из $\mathscr{X}$. Функция $x_0 \in \mathscr{X}$ является собственной функцией представления $T = S$ тогда и только тогда, когда она представлена в виде $x_0(t) = y_0 e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$, где y_0 — некоторый вектор из X.

Замечание 3. Свойство 1) из определения 8 эквивалентно определению Бора (см. определение 7, свойство 2), эквивалентно определению Бохнера и, наконец, свойство 3) переписывается в виде

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t) - \sum_{k=1}^{N} x_k^0 e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon,$$

где x_k^0, $k = \overline{1, N}$ — векторы из X, что эквивалентно аппроксимационному определению (см. определение 9).

Лемма 5. *Если x_0 — собственный вектор, то x_0 является почти периодическим вектором.*

Доказательство. Так как x_0 — собственный вектор, то $T(t)x_0 = e^{i\lambda_0 t}x_0$, $t \in \mathbb{R}$. Используя критерий Бохнера, рассмотрим произвольную последовательность (t_n) из $\mathbb{R}$. Имеем

$$T(t_n)x_0 = e^{i\lambda_0 t_n}x_0, \qquad n \geqslant 1,$$

где $(e^{i\lambda_0 t_n})$ — последовательность находится в единичном круге $\mathbb{T}$. Тогда из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $(e^{i\lambda_0 t_{n_k}})$, следовательно, последовательность векторов $x_k = e^{i\lambda_0 t_{n_k}}x_0$ является сходящейся. Таким образом, x — почти периодический вектор. □

Замечание 4. Непосредственно из определений почти периодических векторов следует, что вектор $x \in \mathscr{X}$ является почти периодическим тогда и только тогда, когда функция $t \mapsto T(t)x : \mathbb{R} \to \mathscr{X}$ является непрерывной почти периодической функцией Бора.

Доказательство. Для произвольной последовательности чисел (t_n) из $\mathbb{R}$ рассмотрим последовательностей функций $\varphi_x(t + t_n)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$. Поскольку $\varphi_x(t + t_n) = T(t + t_n)x = T(t)T(t_n)x$, где $\{T(t_n)x,\ n \geqslant 1\}$ — предкомпактное множество, тогда множество $S(t_n)\varphi_x$, $n \geqslant 1$, — предкомпактно в $C_b(\mathbb{R}, X)$. □

Лемма 6. *Линейная комбинация собственных векторов представления T является почти периодическим вектором.*

Доказательство. Пусть $x = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k x_k$, где x_k, $k = 1\ldots, N$, — собственные векторы и $c_k \in \mathbf{C}$, $k = 1\ldots, N$, тогда $T(t)x = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k x_k e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$. Данная функция является почти периодической и поэтому x — почти периодический вектор в силу замечания 4. □

Подмодуль почти периодических векторов из $L^1(\mathbb{R})$-модуля (X, T) обозначим через $AP\mathscr{X}$. Если $\mathscr{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и $T = S$, то $AP\mathscr{X} = APC_{b,u}(\mathbb{R}, X)$.

Из сделанных замечаний и лемм следует

Теорема 4. *Все три условия (из определения 12) почти периодичности векторов из $\mathscr{X}$ эквивалентны.*

3. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ

Рассмотрим банахово пространство $C_{b,u}(\mathbb{J},X)$ и его подпространство $C_{0,int}(\mathbb{J},X)$. Пусть $\mathscr{X} = C_{b,u}(\mathbb{J},X)\backslash C_{0,int}(\mathbb{J},X)$. Обозначим через $\widetilde{x_0} = x_0 + C_{0,int}$ класс эквивалентности из $\mathscr{X}$, содержащий вектор x_0. Классы эквивалентности являются элементами векторного пространства $\mathscr{X}$ (называемого *фактор-пространством* пространства $C_{b,u}$ по подпространству $C_{0,int}$).

Фактор-пространство $\mathscr{X} = C_{b,u}(\mathbb{J},X)/C_{0,int}(\mathbb{J},X)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|\widetilde{x_0}\| = \inf_{y\in\widetilde{x_0}}\|y\| = \inf_{z\in C_{0,int}}\|x_0+z\|,$$

в нем действует изометрическая группа сдвигов

$$\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x}, t \geqslant 0.$$

При $t<0$ положим

$$\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)y} = S(t)y + C_{0,int},$$

где

$$y(s) = \begin{cases} x(s), & s \geqslant 0, \\ \frac{sx(0)}{a} - x(0), & -a \leqslant s \leqslant 0, \\ 0, & s < -a, \end{cases} \tag{2}$$

здесь $a>0$.

Лемма 7. *Представление $\widetilde{S}:\mathbb{R}\to\operatorname{End}\mathscr{X}$ сильно непрерывно и изометрично*

$$\|\widetilde{S}(t)\widetilde{x}\| = \|\widetilde{x}\|, \qquad x \in C_{b,u}(\mathbb{J},X), \qquad t\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Доказательство. Докажем равенство (3) при $\mathbb{J}=\mathbb{R}_+$ (при $\mathbb{J}=\mathbb{R}$ утверждение очевидно). Так как функция y, определенная равенством выше, равномерно непрерывна, то функция $t\mapsto\widetilde{S(t)x}:\mathbb{R}\to\mathscr{X}$ также непрерывна. Так как

$$y(s+t) = \begin{cases} x(s+t), & s \geqslant -t, \\ \frac{(s+t)x(0)}{a} - x(0), & -a-t \leqslant s \leqslant -t, \\ 0, & s < -t. \end{cases}$$

то

$$y(s+t)-y(s) = \begin{cases} x(s+t)-x(s), & t \geqslant 0, \\ \frac{(s+t)x(s)}{a} - \frac{sx(s)}{a}, & -a \leqslant t \leqslant 0, \\ 0, & t < -a. \end{cases}$$

Следовательно, функция $t\mapsto\widetilde{S(t)x}:\mathbb{R}\to X$ непрерывна.

Представление $\widetilde{S}:\mathbb{R}\to\operatorname{End}\mathscr{X}$ изометрично, так как

$$\|\widetilde{S}(t)\widetilde{x}\| = \inf_{\upsilon_0\in C_{0,int}}\sup_{s\in\mathbb{R}}\|y(s+t)-\upsilon_0(s)\| = \inf_{\upsilon_0\in C_{0,int}}\sup_{s\in\mathbb{R}}\|y(s)-\upsilon_0(s)\| = \|\widetilde{x}\|.$$

Лемма доказана. □

По представлению $\widetilde{S}$ наделим фактор-пространство $\mathscr{X}$ структурой банахова модуля:

$$f\widetilde{x} = \int_{\mathbb{R}} f(t)\widetilde{S}(-t)\widetilde{x}\,dt, \qquad f\in L^1(\mathbb{R}), \qquad x\in\mathscr{X}.$$

Определение 13. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется почти периодической на бесконечности, если класс эквивалентности $\widetilde{x} \in \mathscr{X}$ является почти периодическим вектором из $AP\mathscr{X}$.

Лемма 8. *$\widetilde{S}(t)\widetilde{x}$ — предкомпактное множество в $\mathscr{X} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$.*

Доказательство теоремы 2. Утверждение теоремы будет вытекать из следующих двух лемм.

Лемма 9. *Функция $x \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$ принадлежит пространству $AP_{\infty,int}(\mathbb{R}_+, X)$ тогда и только тогда, когда $y \in AP_{\infty,int}(\mathbb{R}_+, X)$, для любой функции $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)$ вида* (2).

Доказательство. Заметим, что непосредственно из определения ε-периода на бесконечности следует, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\Omega_\infty(y, \varepsilon) = \Omega_\infty(x, \varepsilon) \cup (-\Omega_\infty(x, \varepsilon)), \tag{4}$$

$$y(t+\omega) - y(t) = \begin{cases} x(t+\omega) - x(t), & t \geqslant 0, \\ \varphi(t), & -a \leqslant t \leqslant 0, \\ 0, & t < -a, \end{cases}$$

и

$$y(t+(-\omega)) - y(t) = \begin{cases} x(t+\omega) - x(t), & t \geqslant 0, \\ \varphi(t) - a, & -a \leqslant t \leqslant 0, \\ 0, & t < -a, \end{cases}$$

где $a > 0$, $\omega > 0$ и $\varphi(t)$ — некоторая непрерывная функция, определенная согласно представлению (2). Из указанных представлений вытекает доказываемое равенство (4). □

Лемма 10. *Пусть $\varepsilon > 0$. Для любой функции $x \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$ множество ε-периодов $\Omega(\varepsilon, \widetilde{x})$, отвечающих ее классу эквивалентности $\widetilde{x} \in C_b/C_{0,int}$, совпадает с множеством $\Omega\infty(x, \varepsilon) \cup (-\Omega\infty(x, \varepsilon))$*

Доказательство. Пусть y — функция вида (2). Тогда имеет место равенство (4). Отметим, что $\Omega_\infty(y, \varepsilon) = \Omega(\widetilde{y}, \varepsilon) = \Omega(\widetilde{x}, \varepsilon)$, где $\widetilde{y} \in \mathscr{X}$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 2 следует из следующей теоремы.

Теорема 5. *Определения 8, 9 и 13 эквивалентны.*

Доказательство. Эквивалентность определений 8 и 13 следует из двух последних лемм. Эквивалентность определений 9 и 13 следует из эквивалентности условий 1) и 3) определения 12, если положить $T = \widetilde{S}$.

Отметим, что если $\widetilde{x} \in \mathscr{X}$, содержащий функцию $x \in AP_\infty(\mathbb{J}, X)$, то из условия 3) определения 12 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $y_k \in AP_\infty(\mathbb{J}, X)$, $1 \leqslant k \leqslant N$, и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, такие что $\left\| \widetilde{x} - \sum\limits_{k=1}^{N} \widetilde{y}_k \right\| < \varepsilon$. Причем $\widetilde{S}(t)\widetilde{y}_k = e^{i\lambda_k t}\widetilde{y}_k$, $1 \leqslant k \leqslant N$. Следовательно, функции $x_k(t) = y_k(t)e^{-i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant N$ обладают свойством $\widetilde{S}(t)x_k = x_k$, $t \in \mathbb{R}$. Поэтому $x_k \in C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$, $1 \leqslant k \leqslant N$ и $x_0 = x - \sum\limits_{k=1}^{N} x_k \in C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$. Теорема доказана. □

Свойства почти периодических функций относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ были рассмотрены в работах [10–12].

4. СВОЙСТВА МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе используются ранее введенные пространства. Рассмотрим пространство $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, подпространство $C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$ и фактор-пространство $\mathscr{X} = C_{b,u}/C_{0,int}$. Напомним, что символом $C_{sl,int}$ обозначаем пространство медленно меняющихся на бесконечности функций относительно подпространства $C_{0,int}$.

Пример 3. Построим функцию y из $C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$, но не принадлежащую пространству $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Для ее построения возьмем произвольную последовательность (t_n) положительных чисел, обладающих следующими свойствами:

1) $t_{n+1} - t_n \geqslant 2, n \geqslant 2$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \infty$;

и любую последовательность (t'_n) чисел из $\mathbb{R}$ такую, что:

1) $t_n < t'_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

2) $t'_n < t_n + 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (t'_n - t_n) = \infty$.

Функцию y из $C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ определим на $\mathbb{R}_+$ следующим образом:

1) на промежутке $[t_n; t'_n]$ функция $y = 1$, $n \geqslant 0$;

2) на промежутке $(t'_n; t_n + 1)$ и $(t'_n + 1; t_n + 2)$ функция линейна и непрерывна;

3) на промежутке $[t_n + 1; t'_n + 1]$ функция $y = -1$.

Докажем, что построенная функция y (полагается, что $y(-t) = y(t)$, $t \geqslant 0$) принадлежит $C_{sl,int}$.

Определим функцию $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ формулой

$$z = \int\limits_0^s y(\tau) d\tau.$$

Проверим, что она принадлежит пространству $C_{sl,int}$. Из равенств

$$z(s+t) - z(s) = \int\limits_0^{s+t} y(\tau)\, d\tau - \int\limits_0^{s} y(\tau) d\tau = \int\limits_s^{s+t} y(\tau)\, d\tau, \qquad s \in \mathbb{R},$$

и свойства 3) леммы 5 следует, что функция $S(t)z - z$ принадлежит $C_{0,int}$, т. е. $z \in C_{sl,int}(\mathbb{R})$.

Замечание 5. Непосредственно из определения медленно меняющейся на бесконечности функции относительно подпространства $C_{0,int}$ следует, что любое число $\omega \in \mathbb{J}$ является ее ε-периодом.

Лемма 11. *$C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ — замкнутое линейное подпространство из $C_b(\mathbb{R}, X)$, инвариантное относительно операторов сдвига $S(t) : C_{b,u}(\mathbb{R}, X) \to C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, $t \in \mathbb{R}$.*

Лемма 12. *Пространство $C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$ — банахово пространство.*

Доказательство. Возьмем последовательность функций (x_n) из $C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$, сходящуюся в $C_{b,u}$ к x_0. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} (S(\alpha)x_n - x_n) = S(\alpha)x_0 - x_0.$$

Так как $S(\alpha)x_n - x_n \in C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$ и $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$ — замкнутое подпространство, то $S(\alpha)x_0 - x_0 \in C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$. Следовательно, $x_0 \in C_{sl,int}(\mathbb{J}, X)$. $\square$

Лемма 13. *Пространство медленно меняющихся функций $C_{sl,int}(\mathbb{R}_+, X)$ несепарабельно.*

Доказательство. Рассмотрим семейство функций $\{x_\alpha, \alpha \geqslant 0\}$ из $C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$ вида

$$x_\alpha(t) = e^{i\alpha \ln(1+t)}, \qquad \alpha \geqslant 0, \qquad t \geqslant 0.$$

Покажем, что $\{x_\alpha, \alpha \geqslant 0\} \subset C_{sl}(\mathbb{R}_+) \subset C_{sl,int}(\mathbb{R}_+)$. Для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ имеют место равенства:

$$\sup_{t \geqslant 0} \|x_\alpha - x_\beta\| = \sup_{t \geqslant 0} \|e^{i\alpha \ln(1+t)} - e^{i\beta \ln(1+t)}\| = \sup_{t \geqslant 0} \|e^{i \ln(1+t) \frac{\alpha}{\beta}} - 1| = \sqrt{2},$$

$\alpha \neq \beta$, α, $\beta \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, в пространстве $C_{sl,int}(\mathbb{R}_+)$ содержится семейство функций $\{x_\alpha,\ \alpha \geqslant 0\}$, состоящее из континуума линейно независимых функций, расстояние между которыми не меньше 2. Это значит, что пространство $C_{sl,int}(\mathbb{R}_+)$ несепарабельно. $\square$

Лемма 14. *Пространство $C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем, структура которого определяется формулой свертки:*

$$(f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)x(s)\, ds, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}), \qquad x \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X).$$

Доказательство. Покажем корректность определения свертки, т. е. докажем включение $f * x \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$. Из представления $(f*x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t-s)x(s)ds, f \in L^1(\mathbb{R}), x \in C_{sl}(\mathbb{R})$, непрерывности отображения $\tau \mapsto S(-\tau)x : \mathbb{R} \to C_{b,u}(\mathbb{R})$ и определения интеграла следует, что функция $f * x$ является пределом в $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ линейных комбинаций сдвигов функции x. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и любой функции $x_0 \in C_{sl,int}(\mathbb{R}, X)$ функция y_0, определяемая равенствами $y_0 = S(\alpha)f * x_0 - f * x_0 = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)S(-\tau)(S(\alpha)x_0 - x_0)d\tau = (f * (S(\alpha)x_0 - x_0))(t)$, есть предел в $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ линейных комбинаций сдвигов функции $S(\alpha)x_0 - x_0$, принадлежащей $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. В силу замкнутости подпространства $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$ функция y_0 принадлежит $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. $\square$

5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим разностное уравнение:

$$x(t+1) = Bx(t) + y(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

где $y \in C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$, $B \in \operatorname{End} \mathscr{X}$ имеет вид $B = e^A$. Тогда $\sigma_0 = \sigma(B) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \gamma_2 \ldots, \gamma_m\}$, где $\gamma_k = e^{i\lambda_k}$, $1 \leqslant k \leqslant N$, и $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Любое решение уравнения (1) удовлетворяет равенству [16]

$$x(t) = e^{A(t-s)}x(s) + \int\limits_s^t e^{A(t-\tau)}z(\tau)d\tau, \qquad s \leqslant t, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$x(t+1) = e^{A}x(t) + \int\limits_{t}^{t+1} e^{A(t+1-\tau)}z(\tau)d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, ограниченное решение уравнения (5) будет совпадать с решением уравнения (1), где $B = e^{A}$, $z \in C_{0,int}$ и $y(t) = \int\limits_{t}^{t+1} e^{A(t+1-\tau)}z(\tau)d\tau$.

Спектр оператора $B \in \operatorname{End}\mathscr{X}$ представим в виде

$$\sigma(B) = \sigma_0 \cup \sigma_{in} \cup \sigma_{out}, \tag{6}$$

где $\sigma_{in} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| < 1\}$ — совокупность собственных значений, лежащих внутри окружности, $\sigma_{out} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| > 1\}$ — совокупность собственных значений, лежащих вне окружности. В соответствии с этим разбиением спектра рассмотрим проекторы $\mathscr{P}_0$, $\mathscr{P}_{in}$, $\mathscr{P}_{out}$, которые соответственно построены по спектральным множествам σ_0, σ_{in}, σ_{out}. Таким образом, $I = \mathscr{P}_0 + \mathscr{P}_{in} + \mathscr{P}_{out}$. Эти проекторы индуцируют разложение $X = X_0 \oplus X_{in} \oplus X_{out}$ пространства X, где $X_0 = \operatorname{Im}\mathscr{P}_0$, $X_{in} = \operatorname{Im}\mathscr{P}_{in}$, $X_{out} = \operatorname{Im}\mathscr{P}_{out}$. Эти подпространства являются инвариантными для оператора B. Обозначим $B_0 = B|X_0$, $B_{in} = B|X_{in}$, $B_{out} = B|X_{out}$. Таким образом, $B = B_0 \oplus B_{in} \oplus B_{out}$ относительно построенного разложения пространства X. Применяя проектор $\mathscr{P}_{in}$ к обеим частям уравнения (5), получим функцию $x_{in} = \mathscr{P}_{in}x$, удовлетворяющую равенству

$$S(1)x_{in}(t) = B_{in}x_{in}(t) + y_{in}(t), y_{in} = \mathscr{P}_{in}y \in C_{0,int}, t \in \mathbb{J}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что

$$(I - B_{in}S(-1))x_{in} = S(-1)y_{in}. \tag{8}$$

Поскольку $\|S(-1)\| = 1$, $B_{in}S(-1)x_{in}(t) = S(-1)B_{in}x_{in}(t)$, $t \in \mathbb{J}$, и спектральный радиус $r(B_{in})$ оператора B_{in} меньше единицы, то оператор $I - B_{in}S(-1)$ обратим и из (8) следует, что $x_{in} = (I - B_{in}S(-1))^{-1}S(-1)y_{in} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B_{in}^{k}S(-k-1)y_{in}$. Ясно, что $x_{in} \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. Аналогичный результат получим при применении проектора $\mathscr{P}_{out}$ к уравнению (5):

$$(S(1)x_{out})(t) = B_{out}x_{out}(t) + y_{out}(t), \qquad y_{out} = \mathscr{P}_{out}y \in C_{0,int}. \tag{9}$$

Оператор B_{out} обратим и $\sigma(B_{out}^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma_{out}\right\}$, т. е. его спектральный радиус меньше единицы. Используя перестановочность оператора S_N с B_{out} из (9), получим равенства

$$S(1)B_{out}^{-1}x_{out}(t) = x_{out}(t) + B_{out}^{-1}y_{out}(t), \qquad t \in \mathbb{J},$$

или

$$(I - S(1)B_{out}^{-1})x_{out}(t) = -B_{out}^{-1}y_{out}(t), \qquad t \in \mathbb{J}.$$

Таким образом,

$$x_{out} = -(I - S(1)B_{out}^{-1})^{-1}B_{out}^{-1}y_{out} = -\sum_{k=0}^{\infty}(B_{out}^{-1}S(1))^{k}B_{out}^{-1}y_{out}, \qquad y_{out} \in C_{0,int}.$$

Из этой формулы следует, что $x_{out} \in C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$.

Проектор P_0 можно представить в виде $P_0 = P_1 + \ldots + P_N$, где $P_k \in \operatorname{End} X_0$ — проектор, и $AP_k = \gamma_k P_k$, где $|\gamma_k| = 1$, $1 \leqslant k \leqslant N$.

Применим проектор P_0 к разностному уравнению (5) и далее применим проектор P_k, получим

$$P_k x_0(t+1) = P_k B_0 x_0(t) + P_k y_0(t), \qquad t \in \mathbb{J}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant N,$$

где $x_0(t) = P_0 x(t)$, $x_k(t) = P_k x_0(t)$ и $y_0(t) = P_0 y(t)$, где $t \in \mathbb{J}$. Пусть $y_k(t) = P_k y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, т. е. $y_k \in C_{0,int}$, и поэтому $\widetilde{y}_k = 0$. Тогда, сделав замену $x_k(t) = e^{-i\lambda_k t} x_k(t)$, $t \in \mathbb{J}$, $0 \leqslant \lambda_k <$, получим $\widetilde{x}_k(t+1) = \widetilde{x}_k(t) + \widetilde{y}_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{x}_k$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, а x_k отличается от $\widetilde{x}_k$ на множитель $e^{i\lambda_k t} = y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, т. е. $x_0 \in AP_{\infty,int}(\mathbb{R}, X)$. В итоге получаем, что функция X представима в виде $x = x_0 + x_{in} + x_{out}$. Следовательно, $x \in AP_{\infty,int}(\mathbb{R}, X)$.

Библиографический список

1. *Бор Г.* Почти периодические функии. М. : ОГИЗ, 1934. 126 с.
2. *Bochner S.* Uber gewisse Differential und algemeinere Gleichungen deren Losungen fastperiodisch sin // Math. Ann. 1930. Vol. 103. P. 588–597.
3. *Besicovitch A. S.* On generalist almost periodic functions // Proc. London Math. Soc. 1926. Vol. 25. P. 495–512.
4. *Favard J.* On the convergence of the Sturm – Liouville Series //Ann. Math. 1923. Vol. 24, № 2. P. 109–120.
5. *Левитан Б. М., Степанов В. В.* О почти периодических функциях, принадлежащих в собственном смысле классу W // Докл. АН СССР. 1939. Т. 22. С. 229–232.
6. *Штерн А. И.* Почти периодические функции и представления в локально выпуклых пространствах // УМН. 2005. Т. 60, вып. 3. С. 97–168. DOI: 10.1070/RM2005v060n03 ABEH000849.
7. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Функциональный анализ, СМФН. М. : МАИ, 2004. Т. 9, С. 3–151. DOI: 10.1007/s10958-006-0286-4.
8. *Баскаков А. Г., Калужина Н. С.* Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 643–661. DOI: 10.1134/S0001434612110016.
9. *Баскаков А. Г., Калужина Н. С., Поляков Д. М.* Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов // Изв. вузов. Матем. 2014. Т. 7. С. 3–14. DOI: 10.3103/S106 6369X14070019.
10. *Рыжкова А. А., Тришина И. А.* О периодических на бесконечности функциях // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2014. Т. 36, вып. 19(190). С. 71–75.
11. *Тришина И. А.* Алгебраические свойства почти периодических на бесконечности функций // Вестн. факультета прикладной математики, информатики и механики. 2016. Т. 12. С. 223–227.
12. *Рыжкова А. А., Тришина И. А.* О почти периодических на бесконечности решениях разностных уравнений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 45–49. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-45-49.
13. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М. : Изд-во МГУ, 1978. 205 с.
14. *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 3. С. 3–54. DOI: 10.1070/IM2005v069n03ABEH000535.

15. *Баскаков А. Г.* Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 174–190. DOI: 10.1134/S0001434615010198.
16. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука, 1970. 534 с.

Образец для цитирования:
Тришина И. А. Почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 402–418. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-402-418.

Almost Periodic at Infinity Functions Relative to the Subspace of Functions Integrally Decrease at Infinity

I. A. Trishina

Irina A. Trishina, orcid.org/0000-0001-6521-9570, Voronezh State University, 1, Universitetskaya Pl., Voronezh, Russia, 394036, i.a.trishina@gmail.com

In the paper we introduce and study a new class of almost periodic at infinity functions, which is defined by means of a subspace of integrally decreasing at infinity functions. It is wider than the class of almost periodic at infinity functions introduced in the papers of A. G. Baskakov (with respect to the subspace of functions vanishing at infinity). It suffices to turn to the approximation theory for a new class of functions, where the Fourier coefficients are slowly varying at infinity functions with respect to the subspace of functions that decrease integrally at infinity. Three equivalent definitions of functions almost periodic at infinity with respect to integrally decreasing functions at infinity are formulated. For their investigation, the theory of Banach modules over the algebra $L^1(\mathbb{R})$ of summable functions is applied. Almost periodic functions at infinity appear naturally as a solution of differential equations. Criteria for the almost periodicity at infinity of bounded solutions of ordinary differential equations of the form $\dot{x}(t) = Ax(t) + z(t), t \in \mathbb{J}$ are formulated, where A is a linear operator and z is an integrally decreasing function at infinity, defined on infinite interval $\mathbb{J}$ that coincides with one of the sets $\mathbb{R}$ or $\mathbb{R}_+$.

Key words: almost periodic at infinity functions, slowly varying at infinity functions, integral decreasing at infinity functions.

References

1. Bor G. *Pochti periodicheskie funkcii* [Almost periodic functions]. Moscow, OGIZ, 1934. 126 p. (in Russian).
2. Bochner S. Uber gewisse Differential und algemeinere Gleichungen deren Losungen fast-periodisch sin. *Math. Ann.*, 1930, vol. 103, pp. 588–597.
3. Besicovitch A. S. On generalist almost periodic functions. *Proc. London Math. Soc.*, 1926, vol. 25, pp. 495–512.
4. Favard J. On the convergence of the Sturm – Liouville Series. *Ann. Math.*, 1923, vol. 24, no. 2, pp. 109–120.
5. Levitan B. M., Stepanov V. V. O pochti periodicheskih funkciyah, prinadlezhashchih v sobstvennom smysle klassu W [On almost periodic functions belonging in the proper sense to the class W]. *Dokl. AN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1939, vol. 22, pp. 229–232 (in Russian).

6. Shtern A. I. Almost periodic functions and representations in locally convex spaces. *Russian Math. Surveys*, 2005, vol. 60, iss. 3, pp. 489–557. DOI: 10.1070/RM2005v060n03 ABEH000849.
7. Baskakov A. G. Representation theory for Banach algebras, Abelian groups, and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 137, no. 4, pp. 4885–5036. DOI: 10.1007/s10958-006-0286-4.
8. Baskakov A. G., Kaluzhina N. S. Beurling's theorem for functions with essential spectrum from homogeneous spaces and stabilization of solutions of parabolic equations. *Math. Notes*, 2012, vol. 92 no. 5, pp. 587–605. DOI: 10.1134/S0001434612110016.
9. Baskakov A. G., Kaluzhina N. S., Polyakov D. M. Slowly varying at infinity operator semigroups. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014, vol. 58, no. 7, pp. 1–10. DOI: 10.3103/S1066369X14070019.
10. Ryzhkova A. A., Trishina I. A. About periodic functions at infinity. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*, 2014, vol. 36, iss. 19(190), pp. 71–75 (in Russian).
11. Trishina I. A. Algebraicheskie svojstva pochti periodicheskih na beskonechnosti funkcij [Algebraic properties of almost periodic functions at infinity]. *Vestnik fakul'teta prikladnoj matematiki, informatiki i mekhaniki* [Vestnik of the Department of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics], 2016, no. 12, pp. 223–227 (in Russian).
12. Ryzhkova A. A., Trishina I. A. Almost periodic at infinity solutions of difference equations. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 1, pp. 45–49 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-1-45-49.
13. Levitan B. M., Zhikov V. V. *Pochti-periodicheskie funkcii i differencial'nye uravneniya* [Almost-periodic functions and differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1978. 205 p. (in Russian).
14. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 439–486. DOI: 10.1070/IM2005v069n03ABEH000535.
15. Baskakov A. G. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 164–178. DOI: 10.1134/S0001434615010198.
16. Daleckij U. L., Krejn M. G. *Ustojchivost reshenij differencialnyx uravnenij v banakhovom prostranstve* [Stability of solutions of differential equations in a Banach space]. Moscow, Nauka, 1970. 534 p. (in Russian).

Cite this article as:

Trishina I. A. Almost Periodic at Infinity Functions Relative to the Subspace of Functions Integrally Decrease at Infinity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 402–418 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-402-418.

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СВОЙСТВ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ В РАМКАХ МОДЕЛИ ТИМОШЕНКО

И. В. Богачев, А. О. Ватульян, В. В. Дударев, П. А. Лапина, Р. Д. Недин

Богачев Иван Викторович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, 344090, Россия, Ростов-на-Дону, Мильчакова, 8а, bogachev89@yandex.ru

Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, 344090, Россия, Ростов-на-Дону, Мильчакова, 8а, vatulyan@math.rsu.ru

Дударев Владимир Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, 344090, Россия, Ростов-на-Дону, Мильчакова, 8а, dudarev_vv@mail.ru

Лапина Полина Анатольевна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, 344090, Россия, Ростов-на-Дону, Мильчакова, 8а, palapina@sfedu.ru

Недин Ростислав Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, 344090, Россия, Ростов-на-Дону, Мильчакова, 8а, rdn90@bk.ru

В работе рассмотрена обратная задача идентификации свойств неоднородной круглой пластины в рамках модели Тимошенко. Процедура идентификации основана на анализе акустического отклика в некоторой точке пластины в заданном наборе частот. Колебания возбуждаются приложенной к верхней грани пластины равномерно распределенной нагрузкой. Пластина считается жестко защемленной по контуру. На основании общих уравнений колебаний пластины Тимошенко (для произвольных криволинейных координат) сформулированы уравнения колебаний симметричной круглой пластины и граничные условия в обезразмеренном виде. Для решения прямой задачи использовался метод Галеркина, с помощью которого проведено сравнение значений функций прогиба для моделей Тимошенко и Кирхгофа – Лява для различных наборов механических и геометрических параметров. Для решения обратной задачи идентификации неоднородной функции цилиндрической жесткости разработан специальный метод решения — метод алгебраизации, который основан на разложении искомых функций по некоторым системам линейно независимых функций. После подстановки разложений в исходные уравнения колебаний обратная задача сводится к решению системы линейных уравнений относительно коэффициентов разложения функции прогиба и угла поворота нормали и последующем решении системы нелинейных уравнений относительно коэффициентов разложения функции цилиндрической жесткости. Разработанный метод проиллюстрирован набором вычислительных экспериментов по восстановлению монотонных и немонотонных функций, демонстрирующих его эффективность.

Ключевые слова: пластина, модель Тимошенко, идентификация, метод алгебраизации.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование объектов, описываемых пластинчатыми конструкциями с неоднородными свойствами, в настоящее время является актуальной практической задачей. Подобные конструкции используются в современном строительстве (при создании перекрытий и покрытий сооружений, перегородок, заслонок, монтажных пластин и т. д.), в производстве военных и гражданских технических систем широкого назначения (режущие системы, мембранные датчики, экранирующие элементы и т. п.), а также в биомеханике при моделировании деформирования различных объектов. В связи с этим становится востребованной разработка уточненных моделей, описывающих поведение таких конструкций и методов идентификации их неоднородных свойств [1].

При моделировании многослойных конструкций из композитных, функционально-градиентных и других материалов, отличающихся повышенной податливостью на сдвиг, для корректного описания их поведения необходимо учитывать деформации поперечного сдвига. Использование при этом классической теории Кирхгофа – Лява может приводить к существенной погрешности, для описания их поведения при динамическом воздействии необходимо применять уточненные модели. Одной из таких моделей является модель Тимошенко [2].

В работах [3–5] представлен анализ различных классических и неклассических моделей пластин (Кирхгофа – Лява, Тимошенко – Рейсснера и др.). В работе [4] модель Тимошенко – Рейсснера сравнивается с классической моделью Кирхгофа – Лява и трехмерной теорией упругости. На основе сравнения выделены области применимости каждой из моделей. Показано, что теория Кирхгофа – Лява для пластин является первым асимптотическим приближением для изотропного материала, учитывающая сдвиг теория Тимошенко – Рейсснера несущественно уточняет теорию Кирхгофа – Лява, а для ортотропного материала при относительно малом модуле поперечного сдвига теория Тимошенко – Рейсснера существенно уточняет теорию Кирхгофа – Лява. Статья [5] посвящена асимптотическому выводу двухмерных уравнений равновесия тонкой упругой неоднородной анизотропной пластины, анализу применимости модели и ее сравнению с моделями Кирхгофа – Лява и Тимошенко – Рейсснера. В статье [6] представлен обзор классических и неклассических моделей пластин и стержней с точки зрения применимости к описанию сдвиговых деформаций с использованием статических и динамических экспериментов по анализу прогиба и частотных характеристик.

Также интерес представляет изучение деформирования пластин, обладающих вязкоупругими, термоупругими и термовязкоупругими свойствами. В статье В. А. Ковалева [7] рассматривается трехслойная конструкция, наиболее толстый средний слой в которой является термовязкоупругим и описывается моделью теории Рейсснера, остальные слои являются термоупругими и описываются мембранной теорией. Представлены результаты вычислительных экспериментов по определению собственных форм в случае шарнирно закрепленной пластины.

Учет неоднородности материала, из которого изготовлены современные конструктивные элементы, а также возможное наличие дефектов и включений делает невозможным определение их механических свойств на основе стандартных экспериментов и приводит к необходимости решения новых обратных задач. В связи с этим актуальность приобретают разработка и развитие новых методов идентификации, например, на основе акустического подхода. К его достоинствам можно отнести относительную простоту и экономичность практической реализации, что крайне важно при решении практических задач.

Отметим, что в случае однородных материалов обратные задачи идентификации свойств пластин, местоположения, характеристик и дефектов в них достаточно хорошо изучены. Например, в работе [8] в рамках линейной теории упругости путем минимизации функционала невязки предложен способ одновременной идентификации местоположения и упругих свойств жестких включений в тонкой пластине. В статье [9] представлен специальный метод идентификации компонент жесткости однородной ортотропной пластины при анализе изгибных колебаний. Для реализации сформулировано специальное уравнение движения пластины относительно некоторых ортогональных осей, в которое явно входит угол между этими осями и осями ортотропии. Идентификация производится на основании информации об изменении этого угла в процессе колебаний. Также представлена процедура автоматической регуляризации, позволяющая эффективно преодолевать трудности, связанные с зашумлением измеряемых данных. В работе [10] разработан набор специальных экспериментов по идентификации компонент жесткости на основе данных о полях деформаций с использованием метода виртуальных полей (VFM).

В случае неоднородных материалов ситуация значительно усложняется. В статье [11] рассмотрена обратная задача идентификации свойств неоднородной круглой пластины в рамках модели Кирхгофа – Лява. Идентификация производилась на основе специального итерационного подхода, основанного на методе линеаризации, использующего метод Галеркина для решения прямых задач и метод регуляризации Тихонова для решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода относительно поправок к восстанавливаемым функциям на каждом шаге.

В настоящем исследовании подобная задача идентификации свойств неоднородной круглой пластины при установившихся колебаниях рассмотрена в рамках модели Тимошенко. Для сформулированной постановки выведены уравнения колебаний и граничные условия в безразмерном виде. Для решения обратной задачи идентификации функции цилиндрической жесткости на основе дополнительной информации о значениях АЧХ в некоторой точке предложен специальный метод решения, основанный на разложении функций цилиндрической жесткости, прогиба и угла поворота нормали по некоторым системам линейно независимых функций и последующем решении систем линейных и нелинейных уравнений относительно коэффициентов разложений. Решение обратной задачи проиллюстрировано набором вычислительных экспериментов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем цилиндрическую систему координат r, ϕ, z. Аналогично исследованию [11] будем рассматривать круглую пластину радиуса R толщины h с переменной цилиндрической жесткостью $D(r) = \dfrac{E(r)h^3}{12(1-\nu^2)}$, ($E(r)$ — модуль Юнга, $\nu = \mathrm{const}$ — коэффициент Пуассона), зависящей от радиальной координаты r. В рамках модели Тимошенко [2] с учетом симметрии по угловой координате компоненты вектора смещения имеют вид

$$u_r = z\vartheta_r, \qquad u_\phi = 0, \qquad u_z = w, \tag{1}$$

где ϑ_r — угол поворота нормали вдоль оси радиальной координаты, w — функция прогиба пластины.

Для вывода уравнений колебаний воспользуемся общим видом уравнений колебаний пластины в криволинейных координатах α_1, α_2 в рамках модели Тимошенко [12]:

$$\begin{gathered}
Q_1 - \frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial(H_2M_1)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(H_1M_{12})}{\partial\alpha_2} + M_{12}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2} - M_2\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\right) = -\frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial t^2},\\
Q_2 - \frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial(H_1M_2)}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial(H_2M_{12})}{\partial\alpha_1} + M_{12}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1} - M_1\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\right) = -\frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2\vartheta_2}{\partial t^2},\\
\frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial(H_2Q_1)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(H_1Q_2)}{\partial\alpha_2}\right) = -\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q.
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь Q_i — перерезывающие силы, H_i — коэффициенты Ламе, M_{ij} — изгибающие моменты,ρ — плотность.

В случае цилиндрических координат коэффициенты Ламе имеют вид: $H_1 = 1$, $H_2 = r$. В рассматриваемом случае симметричной по угловой координате пластины выражения для изгибающих моментов и перерезывающих сил, представленные в [12], принимают вид

$$\begin{gathered}
M_1 = M_r = D\left(\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r}\vartheta_r\right), \quad M_2 = M_\phi = D\left(\frac{1}{r}\vartheta_r + \nu\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}\right), \quad M_{12} = M_{r\phi} = 0,\\
Q_1 = Q_r = \frac{kEh}{2\,(1+\nu)}\left(\vartheta_r - \frac{\partial u}{\partial r}\right), \qquad Q_2 = Q_\phi = 0.
\end{gathered} \tag{3}$$

Параметр k — безразмерный коэффициент распределения касательных напряжений из теории Тимошенко – Миндлина [2], определяется из уравнения:

$$16\left(1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}k\right)(1-k) - (2-k)^4 = 0.$$

Ввиду того что в задаче рассматриваются установившиеся колебания пластины с частотой ω, отделим временной множитель в выражениях для функций прогиба, угла поворота и нагрузки, считая:

$$q = q(r)e^{-i\omega t}, \qquad w = w(r)e^{-i\omega t}, \qquad \vartheta_r = \vartheta_r(r)e^{-i\omega t}. \tag{4}$$

Подставляя выражения (3) и (4) в уравнения (2) и проводя ряд преобразований, запишем их в виде

$$\frac{6k(1-\nu)}{h^2}D\left(\vartheta_r-\frac{\partial w}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rD\left(\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}+\frac{\nu}{r}\vartheta_r\right))}{\partial r}-D\left(\frac{1}{r}\vartheta_r+\nu\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}\right)\right)-\frac{h^3}{12}\rho\omega^2\vartheta_r=0,$$

$$\frac{6k(1-\nu)}{h^2}\frac{\partial(Dr\left(\vartheta_r-\frac{\partial w}{\partial r}\right))}{\partial r}-\rho h\omega^2 rw+qr=0. \qquad (5)$$

<u>**Примечание.**</u> Второе уравнение в (2) при этом выполняется тождественно.

Запишем граничные условия, соответствующие жёсткой заделке по краю пластины:

$$w(R,\omega)=0, \qquad \vartheta_r(R,\omega)=0. \qquad (6)$$

Решение должно удовлетворять условиям симметрии вида

$$\frac{\partial}{\partial r}w(0,\omega)=0, \qquad \vartheta_r(0,\omega)=0. \qquad (7)$$

Для удобства построения численного решения задачи введем безразмерные параметры и переменные $r=R\xi$, $w=R\tilde{w}, D=D_0\tilde{D}$, $\quad D_0=\tilde{D}(R)$, $\vartheta_r=\theta$, $q=q_0\tilde{q}(\xi)$, $\varepsilon=h/R$ (знак тильды в дальнейшем будем опускать), тогда запишем (5)–(7) в виде

$$\begin{gathered}6k(1-\nu)D\left(\theta-w'\right)-\frac{\varepsilon^2}{\xi}\left(\left(D\xi\left(\theta'+\frac{\nu}{\xi}\theta\right)\right)'-D\left(\frac{1}{\xi}\theta+\nu\theta'\right)\right)-\frac{\kappa^2}{12}\theta=0,\\ 6k(1-\nu)\left(D\xi\left(\theta-w'\right)\right)'-\frac{\kappa^2}{\varepsilon^2}\xi w+Q\xi q=0,\end{gathered} \qquad (8)$$

$$w'(0,\kappa)=0, \qquad w(1,\kappa)=0, \qquad (9)$$

$$\theta(0,\kappa)=0, \qquad \theta(1,\kappa)=0, \qquad (10)$$

где $\kappa=\sqrt{h^5\rho/D_0\omega}$, $Q=q_0h^2R/D_0$. В рассматриваемой постановке плотность пластины ρ считалась известной и постоянной.

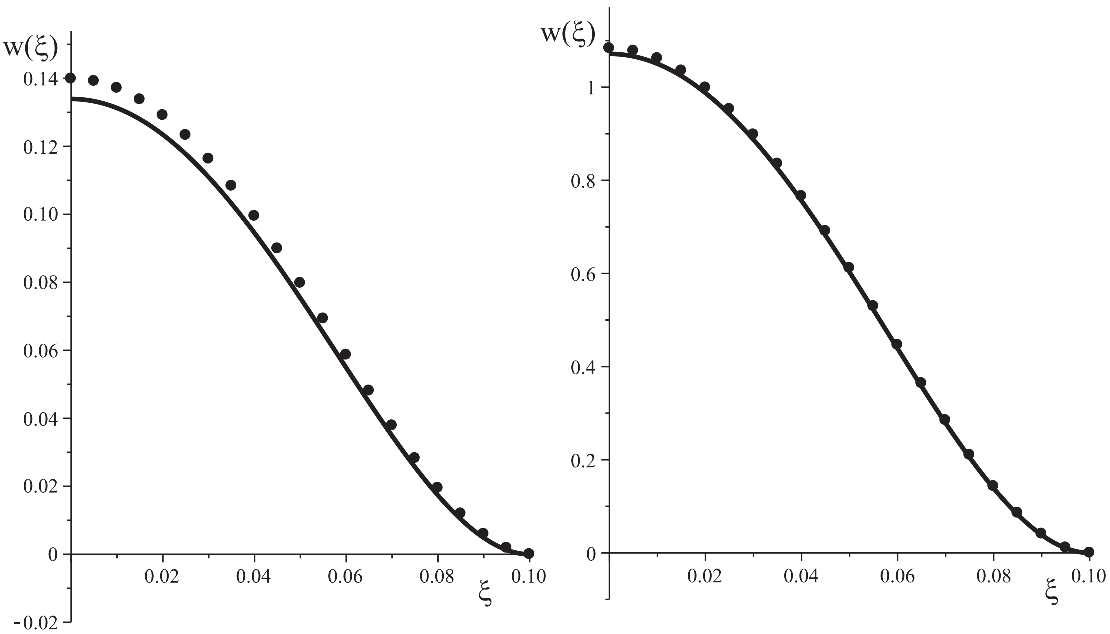
Обратная задача заключается в определении набора функций $D(\xi)$, $w(\xi,\kappa)$ и $\theta(\xi,\kappa)$, удовлетворяющих (8)–(10) по дополнительной информации о функции смещения при некотором $\xi=\xi_0$ в заданном частотном диапазоне:

$$w(\xi_0,\kappa)=f(\kappa), \qquad \kappa\in[\kappa_1,\kappa_2]. \qquad (11)$$

Отметим, что обратная задача в такой постановке является существенно нелинейной, для ее решения требуется разработка специальных методов.

2. СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ТИМОШЕНКО И КИРХГОФА – ЛЯВА

Прямая задача по определению функции прогиба $w(\xi,\kappa)$ и угла поворота нормали $\theta(\xi,\kappa)$ при известной функции цилиндрической жесткости $D(\xi)$ решалась методом пристрелки и проекционным методом Галеркина [13]. Оба метода показали одинаковые результаты для различных значений $D(\xi)$.



a / a *б / b*

Рис. 1. Сравнение функции прогиба в моделях Тимошенко и Кирхгофа – Лява: *а* — $R = 0.1$ м, $h = 0.01$ м, $\varepsilon = 0.01/0.1 = 0.1$; *б* — $R = 0.1$ м, $h = 0.005$ м, $\varepsilon = 0.005/0.1 = 0.05$

Fig. 1. Comparison of the deflection function in the models of Timoshenko and Kirchhoff – Love: *a* — $R{=}0.1$ m, $h{=}0.01$ m, $\varepsilon{=}0.01/0.1{=}0.1$; *b* — $R{=}0.1$ m, $h{=}0.005$ m, $\varepsilon{=}0.005/0.1{=}0.05$

Для проверки корректности выведенной постановки задачи и тестирования метода решения прямой задачи функция прогиба в размерном виде (5)–(7) в частном случае сравнивались с известным каноническим прогибом пластины рамках в модели Кирхгофа – Лява [2] $w = \dfrac{q}{64D}(R^2 - r^2)^2$ в задаче статики ($\omega = 0$). Сравнение производилось в размерном виде при заданном наборе механических параметров, соответствующем стали: $k = 0.86$, $\nu = 0.3$, $E = 200 \cdot 10^9$ Па, $\rho = 7000$ кг/м^3, для двух наборов геометрических параметров: .а — $R = 0.1$ м, $h = 0.01$ м, $\varepsilon = 0.01/0.1 = 0.1$; *б* — $R = 0.1$ м, $h = 0.005$ м, $\varepsilon = 0.005/0.1 = 0.05$. Нагрузка полагалась равной $q = 157 \cdot 10^7$. Результаты сравнения представлены на рис. 1, *а*, *б* соответственно. График прогиба в рамках модели Кирхгофа – Лява отмечен сплошной линией, полученное решение в рамках модели Тимошенко — точками. Максимальное расхождение в первом случае не превосходит 5% в первом случае и 1.2% во втором. Полученные результаты соответствуют известным [3] результатам о близости моделей Тимошенко и Кирхгофа – Лява для описания тонких изотропных пластин.

3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ. МЕТОД АЛГЕБРАИЗАЦИИ

Введем возможные функции прогиба $w_1(\xi, \kappa)$ и угла поворота нормали $\theta_1(\xi, \kappa)$, удовлетворяющие граничным условиям (9) и (10) соответственно. Для формулировки методики решения обратной задачи (8)–(11) скалярно умножим первое уравнение (8) на функцию $\theta_1(\xi, \kappa)$, а второе уравнение (8) скалярно умножим на функцию $w_1(\xi, \kappa)$. Пользуясь формулой интегрирования по частям, граничными условиями и проводя несложные преобразования, получим следующие соотношения:

$$\int\limits_0^1 \left[\left[6k(1-\nu)D\theta_1 + \frac{\varepsilon^2}{\xi}\frac{\nu}{\xi}D\xi\theta_1' + D\frac{1}{\xi}\theta_1 - \frac{\kappa^2}{12}\theta_1\right]\theta + \right.$$

$$+\left[\frac{\varepsilon^2}{\xi}D\xi\theta_1' + D\nu\theta_1\right]\theta' - \left[6k(1-\nu)D\theta_1\right]w'\Bigg]\xi d\xi = 0, \tag{12}$$

$$\int_0^1 \left[\left[6k(1-\nu)D\xi w_1'\right]\theta + \left[\frac{\kappa^2}{\varepsilon^2}\xi w_1\right]w - \left[6k(1-\nu)D\xi w_1'\right]w'\right]\xi d\xi = \int_0^1 Q\xi^2 q w_1 d\xi. \tag{13}$$

Введем ϕ_n, γ_n и ψ_m — системы линейно независимых функций на $[0,1]$, причем функции ϕ_n удовлетворяют граничным условиям (9), функции γ_n — условиям (10). Будем искать решение сформулированной обратной задачи (8)–(11) в виде

$$w(\xi,\kappa) = \sum_{i=1}^{N} a_i\phi_i, \qquad \theta(\xi,\kappa) = \sum_{i=1}^{N} b_i\gamma_i, \qquad D(\xi) = \sum_{j=1}^{M} C_j\psi_j. \tag{14}$$

Функции-коэффициенты a_i и b_i при этом зависят от параметра κ.

Отметим, что левые части в соотношениях (12), (13) имеют билинейную структуру. Это означает, что при фиксированных w_1 и θ_1 эти соотношения линейны по w, θ, а при фиксированных w и θ — линейны по w_1, θ_1. Подставляя разложения (14) в соотношение (12), (13), получим равенства вида

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{N}\left(a_i\sum_{j=1}^{M}\left(C_jA_1(\psi_j,\phi_i,\theta_1)\right) + b_i\sum_{j=1}^{M}\left(C_jB_1(\psi_j,\gamma_i,\theta_1) + R_1(\theta_1,\kappa)\right)\right) = 0,\\ \sum_{i=1}^{N}\left(a_i\sum_{j=1}^{M}\left(C_jA_2(\psi_j,\phi_i,w_1) + R_2(w_1,\kappa)\right) + b_i\sum_{j=1}^{M}\left(C_jB_2(\psi_j,\gamma_i,w_1)\right)\right) = F(w_1).\end{gathered} \tag{15}$$

Полагая $w_1 = \phi_n$, $\theta_1 = \gamma_n$, $n = 1,\ldots,N$, из уравнений (15) получим систему $2N$ линейных относительно функций $a_i(\kappa)$ и $b_i(\kappa)$ уравнений, которую можно записать в виде

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{N}\left(a_i\sum_{j=1}^{M}\left(C_jA_1^{ijn}\right) + b_i\sum_{j=1}^{M}\left(C_jB_1^{ijn} + R_1^n(\kappa)\right)\right) = 0, \qquad n = 1,\ldots,N,\\ \sum_{i=1}^{N}\left(a_i\sum_{j=1}^{M}\left(C_jA_2^{ijn} + R_2^n(\kappa)\right) + b_i\sum_{j=1}^{M}\left(C_jB_2^{ijn}\right)\right) = F^n, \qquad n = 1,\ldots,N,\end{gathered} \tag{16}$$

где $A_1^{ijn} = A_1(\psi_j,\phi_i,\gamma_n)$, $A_2^{ijn} = A_1(\psi_j,\phi_i,\phi_n)$, $B_1^{ijn} = B_1(\psi_j,\gamma_i,\gamma_n)$, $B_2^{ijn} = B_2(\psi_j,\gamma_i,\phi_n)$, $R_1^n = R_1(\theta_n,\kappa)$, $R_2^n = R_2(\phi_n,\kappa)$, $F^n = F(\phi_n)$.

Линейная система (16) решается относительно функций-коэффициентов $a_i(\kappa)$, $b_i(\kappa)$. После подстановки их в разложения (14) получаются выражения для $w(\xi,\kappa,\{C_j\})$, $\theta(\xi,\kappa,\{C_j\})$, зависящие от параметра κ и набора коэффициентов $\{C_j\}_{j=1,\ldots,M}$. Выражение для функции $w(\xi,\kappa,\{C_j\})$ подставляется в дополнительное условие (11) обратной задачи. Выбирая набор значений κ_m, $m = 1,\ldots,M$, формируем систему из M нелинейных уравнений M-го порядка относительно коэффициентов $\{C_j\}_{j=1,\ldots,M}$:

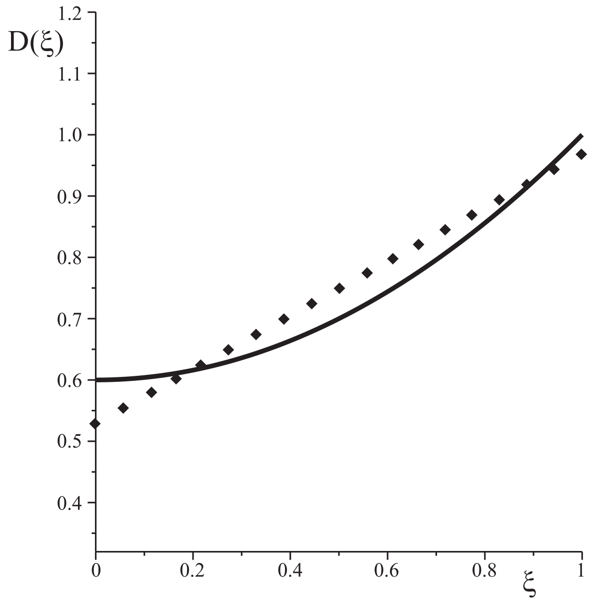
$$\sum_{i=1}^{N} a_i\left(\xi_0,\kappa_m,\{C_j\}\right)\phi_i = f(\kappa_m), \qquad j,m = 1,\ldots,M. \tag{17}$$

Из решения системы (17) определяются коэффициенты $\{C_j\}_{j=1,\ldots,M}$, затем восстанавливается функция цилиндрической жесткости $D(\xi)$ согласно представлению (14).

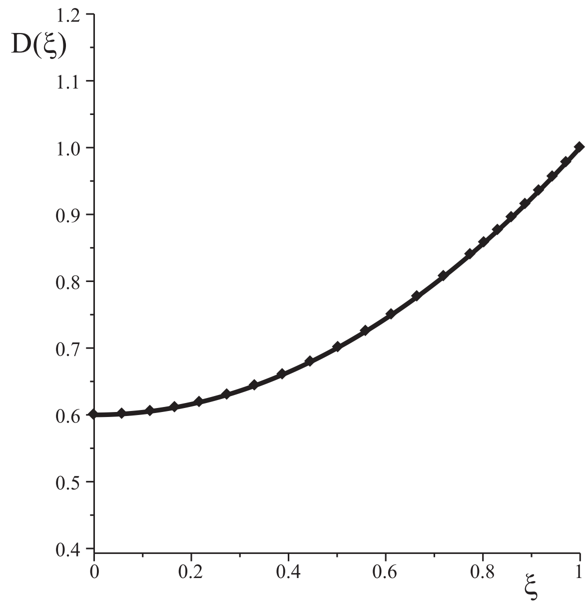
4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Далее приведены результаты вычислительных экспериментов по решению обратной задачи (8)–(11) об идентификации неизвестной функции жесткости $D(\xi)$. Коэффициент Пуассона полагался равным ν=0.3, соответствующий ему безразмерный коэффициент распределения касательных напряжений $k = 0.86$. При реализации описанного метода алгебраизации в качестве функций $\phi_n(\xi)$ и $\gamma_n(\xi)$ в разложении (14) выбирались функции $\phi_n(\xi) = (1 - \xi^2)^2\xi^{2(n-1)}$ и $\gamma_n(\xi) = \sin(n\pi\xi)$, $n = 1, \ldots, N$ соответственно, в качестве $\psi_m(\xi)$ — функции $\psi_m(\xi) = \xi^{m-1}$, $m = 1, \ldots, M$. Параметр N, характеризующий количество функций $\phi_n(\xi)$ и $\gamma_n(\xi)$ в разложениях (14) функций $w(\xi, \kappa)$ и $\theta(\xi, \kappa)$, выбирался равным $N = 5$. Такое значение параметра $N = 5$, с одной стороны, позволяет достаточно точно решать прямую задачу методом Галеркина (погрешность не превосходит 2–3%), с другой стороны, системы нелинейных уравнений, возникающие при использовании метода алгебраизации, при таком значении параметра удается решать численно в сравнительно короткое время. Увеличение параметра N вносит существенные сложности в вычислительную реализацию, уменьшение влияет на точность решения прямой задачи и соответственно не позволяет произвести идентификацию должным образом.

Пример 1. Восстановление возрастающей квадратичной функции $D(\xi) = 0.6 + 0.4\xi^2$. Частотный диапазон выбирался между первой и второй резонансными частотами $[\kappa_1, \kappa_2] = [3.4, 6.9]$. На рис. 2 представлены графики точного решения (сплошная линия) и восстановленной функции (точки). В первом случае (рис. 2, *а*) восстановление производилось в классе линейных функций ($M = 2$), во втором (рис. 2, *б*) — в классе квадратичных ($M = 3$). Относительная погрешность восстановления в первом случае при этом не превосходит 6%, во втором случае функция восстановилась точно.



а / a

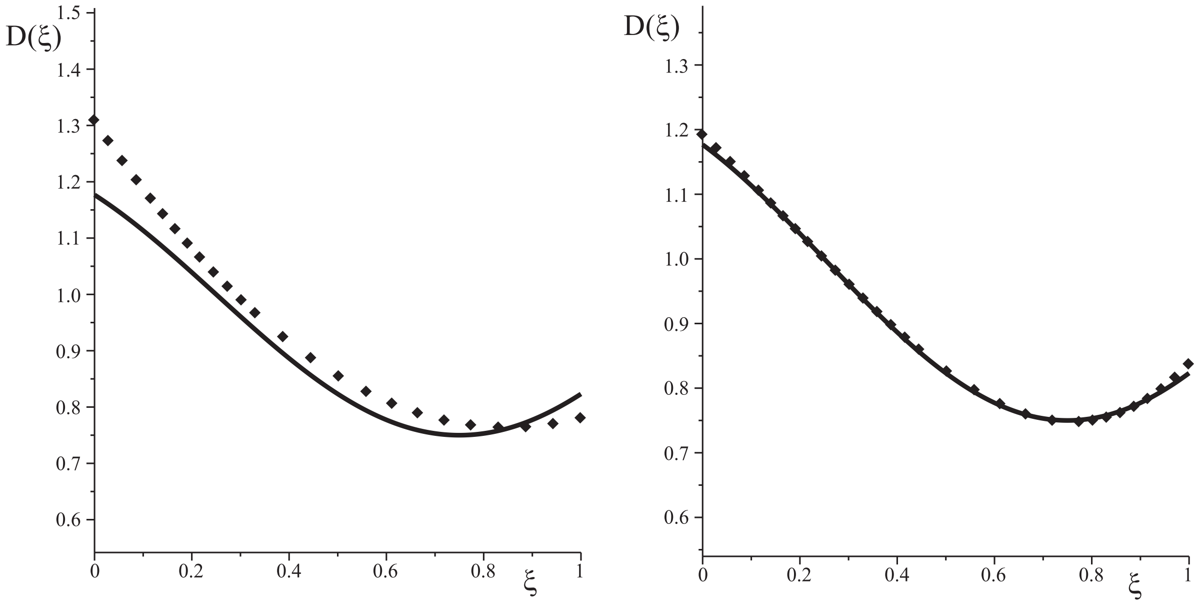


б / b

Рис. 2. Результат восстановления монотонно возрастающей функции жесткости: *а* — $M = 2$; *б* — $M = 3$

Fig. 2. The result of the restoration of the monotonically increasing stiffness function: *a* — $M = 2$; *b* — $M = 3$

Пример 2. Восстановление немонотонной функции $D(\xi) = 1 + 0.25\cos(\pi(\xi + 0.25))$. Частотный диапазон выбирался до первой резонансной частоты $[\kappa_1, \kappa_2] = [0.1, 3.1]$. На рис. 3 представлены графики точного решения (сплошная линия) и восстановленной функции (точки). В первом случае (рис. 3, *а*) восстановление производилось в классе квадратичных функций ($M = 3$), во втором (рис. 3, *б*) — в классе кубических ($M = 4$). Относительная погрешность восстановления в первом случае при этом не превосходит 10%, во втором случае не превосходит 1.5%.



а / *a* *б* / *b*

Рис. 3. Результат восстановления немонотонной функции жесткости: *а* — $M = 3$; *б* — $M = 4$

Fig. 3. The result of the restoration of the nonmonotonic stiffness function : *a* — $M = 3$; *b* — $M = 4$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Серия вычислительных экспериментов по определению переменной функции цилиндрической жесткости позволяет сделать вывод о достаточной эффективности проекционного метода решения обратной задачи. На практике полученная в результате решения обратной задачи на основе предложенного подхода информация об уровне, характере монотонности, расположении точек экстремумов искомых функций-характеристик может дать возможность использовать разработанный подход при решении многих прикладных задач.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00144мол_а) и Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1.

Библиографический список

1. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М. : Физматлит, 2007. 223 с.
2. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М. : Физматгиз, 1963. 635 с.

3. *Григолюк Э. И. Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней пластин и оболочек. М. : ВИНИТИ, 1973. 272 с.
4. *Товстик П. Е.* Неклассические модели балок, пластин и оболочек // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 3. С. 72–85.
5. *Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Двухмерная модель пластины из анизотропного неоднородного материала // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 2. С. 32–45.
6. *Endo M.* Study on an alternative deformation concept for the Timoshenko beam and Mindlin plate models // Intern. J. Engineering Sci. 2015. Vol. 7. P. 32–48. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2017.08.001.
7. *Ковалев В. А.* Динамика многослойных термовязкоупругих пластин // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 1. С. 61–78.
8. *Гук Н. А., Степанова Н. И.* Идентификация геометрических параметров и упругих свойств жестких включений в тонкой пластине // Восточно-Европейский журн. передовых технологий. Прикладная механика. 2016. Т. 2, № 7(80). С. 4–9. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.64395.
9. *Ablitzer F., Pezerat C., Lascoup B., Brocail J.* Identification of the flexural stiffness parameters of an orthotropic plate from the local dynamic equilibrium without a priori knowledge of the principal directions // J. Sound and Vibration. 2017. Vol. 404. P. 31–46. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.05.037.
10. *Gu X., Pierron F.* Towards the design of a new standard for composite stiffness identification // Composites Part A : Applied Science and Manufacturing. 2016. Vol. 91, pt. 2. P. 448–460. DOI: 10.1016/j.compositesa.2016.03.026.
11. *Bogachev I. V., Vatul'yan A. O., Yavruyan O. V.* Reconstruction of the stiffness of an inhomogeneous elastic plate // Acoustical physics. 2016. Vol. 62, № 3. P. 377–382. DOI: 10.1134/S1063771016030052.
12. *Фридман Л. И., Моргачев К. С.* Построение и реализация решений задач нестационарных колебаний пластин (модель Тимошенко) // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонаучная сер. 2006. Т. 42, № 2. С. 92–102.
13. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М. : Мир, 1988. 352 с.

Образец для цитирования:

Богачев И. В., Ватульян А. О., Дударев В. В., Лапина П. А., Недин Р. Д. Идентификация свойств неоднородной пластины в рамках модели Тимошенко // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 419–430. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430.

Identification of Properties of Inhomogeneous Plate in the Framework of the Timoshenko Model

I. V. Bogachev, A. O. Vatulyan, V. V. Dudarev, P. A. Lapina, R. D. Nedin

Ivan V. Bogachev, orcid.org/0000-0002-4725-5102, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a, Mil'chakova Str., Rostov-on-Don, Russia, 344090, bogachev89@yandex.ru

Alexandr O. Vatulyan, orcid.org/0000-0003-0444-4496, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a, Mil'chakova Str., Rostov-on-Don, Russia, 344090, vatulyan@math.rsu.ru

Vladimir V. Dudarev, orcid.org/0000-0003-2378-7574, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a, Mil'chakova Str., Rostov-on-Don, Russia, 344090, dudarev_vv@mail.ru

Polina A. Lapina, orcid.org/0000-0002-4589-0479, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a, Mil'chakova Str., Rostov-on-Don, Russia, 344090, palapina@sfedu.ru
Rostislav D. Nedin, orcid.org/0000-0003-4366-9591, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a, Mil'chakova Str., Rostov-on-Don, Russia, 344090, rdn90@bk.ru

We consider an inverse problem on identification of properties of an inhomogeneous circular plate for the Timoshenko model. The identification procedure is based on the analysis of acoustical response at some point of the plate in the given set of frequencies. The vibrations are caused by a uniformly distributed load applied to the upper face of the plate. We have derived the oscillation equations for a symmetric circular plate and formulated the boundary conditions in the dimensionless form. To solve the inverse problem on a reconstruction of the inhomogeneous bending stiffness function, we have developed a special solving technique called the 'algebraization method' based on a decomposition of the sought-for functions by systems of linearly independent functions. After substitution of these decompositions in the original motion equations, the inverse problem is reduced to solving a system of linear equations with respect to the expansion coefficients for the deflection function and the normal rotation angle, and subsequent solving of a system of nonlinear equations with respect to the expansion coefficients for the bending stiffness function. The method developed is illustrated by a series of computational experiments on a reconstruction of monotonic and non-monotonic functions showing its efficiency.

Key words: plate, Timoshenko model, identification, method of algebraization.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-31-00144mol_a) and by the Program for Fundamental Research on the strategic directions of science development of the RAS Presidium no. 1.

References

1. Vatulyan A. O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse problems in mechanics of solids]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 223 p. (in Russian).
2. Timoshenko S. P., Voynovskiy-Kriger S. *Plastinki i obolochki* [The plates and the shells]. Moscow, Fizmatgiz, 1963. 635 p. (in Russian).
3. Grigoluk E. I., Selezov I. T. *Neklassicheskie teorii kolebanij sterzhnej plastin i obolochek* [Nonclassical theories of vibrations of plates of plates and shells]. Moscow, VINITI, 1973. 272 p. (in Russian).
4. Tovstik P. E. On the non-classic models of beams, plates and shells. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2008, vol. 8, iss. 3, pp. 72–85 (in Russian).
5. Tovstik P. E., Tovstik T. P. Two-dimensional model of an anisotropic non-uniform material plate. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids*, 2017, no. 2, pp. 32–45 (in Russian).
6. Endo M. Study on an alternative deformation concept for the Timoshenko beam and Mindlin plate models. *Intern. J. Engineering Sci.*, 2015, vol. 7, pp. 32–48. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2017.08.001.
7. Kovalev V. A. Dynamics of multilayered thermoviscoelastic plates. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 4, pt. 1, pp. 61–78 (in Russian).
8. Guk N. A., Stepanova N. I. Identification of the geometry and elastic properties of rigid inclusions in a thin plate. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2016, vol. 2, no. 7(80), pp. 4–9 (in Russian). DOI: 10.15587/1729-4061.2016.64395.
9. Ablitzer F., Pezerat C., Lascoup B., Brocail J. Identification of the flexural stiffness parameters of an orthotropic plate from the local dynamic equilibrium without a priori

knowledge of the principal directions. *J. Sound and Vibration*, 2017, vol. 404, pp. 31–46. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.05.037.
10. Pierron F., Gu X. Towards the design of a new standard for composite stiffness identification. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2016, vol. 91, pt. 2, pp. 448–460. DOI: 10.1016/j.compositesa.2016.03.026.
11. Bogachev I. V., Vatul'yan A. O., Yavruyan O. V. Reconstruction of the stiffness of an inhomogeneous elastic plate. *Acoustical physics*, 2016, vol. 62, no. 3, pp. 377–382. DOI: 10.1134/S1063771016030052.
12. Fridman L. I., Morgachev K. S. Construction and implementation of solutions to problems of nonstationary plate oscillations (Tymoshenko model). *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2006, vol. 42, no. 2, pp. 92–102 (in Russian).
13. Fletcher K. *Chislennye metody na osnove metoda Galerkina* [Numerical methods based on the Galerkin method]. Moscow, Mir, 1988. 352 p. (in Russian).

Cite this article as:
Bogachev I. V., Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Lapina P. A., Nedin R. D. Identification of Properties of Inhomogeneous Plate in the Framework of the Timoshenko Model. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 419–430 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430.

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.6

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

О СХОДИМОСТИ ЖАДНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ МОНОТОННОЙ РЕГРЕССИИ

А. А. Гудков, С. В. Миронов, А. Р. Файзлиев

Гудков Александр Александрович, лаборант Института рисков, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, alex-good96@mail.ru

Миронов Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математической кибернетики и компьютерных наук, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, mironovsv@info.sgu.ru

Файзлиев Алексей Раисович, кандидат экономических наук, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, faizlievar1983@mail.ru

В статье представлены жадные алгоритмы, которые используют подход типа Франка – Вульфа для нахождения разреженной монотонной регрессии. Проблема нахождения монотонной регрессии возникает при сглаживании эмпирических данных, в задачах динамического программирования, математической статистике и во многих других прикладных задачах. Для решения данной задачи требуется найти неубывающую последовательность точек, имеющую наименьшую ошибку приближения к заданному множеству точек на плоскости. Задача построения монотонной регрессии может быть сформулирована в виде задачи выпуклого программирования с линейными ограничениями и имеет неполиномиальную сложность. В статье также находятся оценки скорости сходимости представленных жадных алгоритмов.

Ключевые слова: жадные алгоритмы, алгоритм Франка – Вульфа, монотонная регрессия.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-431-440

ВВЕДЕНИЕ

Начиная с 1980-х гг. наблюдается повышенный интерес к оценкам с ограничениями в математической статистике [1]. Одной из таких задач является задача построения монотонной регрессии, которая состоит в том, чтобы найти неубывающую последовательность точек, имеющую наименьшую ошибку приближения к заданному множеству точек на плоскости. Обзор результатов по задаче построения монотонной регрессии можно найти в книге Т. Робертсона (Robertson), Ф. Райта (Wright), и Р. Декстры (Dykstra) [2]. В статьях [3–6] рассматривается проблема нахождения монотонной регрессии в рамках квадратичного и выпуклого программирования.

Используя подход на основе математического программирования, авторы статей [7–9] недавно предложили новые результаты по этой проблеме. В статьях [10, 11] рассматривалась задача такого типа для случая частичных порядков, определенных переменными множественной регрессии.

Монотонная регрессия используется в различных областях:

- в математической статистике, например, при непараметрическом восстановлении функций распределения или функций плотности [1, 12];
- при сглаживании эмпирических данных, например в статье [13], используется монотонная регрессия как метод анализа данных при подсчете оценки риска заболевания по отношению к точечному источнику загрязнения окружающей среды;
- в задачах динамического программирования; так, в статье [14] представлены алгоритмы решения задач динамического программирования на основе методов формосохраняющей аппроксимации и показана применимость алгоритмов, сохраняющих конус, для решения задач оптимального роста.

При построении монотонной регрессии мы предполагаем, что существует (неубывающая) зависимость между сигналом x и ответом $y(x)$.

Пусть $\mathbb{B}[0,1]$ есть пространство ограниченных функций с нормой $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Функция $z \in \mathbb{B}[0,1]$ называется монотонной, если для каждой пары точек $x_2 > x_1$ имеет место неравенство

$$z(x_2) - z(x_1) \geqslant 0.$$

Обозначим через Δ_1 множество всех монотонных функций из $\mathbb{B}[0,1]$.

Задача построения монотонной регрессии может быть сформулирована в виде задачи выпуклой оптимизации следующим образом: необходимо найти функцию $z \in \mathbb{B}[0,1]$ с наименьшей ошибкой приближения функции $y \in \mathbb{B}[0,1]$ в норме $L_q[0,1]$, $q \in (1,2]$, при условии монотонности z:

$$E(z) = \int_0^1 (z(x) - y(x))^q dx \to \min_{z\in\Delta_1}. \tag{1}$$

В этой статье рассматриваются жадные алгоритмы, использующие подход типа Франка – Вульфа для нахождения разреженной монотонной регрессии, и находятся оценки скорости сходимости этих алгоритмов.

1. СЛАБЫЙ ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ В $L_1[0,1]$

Множество элементов $\mathscr{D}$ пространства $\mathbb{B}[0,1]$ называется *словарем*, если каждый элемент $g \in \mathscr{D}$ ограничен по норме единицей, $\|g\| \leqslant 1$, и замыкание оболочки $\mathscr{D}$ есть $\mathbb{B}[0,1]$, т. е. $\overline{\operatorname{span}\mathscr{D}} = \mathbb{B}[0,1]$.

Обозначим:

$$\theta_a(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geqslant a. \end{cases}$$

Тогда множество $\{\theta_a : \ a \in (0,1)\}$ является словарем в $\mathbb{B}[0,1]$, будем в дальнейшем обозначать его $\mathscr{D}$.

Таким образом, решение задачи ищется в виде $z = \sum_{i=1}^{n} b_i\theta_{a_i}$, где $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ и $b_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$z(1) - z(0) = \sum_{i=1}^{n} b_i = \sup_{x\in[0,1]} y(x) - \inf_{x\in[0,1]} y(x).$$

Обозначим через $S(\mathscr{D})$ замыкание в $\mathbb{B}[0,1]$ всех таких z.

Одним из вариантов конструктивных методов поиска наилучших m-членных приближений являются жадные алгоритмы. Жадные алгоритмы позволяют получить разреженные решения по отношению к словарю $\mathscr{D}$. Возможно, метод Франка – Вульфа [15], который также известен как метод условного градиента [16], является одним из наиболее известных алгоритмов для нахождения оптимальных решений задач условной выпуклой оптимизации. Важный вклад в разработку алгоритмов типа алгоритма Франка – Вульфа можно найти в [17–19]. В статье [19] приведены результаты двойственной сходимости для алгоритмов типа Франка – Вульфа на основе развития концепции двойственности, представленной в работе [17]. Недавние результаты по сходимости жадных алгоритмов можно найти в работах [20–29].

В настоящей работе рассматривается жадный алгоритм для поиска решений задачи выпуклой оптимизации (1), которые являются разреженными относительно некоторого словаря, в пространстве $\mathbb{B}[0,1]$. Полученные в этом параграфе результаты по оценке скорости сходимости основаны на использовании результатов статей [28,30].

Заметим, что функция E, определенная в (1), является дифференцируемой по Фреше. Обозначим через $\langle E'(x), y\rangle$ значение функционала $E'(x)$ (производной по Фреше функции E в точке x) в точке y. Для решения задачи (1) мы будем использовать алгоритм 1. Алгоритм для каждого $m \geqslant 1$ находит следующий элемент G_m по индукции с использованием текущего элемента G_{m-1} и элемента словаря θ_{a_m}, полученного на шаге жадного спуска.

Алгоритм 1: Слабый жадный алгоритм

начало алгоритма

- $\cdot$ Пусть $G_0 = 0$;
- **цикл для каждого** $m = 1, 2, \ldots, M$
  - $\cdot$ (*Шаг жадного спуска*) Найти точку $a_m \in (0,1)$ (т. е. функцию $\theta_{a_m} \in \mathscr{D}$) такую, что $\langle -E'(G_{m-1}), \theta_{a_m}\rangle \geqslant t_m \sup\limits_{s\in\mathscr{D}} \langle -E'(G_{m-1}), s\rangle$;
  - $\cdot$ (*Линейный поиск*) Найти число $0 \leqslant \lambda_m \leqslant 1$, такое, что $E\left((1-\lambda_m)G_{m-1} + \lambda_m\theta_{a_m}\right) = \inf\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant1} E\left((1-\lambda)G_{m-1} + \lambda\theta_{a_m}\right)$;
  - $\cdot$ (*Переход к следующей точке*) $G_m = (1-\lambda_m)G_{m-1} + \lambda_m\theta_{a_m}$;

конец алгоритма

На шаге жадного спуска мы максимизируем функционал, который использует градиентную информацию в точке G_{m-1}, полученной на предыдущей итерации алгоритма. Алгоритм 1 принадлежит классу методов типа метода Франка – Вульфа, так как в каждом текущем элементе G_{m-1} он движется в направлении минимума линеаризованной целевой функции E на допустимом множестве, которым в данном случае является словарь $\mathscr{D}$.

На шаге жадного спуска мы ищем супремум по словарю $\mathscr{D}$ (а не множеству $S(\mathscr{D})$), так как элементы $S(\mathscr{D})$ являются в основном линейными комбинациями бесконечного числа элементов словаря. Таким образом, полученное оптимальное решение не обязательно будет разреженным по отношению к словарю $\mathscr{D}$.

Найти точное решение подзадачи $\sup_{s\in\mathscr{D}}\langle -E'(G_{m-1}), s\rangle$ практически невозможно за конечное время для большинства функций y. Поэтому алгоритм 1 использует ослабляющую последовательность τ на шаге жадного спуска для нахождения приближенного решения, которое имеет качество приближения, по меньшей мере t_m, на шаге m. По этой причине алгоритм называется «слабым».

Шаг линейного поиска алгоритма 1 находит наилучший элемент на отрезке, соединяющем текущую точку G_{m-1} и элемент θ_{a_m}.

Положим $\Omega := \{f \in \mathbb{B}[0,1] :\ E(x) \leqslant E(0)\}$, и заметим, что Ω ограничено. Анализ сходимости жадных алгоритмов существенно использует меру «нелинейности» целевой функции E на Ω, которая может быть оценена с помощью модуля гладкости функции E.

Напомним, что модуль гладкости ρ функции E на ограниченном множестве Ω определяется следующим образом:

$$\rho(E,u) = \frac{1}{2}\sup_{f\in\Omega,\|g\|=1}|E(f+ug)+E(f-ug)-2E(f)|, \qquad u>0. \tag{2}$$

E называется равномерно гладкой на Ω, если $\lim_{u\to 0}\rho(E,u)/u = 0$.

Следующая лемма легко может быть установлена.

Лемма 1. *Функция E, определенная в* (1)*, является равномерно гладкой функцией с модулем гладкости, удовлетворяющем неравенству $\rho(E,u) \leqslant \gamma u^q$, $1 < q \leqslant 2$, $\gamma > 0$.*

Используя геометрические свойства функции E и результаты статьи [30], мы можем доказать следующую оценку скорости сходимости жадного алгоритма 1.

Теорема 1. *Пусть $\tau = \{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0 < t_k \leqslant 1$, $k = 1,2,\ldots$, есть ослабляющая последовательность. Тогда*

$$E(G_m) - E(z^*) \leqslant \left(1 + C_1(q,\gamma)\sum_{k=1}^{m} t_k^p\right)^{1-q}, \qquad p := \frac{q}{q-1}, \qquad m \geqslant 2, \tag{3}$$

где $z^* \in S(\mathscr{D})$ есть оптимальное решение и $C_1(q,\gamma)$ есть положительное число, не зависящее от m.

2. ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ МОНОТОННОЙ РЕГРЕССИИ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО НАБОРА ТОЧЕК

Рассмотрим задачу построения монотонной регрессии для дискретного набора точек: сигналу $x = (x_1,\ldots,x_n)$ соответствуют значения $y = (y_1,\ldots,y_n)$. Полагаем, что $x_{i+1} - x_i \neq \mathrm{const}$, $x_i < x_{i+1}$, $i = 1,\ldots,n-1$.

Последовательность $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ называется монотонной, если $z_i - z_{i-1} \geqslant 0$, $i = 2, \ldots, n$.

Обозначим через Δ_1^n множество всех монотонных последовательностей в $\mathbb{R}^n$.

Тогда задача построения монотонной регрессии может быть записана как задача условной выпуклой оптимизации: необходимо найти вектор $z \in \mathbb{R}^n$ с наименьшим значением квадратичной ошибки приближения данного вектора $y \in \mathbb{R}^n$ при условии монотонности z:

$$f(z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \to \min_{z\in\Delta_1^n}. \tag{4}$$

Простой итеративный алгоритм для решения задачи (4) предложен в [31, 32] и называется PAVA (Pool-Adjacent-Violators Algorithm). В работе [5] рассматривается обобщение этого алгоритма.

Для построения жадного алгоритма для решения задачи (4) мы перейдем от точек z_i к их скачкам $\zeta_i = z_{i+1} - z_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\zeta_0 = z_1$. Тогда задача (4) может быть переписана в следующем виде:

$$g(\zeta) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i-1}\zeta_j - y_i\right)^2 \to \min_{\zeta\in S}, \tag{5}$$

где S есть множество всех $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\min_i y_i \leqslant \zeta_0 \leqslant \max_i y_i$, $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ и $\sum\limits_{j=0}^{n-1}\zeta_j \leqslant \max_i y_i$.

Пусть $\nabla g(\zeta)$ означает градиент g в точке ζ,

$$\nabla g(\zeta) = \left(\frac{\partial g}{\partial\zeta_0}, \frac{\partial g}{\partial\zeta_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial\zeta_{n-1}}\right),$$

где

$$\frac{\partial g}{\partial\zeta_k} = \frac{2}{n}\sum_{i=k}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i-1}\zeta_j - y_i\Big), \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

Следует отметить, что для задач большой размерности задачи (5) классическими алгоритмами градиентного спуска решение может оказаться сложным с вычислительной точки зрения. В этой связи в настоящем исследовании предлагается использовать жадный алгоритм типа алгоритма Франка – Вульфа для решения задачи (5). Псевдокод жадного алгоритма приведен ниже (алгоритм 2).

Оценка скорости сходимости алгоритма 2 приведена в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{\zeta^t\}$ получена в соответствии с алгоритмом 2. Тогда для любого $t \geqslant 2$*

$$g(\zeta^t) - g(\zeta^*) \leqslant 4\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}}\,\frac{(\max_i y_i - \min_i y_i)^2}{t+2}, \tag{6}$$

где ζ^* есть оптимальное решение задачи (5).

Доказательство. Известно [15], что для всех $t \geqslant 2$ имеет место неравенство

$$g(\zeta^t) - g(\zeta^*) \leqslant \frac{2L(Diam(S))^2}{t+2},$$

Алгоритм 2: Жадный алгоритм для решения задачи (5)

начало алгоритма

- Зададим число итераций N;
- Начальная точка $\zeta^0 = (\zeta_0^0, 0, \dots, 0)$, где $\zeta_0^0 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$;
- Счетчик числа итераций $t = 0$;
- **цикл пока** $t < N$ **выполнять**
  - Вычислить $\nabla g(\zeta^t)$, градиент функции g в точке ζ^t;
  - Пусть $\widetilde{\zeta}^t$ есть решение линейной оптимизационной задачи $\nabla g(\zeta^t)^T \cdot \zeta \to \min\limits_{\zeta \in S}$, где $\nabla g(\zeta^t)^T \cdot \zeta$ есть скалярное произведение векторов;
  - Положим $\zeta^{t+1} = \zeta^t + \alpha_t(\widetilde{\zeta}^t - \zeta^t)$, $\alpha_t = \frac{2}{t+2}$ и $t := t+1$;
- Восстановить $z = (z_1, \dots, z_n)$ на основе вектора скачков ζ^N;

конец алгоритма

где L есть константа Липшица и $Diam(S)$ есть диаметр множества S.

Пусть

$$\nabla^2 g(\zeta) := \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \zeta_0^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta_{n-1}^2}\right).$$

Известно, что если ∇g является дифференцируемой, то ее константа Липшица L удовлетворяет неравенству

$$L \leqslant \sup_{\zeta} \|\nabla^2 g(\zeta)\|_2.$$

Тогда

$$L \leqslant \sup_{\zeta} \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial \zeta_k^2}\right)^2} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(2(n-k+1))^2} = \frac{2}{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2} = 2\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}}.$$

Легко видеть, что $Diam(S) := \sqrt{2}(\max_i y_i - \min_i y_i)$. □

Недостатком этого метода является зависимость теоретической степени сходимости от размерности задачи.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00507, 18-01-00408).

Библиографический список

1. *Chen Y.* Aspects of Shape-constrained Estimation in Statistics : PhD Thesis. University of Cambridge, 2013. 143 p.
2. *Robertson T., Wright F., Dykstra R.* Order Restricted Statistical Inference. N. Y. : John Wiley & Sons, 1988. 544 p.
3. *Barlow R., Brunk H.* The Isotonic Regression Problem and Its Dual // Jurnal of the American Statistical Association. 1972. Vol. 67, № 1. P. 140–147. DOI: 10.2307/2284712.
4. *Dykstra R.* An Isotonic Regression Algorithm // Journal of Statistical Planning and Inference. 1981. Vol. 5, № 1. P. 355–363. DOI: 10.1214/aos/1176345866.

5. *Best M. J., Chakravarti N.* Active set algorithms for isotonic regression: a unifying framework // Math. Program. 1990. Vol. 47, № 3. P. 425–439. DOI: 10.1007/BF01580873.
6. *Best M., Chakravarti N., Ubhaya V.* Minimizing Separable Convex Functions Subject to Simple Chain Constraints // SIAM Journal on Optimization. 2000. Vol. 10, № 3. P. 658–672. DOI: 10.1137/S1052623497314970.
7. *Stromberg U.* An Algorithm for Isotonic Regression with Arbitrary Convex Distance Function // Computational Statistics & Data Analysis. 1991. Vol. 11, № 1. P. 205–219.
8. *Ahuja R., Orlin J.* A Fast Scaling Algorithm for Minimizing Separable Convex Functions Subject to Chain Constraints // Operations Research. 2001. Vol. 49, № 1. P. 784–789. DOI: 10.1287/opre.49.5.784.10601
9. *Hansohm J.* Algorithms and Error Estimations for Monotone Regression on Partially Preordered Sets // Journal of Multivariate Analysis. 2007. Vol. 98, № 1. P. 1043–1050. DOI: 10.1016/j.jmva.2006.11.001.
10. *Dykstra R., Robertson T.* An Algorithm for Isotonic Regression for Two or More Independent Variables // Ann. Statist. 1982. Vol. 10, № 1. P. 708–719. DOI: 10.1214/aos/1176345866.
11. *Burdakov O., Grimvall A., Hussian M.* A Generalised PAV Algorithm for Monotonic Regression in Several Variables // COMPSTAT: Proc. 16th Symposium in Computational Statistics. Prague, Czech Republic, 2004. P. 761–767.
12. *Bach F.* Efficient Algorithms for Non-convex Isotonic Regression through Submodular Optimization // Online Journal CoRR. 2017. Vol. abs/1707.09157. URL: http://arxiv.org/abs/1707.09157 (accessed 10, September, 2017).
13. *Diggle P, Morris S. Morton-Jones T.* Case-control isotonic regression for investigation of elevation in risk around a point source // Statistics in medicine. 1999. Vol. 18, № 13. P. 1605–1613. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0258(19990715)18:13<1605::AID-SIM146>3.0.CO;2-V.
14. *Cai Y., Judd K. L.* Shape-preserving dynamic programming // Math. Meth. Oper. Res. 2013. Vol. 77. P. 407–421. DOI: 10.1007/s00186-012-0406-5.
15. *Frank M., Wolfe Ph.* An algorithm for quadratic programming // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. Vol. 3, № 1–2. P. 95–110. DOI: 10.1002/nav.3800030109.
16. *Levitin E. S., Polyak B. T.* Constrained minimization methods // USSR Comp. Math. & M. Phys. 1966. Vol. 6, № 5. P. 1–50.
17. *Clarkson K. L.* Coresets, sparse greedy approximation, and the Frank–Wolfe algorithm // ACM Transactions on Algorithms. 2010. Vol. 6, № 4. P. 1–30. DOI: 10.1145/1824777.1824783.
18. *Freund R. M., Grigas P.* New analysis and results for the Frank-Wolfe method // Math. Program. 2016. Vol. 155, № 1–2. P. 199–230. DOI: 10.1007/s10107-014-0841-6.
19. *Jaggi M.* Revisiting Frank – Wolfe: Projection-free sparse convex optimization // ICML'13 : Proc. 30th International Conference on Machine Learning. Atlanta, GA, USA, 2013. P. 427–435.
20. *Friedman J.* Greedy Function Approximation: A Gradient Boosting Machine // Ann. Statist. 2001. Vol. 29, № 5. P. 1189–1232. DOI: 10.1214/aos/1013203451.
21. *Davis G., Mallat S., Avellaneda M.* Adaptive greedy approximation // Constr. Approx. 1997. Vol. 13. P. 57–98. DOI: 10.1007/BF02678430.
22. *Jones L.* On a conjecture of Huber concerning the convergence of projection pursuit regression // Ann. Statist. 1987. Vol. 15, № 2. P. 880–882. DOI: 10.1214/aos/1176350382.
23. *Barron A. R., Cohen A., Dahmen W., DeVore R. A.* Approximation and Learning by Greedy Algorithms // Ann. Statist. 2008. Vol. 36, № 1. P. 64–94. DOI: 10.1214/009053607000000631.

24. *DeVore R. A., Temlyakov V. N.* Some remarks on greedy algorithms // Advances in Computational Mathematics. 1996. Vol. 5. P. 173–187. DOI: 10.1007/BF02124742.
25. *Konyagin S. V., Temlyakov V. N.* A remark on greedy approximation in Banach spaces // East J. Approx. 1999. Vol. 5, № 3. P. 365–379.
26. *Nguyen H., Petrova G.* Greedy Strategies for Convex Optimization // Calcolo. 2017. Vol. 54, № 1. P. 207–224. DOI: 10.1007/s10092-016-0183-2.
27. *Temlyakov V. N.* Dictionary descent in optimization // Analysis Mathematica. 2016. Vol. 42, № 1. P. 69–89. DOI: 10.1007/s10476-016-0106-0.
28. *DeVore R. A., Temlyakov V. N.* Convex optimization on Banach spaces // Found. Comput. Math. 2016. Vol. 16, № 2. P. 369–394. DOI: 10.1007/s10208-015-9248-x.
29. *Sidorov S., Mironov S., Pleshakov M.* Dual Greedy Algorithm for Conic Optimization Problem // CEUR-WS. 2016. Vol. 1623. P. 276–283.
30. *Temlyakov V. N.* Greedy approximation in convex optimization // Constr. Approx. 2015. Vol. 41, № 2. P. 269–296. DOI: 10.1007/s00365-014-9272-0.
31. *De Leeuw J., Hornik K., Mair P.* Isotone Optimization in R: Pool-Adjacent-Violators Algorithm (PAVA) and Active Set Methods // Journal of Statistical Software. 2009. Vol. 32, № 5. P. 1–24. DOI: 10.18637/jss.v032.i05.
32. *Chepoi V., Cogneau D., Fichet B.* Polynomial algorithms for isotonic regression // Lecture Notes–Monograph Series. 1997. Vol. 31. P. 147–160. DOI: 10.1214/lnms/1215454134

Образец для цитирования:
Гудков А. А., Миронов С. В., Файзлиев А. Р. О сходимости жадного алгоритма для решения задачи построения монотонной регрессии // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 431–440. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-431-440.

On the Convergence of a Greedy Algorithm for the Solution of the Problem for the Construction of Monotone Regression

A. A. Gudkov, S. V. Mironov, A. R. Faizliev

Alexander A. Gudkov, orcid.org/0000-0002-6472-4855, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, alex-good96@mail.ru
Sergei V. Mironov, orcid.org/0000-0003-3699-5006, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, MironovSV@info.sgu.ru
Alexey R. Faizliev, orcid.org/0000-0001-6442-4361, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, faizlievar1983@mail.ru

The paper presents greedy algorithms that use the Frank-Woolf-type approach for finding a sparse monotonic regression. The problem of finding monotonic regression arises in smoothing an empirical data, in problems of dynamic programming, mathematical statistics and in many other applied problems. The problem is to find a non-decreasing sequence of points with the lowest error of approximation to the given set of points on the plane. The problem of constructing monotonic regression can be formulated as a convex programming problem with linear constraints and is NP-hard problem. The paper also contains estimates of the rate of convergence for the presented greedy algorithms.

Key words: greedy algorithms, Frank – Wolfe algorithm, monotone regression.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 16-01-00507, 18-01-00408).

References

1. Chen Y. *Aspects of Shape-constrained Estimation in Statistics*: PhD Thesis. University of Cambridge, 2013. 143 p.
2. Robertson T., Wright F., Dykstra R. *Order Restricted Statistical Inference*. New York, John Wiley & Sons, 1988. 544 p.
3. Barlow R., Brunk H. The Isotonic Regression Problem and Its Dual. *Journal of the American Statistical Association*, 1972, vol. 67, no. 1, pp. 140–147. DOI: 10.2307/2284712.
4. Dykstra R. An Isotonic Regression Algorithm. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 1981, vol. 5, no. 1, pp. 355–363. DOI: 10.1214/aos/1176345866.
5. Best M. J., Chakravarti N. Active set algorithms for isotonic regression: a unifying framework. *Math. Program.*, 1990, vol. 47, no. 3, pp. 425–439. DOI: 10.1007/BF01580873.
6. Best M., Chakravarti N., Ubhaya V. Minimizing Separable Convex Functions Subject to Simple Chain Constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 2000, vol. 10, no. 3, pp. 658–672. DOI: 10.1137/S1052623497314970.
7. Stromberg U. An Algorithm for Isotonic Regression with Arbitrary Convex Distance Function. *Computational Statistics & Data Analysis*, 1991, vol. 11, no. 1, pp. 205–219.
8. Ahuja R., Orlin J. A Fast Scaling Algorithm for Minimizing Separable Convex Functions Subject to Chain Constraints. *Operations Research*, 2001, vol. 49, no. 1, pp. 784–789. DOI: 10.1287/opre.49.5.784.10601
9. Hansohm J. Algorithms and Error Estimations for Monotone Regression on Partially Preordered Sets. *Journal of Multivariate Analysis*, 2007, vol. 98, no. 1, pp. 1043–1050. DOI: 10.1016/j.jmva.2006.11.001.
10. Dykstra R., Robertson T. An Algorithm for Isotonic Regression for Two or More Independent Variables. *Ann. Statist.*, 1982, vol. 10, no. 1, pp. 708–719. DOI: 10.1214/aos/1176345866.
11. Burdakov O., Grimvall A., Hussian M. A Generalised PAV Algorithm for Monotonic Regression in Several Variables. *COMPSTAT: Proc. 16th Symposium in Computational Statistics*. Prague, Czech Republic, 2004, pp. 761–767.
12. Bach F. Efficient Algorithms for Non-convex Isotonic Regression through Submodular Optimization. *Online journal CoRR*, 2017, vol. abs/1707.09157. Available at: http://arxiv.org/abs/1707.09157 (accessed 10 September, 2017).
13. Diggle P, Morris S. Morton-Jones T. Case-control isotonic regression for investigation of elevation in risk around a point source. *Statistics in medicine*, 1999, vol. 18, no. 13, pp. 1605–1613. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0258(19990715)18:13<1605::AID-SIM146>3.0.CO;2-V.
14. Cai Y., Judd K. L. Shape-preserving dynamic programming. *Math. Meth. Oper. Res.*, 2013, vol. 77, pp. 407–421. DOI: 10.1007/s00186-012-0406-5.
15. Frank M., Wolfe Ph. An algorithm for quadratic programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1956, vol. 3, no. 1–2, pp. 95–110. DOI: 10.1002/nav.3800030109.
16. Levitin E. S., Polyak B. T. Constrained minimization methods. *USSR Comp. Math. & M. Phys.*, 1966, vol. 6, no. 5, pp. 1–50.
17. Clarkson K. L. Coresets, sparse greedy approximation, and the Frank – Wolfe algorithm. *ACM Transactions on Algorithms*, 2010, vol. 6, no. 4, pp. 1–30. DOI: 10.1145/1824777.1824783.
18. Freund R. M., Grigas P. New analysis and results for the Frank-Wolfe method. *Math. Program.*, 2016, vol. 155, no. 1–2, pp. 199–230. DOI: 10.1007/s10107-014-0841-6.
19. Jaggi M. Revisiting Frank–Wolfe: Projection-free sparse convex optimization. *ICML'13: Proc. 30th International Conference on Machine Learning*. Atlanta, GA, USA, 2013, pp. 427–435.

20. Friedman J. Greedy Function Approximation: A Gradient Boosting Machine. *Ann. Statist.*, 2001, vol. 29, no. 5, pp. 1189–1232. DOI: 10.1214/aos/1013203451.
21. Davis G., Mallat S., Avellaneda M. Adaptive greedy approximation. *Constr. Approx.*, 1997, vol. 13, pp. 57–98. DOI: 10.1007/BF02678430.
22. Jones L. On a conjecture of Huber concerning the convergence of projection pursuit regression. *Ann. Statist.*, 1987, vol. 15, no. 2, pp. 880–882. DOI: 10.1214/aos/1176350382.
23. Barron A. R., Cohen A., Dahmen W., DeVore R. A. Approximation and Learning by Greedy Algorithms. *Ann. Statist.*, 2008, vol. 36, no. 1, pp. 64–94. DOI: 10.1214/009053607 000000631.
24. DeVore R. A., Temlyakov V. N. Some remarks on greedy algorithms. *Advances in Computational Mathematics*, 1996, vol. 5, pp. 173–187. DOI: 10.1007/BF02124742.
25. Konyagin S. V., Temlyakov V. N. A remark on greedy approximation in Banach spaces. *East J. Approx.*, 1999, vol. 5, no. 3, pp. 365–379.
26. Nguyen H., Petrova G. Greedy Strategies for Convex Optimization. *Calcolo*, 2017, vol. 54, no. 1, pp. 207–224. DOI: 10.1007/s10092-016-0183-2.
27. Temlyakov V. N. Dictionary descent in optimization. *Analysis Mathematica*, 2016, vol. 42, no. 1, pp. 69–89. DOI: 10.1007/s10476-016-0106-0.
28. DeVore R. A., Temlyakov V. N. Convex optimization on Banach spaces. *Found. Comput. Math.*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 369–394. DOI: 10.1007/s10208-015-9248-x.
29. Sidorov S., Mironov S., Pleshakov M. Dual Greedy Algorithm for Conic Optimization Problem. *CEUR-WS*, 2016, vol. 1623, pp. 276–283.
30. Temlyakov V. N. Greedy approximation in convex optimization. *Constr. Approx.*, 2015, vol. 41, no. 2, pp. 269–296. DOI: 10.1007/s00365-014-9272-0.
31. De Leeuw J., Hornik K., Mair P. Isotone Optimization in R: Pool-Adjacent-Violators Algorithm (PAVA) and Active Set Methods. *Journal of Statistical Software*, 2009, vol. 32, no. 5, pp. 1–24. DOI: 10.18637/jss.v032.i05.
32. Chepoi V., Cogneau D., Fichet B. Polynomial algorithms for isotonic regression. *Lecture Notes–Monograph Series*, 1997, vol. 31, pp. 147–160. DOI: 10.1214/lnms/1215454134.

Cite this article as:
Gudkov A. A., Mironov S. V., Faizliev A. R. On the Convergence of a Greedy Algorithm for the Solution of the Problem for the Construction of Monotone Regression. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 431–440 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-431-440.

УДК 519.17, 519.237

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ, АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ И ОЦЕНКА КАЧЕСТВА АЛГОРИТМОВ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ГРАФОВЫХ МОДЕЛЕЙ СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

М. С. Ионкин, М. В. Огнева

Ионкин Михаил Сергеевич, аспирант, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, msionkin@gmail.com

Огнева Марина Валентиновна, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой информатики и программирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, ognevamv@gmail.com

Рассматривается задача поиска сообществ (кластеров) в неориентированных графах (задача кластеризации). Кластеризация — объединение в группы схожих объектов — является одной из фундаментальных задач в области анализа данных. Список прикладных областей, где она применяется, широк: сегментация изображений, маркетинг, борьба с мошенничеством, прогнозирование, анализ текстов и многие другие. На сегодняшний момент не существует универсального эффективного решения данной задачи. Число методов объединения в группы, максимально похожих друг на друга объектов, довольно велико — несколько десятков алгоритмов и еще больше их модификаций. В статье описаны алгоритмы решения данной задачи, приведены оценки их асимптотической сложности, традиционные метрики и функционалы качества, необходимые для оценки результатов их работы. Предложен вариант решения проблемы, противоположной проблеме resolution limit, — нахождение мелких относительно всего графа сообществ. Выполнена программная реализация алгоритма Smart Local Moving, который является улучшением известного алгоритма Louvain. Приведено экспериментальное сравнение эффективности рассмотренных алгоритмов для больших разреженных графов, содержащих несколько сотен тысяч вершин и ребер и соответствующих реальным данным сайтов YouTube, Amazon, Live Journal. Сравнительный анализ выполнялся на этих трех «обезличенных» наборах данных с заранее известным разделением на сообщества, а также на наборе данных со всей доступной информацией о вершинах (пользователях) из социальной сети Вконтакте. Выполнялось сравнение друг с другом сообществ, найденных разными алгоритмами на одном и том же наборе данных. Оценивались такие характеристики, как время выполнения алгоритмов, показатели модулярности и нормализованной взаимной информации.

Ключевые слова: кластеризация, поиск сообществ, графовые модели, анализ данных.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-441-451

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач анализа данных является задача кластеризации — выделение сообществ (кластеров) разных объектов. Например, с помощью нее можно находить группы пользователей с похожими предпочтениями, что, в свою очередь, помогает определить, какая информация будет для них наиболее интересна. Методы кластеризации применяются для снижения размерности в задачах машинного обучения, в маркетинговых исследованиях (выделение сегментов пользователей), в области компьютерного зрения (для сегментации изображений, распознавания образов) и т. д. [1, 2].

Несмотря на актуальность задачи кластеризации, она до сих пор не решена окончательно. Существуют различные алгоритмы для решения данной проблемы [1, 3–6], но каждый имеет свои ограничения, преимущества и недостатки.

В связи с этим актуальной является задача оптимизации, анализа и сравнения алгоритмов и их оценок, выявления их преимуществ и недостатков, что, возможно, в дальнейшем приведет к созданию универсального алгоритма.

1. ОБЗОР АЛГОРИТМОВ

Для анализа были выбраны следующие алгоритмы: Infomap, Walktrap, Label Propagation, Fastgreedy, Edge Betweenness, Louvain и Smart Local Moving. Первые пять из них — довольно популярные алгоритмы, реализованные в различных библиотеках для анализа данных. Два последних были изобретены относительно недавно (2008 и 2013 гг.) и в соответствии с теоретическими оценками работают быстрее первых пяти.

Далее по тексту за n будем обозначать количество вершин в графе, а за m — количество ребер.

Infomap. Метод поиска сообществ, основанный на случайном блуждании (на каждом шаге процесса блуждающий объект находится в вершине и перемещается в другую вершину, выбранную случайным равновероятным образом из соседних вершин; последовательность посещенных вершин является марковской цепью, состояния которой являются вершинами графа). Каждое сообщество и каждая вершина имеет свой уникальный бинарный код, причем вершины из разных сообществ могут иметь одинаковый код. Авторы интерпретируют задачу выделения сообществ в графе как задачу кодирования пути, который пройдет «блуждатель», и пытаются минимизировать длину кода, получающегося во время прохода. Время выполнения этого алгоритма авторы в своей статье не приводят [7].

Walktrap. Данный метод, как и метод Infomap, основан на механизме случайных блужданий и использует идею о том, что короткие случайные блуждания не приводят к выходу из текущего сообщества [8]. На вершинах определенным образом вводится метрика и с помощью матрицы вероятностей перехода вершин между сообществами определяется, какие вершины нужно объединить в один кластер. Сложность такого метода в лучшем случае имеет оценку $O(n^2 \log n)$, а в худшем — $O(mn^2)$ [8].

Label Propagation. Метод основан на эвристике, согласно ей вершина относится к тому сообществу, что и большинство ее соседей. Изначально каждая вершина является одним сообществом. Далее на каждой итерации вершины перемешиваются случайным образом и по очереди обновляются метки каждой вершины в зависимости от меток ее соседей. Данные действия продолжаются до тех пор, пока происходят изменения [9]. Из-за рандомизации алгоритм при нескольких запусках может выдать разные результаты, то есть является в некотором смысле неустойчивым. Авторы метода предлагают агрегировать результаты простым пересечением кластеров. Метод прост и интуитивен, а также является вычислительно эффективным. Вычислительная сложность данного метода почти линейная и сравнима с $O(m)$ [9].

Fastgreedy. Данный метод заключается в жадной оптимизации модулярности (понятие модулярности будет рассмотрено ниже). Происходит инициализация сообществ в каждой вершине, а далее, перебирая пары смежных вершин, алгоритм пытается максимизировать значение модулярности путем перемещения вершин в определенные сообщества. В данный алгоритм легко добавить априорную информацию о составе кластеров, например, если мы знаем, что какие-то конкретные вершины должны лежать в одном кластере для увеличения качества кластеризации. Метод содержит в себе все недостатки, свойственные жадным методам, и сходится не к самому лучшему решению. Часто алгоритм порождает одно большое сообщество с большинством вершин графа в нем и множество маленьких. Сложность метода $O(mn)$ [10].

Edge Betweenness. Метод разработан Гирваном и Ньюманом [11]. Алгоритм работает по следующей схеме: сначала подсчитываются коэффициенты центральности по посредничеству (количество кратчайших путей между всеми парами вершин, проходящих через данное ребро) на всех ребрах графа. Далее происходит поочередное удаление ребер с самым большим коэффициентом, а сообществами считаются оставшиеся компоненты связности. Процедура удаления связей завершается, когда достигает максимума модулярность результирующего разбиения. Данный алгоритм имеет множество модификаций, которые сводятся к подсчету других реберных коэффициентов либо замене модулярности другим схожим функционалом. Его главный недостаток — время работы, так как подсчет коэффициентов на ребрах является вычислительно сложной задачей. Сложность метода $O(m^2n)$ [11].

Louvain. Алгоритм основывается на жадной оптимизации модулярности и использует метод «local moving heuristic» (LMH, эвристика локального перемещения). LMH перемещает отдельные вершины графа из одного сообщества в другое так, чтобы каждое такое перемещение увеличивало значение модулярности. LMH проходит по вершинам графа в случайном порядке, а завершает свою работу, когда не останется таких вершин, перемещение которых увеличивает модулярность.

В начале алгоритма Louvain каждая вершина образует отдельное сообщество. Итерация алгоритма состоит из двух фаз. На первой фазе для каждой вершины выполняется метод LMH для всех смежных вершин таким образом, что перебор всех вершин продолжается до тех пор, пока происходит хотя бы одно перемещение вершины. На второй фазе происходит сжатие графа: вершины, входящие в одно сообщество, образуют новую супервершину (или метавершину) с соответствующим преобразованием ребер. Алгоритм останавливается, когда граф перестает изменяться, то есть когда модулярность достигла своего локального максимума. Отметим, что алгоритм зависит от порядка перебора вершин на его первом этапе. Эксперименты, которые провели авторы метода, позволяют говорить о том, что порядок не сильно влияет на результат работы метода (точнее, на значение функционала), но может значительно влиять на время выполнения, которое в среднем составляет $O(n \log n)$ [12].

Smart Local Moving. Данные об алгоритме Smart Local Moving (SLM) есть в работе [13], он представляет собой оптимизацию алгоритма Louvain. Так же, как и в алгоритме Louvain, в начале каждая вершина образует отдельное сообщество и далее для увеличения значения модулярности используется LMH. После этого идет шаг, который отсутствует в алгоритме Louvain: из каждого найденного сообщества строится подграф. Все вершины в одном подграфе снова распределяются в свои собственные сообщества, для этого подграфа запускается метод LMH. После того как каждый подграф был разбит на сообщества, алгоритм SLM выполняет сжатие графа, как и в алгоритме Louvain. В сжатом графе каждая вершина соответствует сообществу одного из подграфов, а все вершины, соответствующие сообществам из одного подграфа, приписываются к одному и тому же сообществу в сжатом графе. Поэтому для каждого подграфа существует только одно сообщество в сжатом графе. Далее все эти шаги повторяются для получившегося сжатого графа, а весь алгоритм SLM остановится тогда, когда невозможно будет сжать очередной сокращенный граф. Оценки времени выполнения авторы алгоритма не приводят, но так как это оптимизация алгоритма Louvain, то величина оценки не должна превосходить $O(n \log n)$.

2. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА КЛАСТЕРИЗАЦИИ

После работы алгоритма разбиения на сообщества необходимо оценить качество получившегося результата. Для этого используются функции потерь и функционалы качества. В зависимости от ситуации их можно разделить на две группы. В том случае, когда неизвестно истинное разбиение на сообщества, для оценки качества чаще всего используется значение функционала модулярности. А если истинное разбиение известно (такое возможно в случае модельных данных или для графов, в которых мы можем самостоятельно разметить сообщества), то возможно применение такой метрики, как нормализованная взаимная информация (NMI) [14].

Модулярность — это скалярная величина из отрезка $[-1; 1]$, которая количественно описывает неформальное определение структуры сообществ [11]:

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{i,j} \left(A_{ij} - \frac{d_i d_j}{2m} \right) \delta(C_i,\ C_j), \tag{1}$$

где A — матрица смежности графа, A_{ij} — (i, j) элемент матрицы, d_i — степень i-вершины графа, C_i — метка вершины (номер сообщества, к которому относится вершина), m — общее количество ребер в графе, $\delta(C_i, C_j)$ — дельта-функция: равна единице, если $C_i = C_j$, иначе — нулю.

Модулярность достаточно просто интерпретируется. Она показывает, насколько при заданном разбиении графа на группы плотность внутригрупповых связей больше плотности межгрупповых связей. Модулярность возможно эффективно пересчитывать при небольших изменениях в сообществах. Однако функционал не является непрерывным, и задача его оптимизации — дискретная, поэтому для поиска глобального оптимума используют приближенные схемы.

Нормализованная взаимная информация — метрика, основанная на теории информации и использующая идею о том, что если одно разбиение похоже на другое, то необходимо малое количество информации, чтобы восстановить одно разбиение из другого [15].

Рассмотрим два разбиения графа на сообщества x_i и y_i, где i — это номер вершины, а x_i и y_i — метки сообществ из разбиений. Предполагается, что метки x и y являются значениями двух случайных величин X и Y, которые имеют совместное распределение $P(x, y)$. Нормализованная взаимная информация определяется по формуле 2 [15]:

$$I_{norm} = \frac{I(X,Y)}{\sqrt{H\,(X)\,H(Y)}}, \tag{2}$$

$$I\,(X;Y) = H\,(X) - H\,(X|Y) = \sum_{x \epsilon X} \sum_{y \epsilon Y} p\,(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}, \tag{3}$$

$$H(X) = -\sum_{k=-K}^{K} p_k \log p_k, \tag{4}$$

$$H(X|Y) = -\sum_{x\epsilon X}\sum_{y\epsilon Y} p(x,y)\log p(x,y), \tag{5}$$

где формула (3) — взаимная информация, (4) — энтропия случайной величины X, (5) — условная энтропия случайной величины X при наблюдении случайной величины Y.

Область значений NMI лежит в отрезке $[0;1]$. Если значение близко к нулю, то это означает, что два разбиения значительно отличаются друг от друга, а если величина равна единице, то два разбиения полностью совпадают. Величина взаимной информации не зависит от перестановок меток кластеров (разбиений) и для ее вычисления не делается никаких предположений относительно структуры кластера. Поэтому она может использоваться для сравнения результатов работы различных алгоритмов поиска сообществ в графах. К недостаткам данной метрики можно отнести то, что ее вычисление требует наличия заранее известных классов (ground truth classes) разбиения, которые практически никогда не доступны в реальных бизнес-задачах или которые могут быть размечены вручную, что является трудоемкой задачей.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Проблема, обратная к resolution limit проблеме. Один из самых известных на данный момент алгоритмов поиска сообществ Louvain использует в своей основе модулярность. Обычно алгоритмы, использующие модулярность, не замечают мелких (относительно всего графа) сообществ и объединяют их в одно сообщество, что часто не является верным с точки зрения значения получающихся сообществ. Эта проблема получила название resolution limit. Существует несколько работ, посвященных исследованию этой проблемы и способам ее решения (например, [16, 17]). Но в ходе исследования, проведенного авторами данной работы, выяснилось, что помимо обозначенной выше проблемы, на небольших объемах данных алгоритм Louvain делит их на слишком мелкие сообщества, т. е. возникает проблема, которая является прямо противоположной проблеме resolution limit. Для ее решения было предложено учитывать веса вершин графа при подсчете модулярности во время работы алгоритма Louvain, для чего в формуле подсчета модулярности вместо матрицы смежности была использована матрица весов. Был проведен эксперимент, в результате которого, расставив веса вершин у графа определенным образом, удалось сократить количество кластеров в получающемся разбиении, что позволило улучшить качество разбиения.

Сравнение и анализ алгоритмов. Для сравнения использовались традиционные алгоритмы, рассмотренные выше, и самостоятельно выполненная реализация алгоритма SLM.

Для анализа качества получающихся разбиений были выбраны наборы данных, у которых известны их ground-truth сообщества, то есть сообщества, сформированные по какому-либо признаку (например, группа в социальной сети, в которой состоят поклонники какого-нибудь артиста).

Были взяты общедоступные данные трех сайтов (YouTube, Amazon и Live Journal) [18], которые представляют собой большие разреженные графы. Все данные «обезличены» и представляют собой набор идентификаторов. Описание данных приведено в табл. 1.

Было проведено сравнение результатов работы алгоритмов по их времени выполнения и по значению модулярности для каждого набора данных. Кроме того, с помощью метрики NMI было проведено сравнение получившихся разбиений с ground-truth-сообществами. Полученные результаты представлены в табл. 2 (в ней не представлена информация по алгоритмам, время работы которых было больше суток).

Таблица 1 / Table 1

Описание наборов данных для анализа алгоритмов
Description of data sets for analysis of algorithms

Набор данных	Описание	Количество вершин	Количество ребер
YouTube	Вершины — пользователи. Ребро между двумя пользователями означает, что они подписаны друг на друга. Ground-truth-сообщество — группа пользователей по интересам	52 675	318 432
Amazon	Вершины — продукты. Ребро между двумя продуктами означает, что они часто покупаются вместе. Ground-truth-сообщество — продукты одной категории (например, ноутбуки)	317 194	872 935
Live Journal	Вершины — пользователи. Ребро между двумя пользователями означает, что они подписаны друг на друга. Ground-truth-сообщество — группа пользователей по интересам.	1 147 948	16 899 734

Таблица 2 / Table 2

Результаты работы алгоритмов / Results of work of algorithms

Алгоритм и оценка времени выполнения	Набор данных	Время выполнения, с	Модулярность	NMI
Label Propagation, $O(m+n)$	YouTube	4.1	0.5833	0.1342
	Amazon	38.74	0.7884	0.5451
	Live Journal	163	0.7124	0.159
Fastgreedy, $O(n\log^2 n)$	YouTube	280	0.5814	0.6885
	Amazon	1249	0.8771	0.6069
Infomap, $O(n(m+n))$	YouTube	4007.53	0.5785	0.1908
Walktrap, $O(n^2\log n)$	YouTube	760.18	0.5594	0.1572
	Amazon	1839.7	0.8543	0.4878
Louvain, $O(n\log n)$	YouTube	6	0.6676	0.1339
	Amazon	7	0.9348	0.3972
	Live Journal	240	0.7367	0.1812
SLM, $O(n\log n)$	YouTube	18	0.6957	0.1321
	Amazon	21	0.9403	0.4046
	Live Journal	818	0.7570	0.1775

Из табл. 2 видно, что время выполнения всех алгоритмов совпало с теоретическими оценками их времени выполнения.

Все алгоритмы, кроме Louvain и SLM, дают примерно одинаковые значения модулярности от 0.55 до 0.58 для данных YouTube и от 0.78 до 0.87 для данных Amazon. При этом алгоритмы Louvain и SLM в среднем дают модулярность выше на 0.1 пункта. Известно, что графы с более высокой модулярностью имеют более плотные соединения между вершинами внутри сообществ и менее плотные соединения между вершинами из разных сообществ. Это означает, что алгоритмы Louvain и SLM позволяют производить разбиение графа на сообщества с более плотной структурой, а это особенно важно для больших графов, состоящих из тысяч вершин и ребер.

Теперь обратимся к метрике NMI. Видно, что на наборе данных YouTube и Live Journal все алгоритмы, кроме Fastgreedy, принимают значения от 0.13 до 0.19. Это говорит о том, что эти алгоритмы делят графы на сообщества, мало совпадающие с группами, которые создают сами пользователи. Это можно объяснить тем, что алгоритмы работают, основываясь на структуре графа, на связях между вершинами (в данных двух случаях — на дружеских связях между пользователями), а группы создаются на основе какого-либо признака (например, группа программистов на языке Python), который в большинстве случаев не связан с отношением, заданным на ребрах графа (здесь — не связан с дружбой между пользователями). Тем не менее алгоритму Fastgreedy удается выполнить разбиение более близкое к ground-truth сообществам: на данных YouTube его значение NMI равно 0.68. Примерно так же обстоит дело со значениями NMI для данных Amazon. Все алгоритмы показали средний результат от 0.39 (у Louvain) до 0.6 (у Fastgreedy). То есть, основываясь на частоте покупок одного товара с другим, алгоритм распределил товары по группам наиболее часто покупаемых вместе товаров, и эти группы в среднем совпадают с реальными категориями товаров.

Так как у некоторых алгоритмов были получены примерно одинаковые значения модулярности и NMI, то необходимо выяснить, являются ли разбиения одинаковыми или это другие разбиения, но с похожей модулярностью. Для этого было проведено сравнение разбиений алгоритмов между собой с помощью метрики NMI. Это показало, например, что алгоритмы Louvain и SLM, а также Walktrap и Label Propagation находят наиболее похожие разбиения независимо от набора данных.

Анализ, который проводится на «обезличенных» данных, не позволяет понять, какой смысл несут в себе получившиеся разбиения. Поэтому было решено использовать данные социальной сети «ВКонтакте» (далее по тексту — набор данных Vk). Для этого был написан модуль для загрузки и предварительной обработки информации о пользователях данной социальной сети.

Рассматриваемый граф является моделью отношения «является другом» среди пользователей социальной сети. Был взят один пользователь социальной сети и список всех его друзей и построен неориентированный граф, в котором вершинами являются друзья этого пользователя, и между двумя вершинами проводится ребро, если эти два человека являются друзьями. Далее получившийся граф был вручную поделен на ground-truth-сообщества. Был проведен анализ результатов работы алгоритмов на этом наборе данных с помощью модулярности и NMI (табл. 3).

Таблица 3 / Table 3

Результаты работы алгоритмов для набора данных Vk

The results of the algorithms for the Vk data set

Алгоритм и оценка времени выполнения	Модулярность	NMI
Label Propagation, $O(m+n)$	0.1079	0.3219
Fastgreedy, $O(n\log^2 n)$	0.4718	0.0899
Edge Betweenness, $O(m^2 n)$	0.3859	0.2439
Infomap, $O(n(m+n))$	0.4899	0.1115
Walktrap, $O(n^2\log n)$	0.4587	0.1319
Louvain, $O(n\log n)$	0.5144	0.6297
SLM, $O(n\log n)$	0.5523	0.8965

Из табл. 3 видно, что самые высокие показатели модулярности у алгоритмов Infomap, Louvain и SLM.

Согласно метрике NMI алгоритмы Lovain и SLM смогли достаточно точно определить социальные группы среди друзей пользователя, совпадающие с нашими ground-truth-сообществами, а наиболее похожими получились разбиения у алгоритмов Walktrap, Fastgreedy, Edge Betweenness и Infomap, но их разбиения довольно сильно отличаются от наших ground-truth-сообществ.

Таким образом, можно сделать вывод, что, основываясь только на знании о структуре графа, алгоритмы способны разбивать его на сообщества, содержащие информацию, которая не была доступна до начала эксперимента ни исследователю, ни самим алгоритмам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен анализ наиболее популярных алгоритмов поиска сообществ в графах, изучены особенности их выполнения и свойства, дано краткое описание их работы. Предложен вариант решения проблемы, противоположной проблеме resolution limit — нахождение мелких относительно всего графа сообществ. Для этого учитывались веса вершин графа, что помогло подсчитывать модулярность более точно и, таким образом, производить более качественное разделение графа на сообщества.

Для того, чтобы выполнить анализ выбранных алгоритмов в единой среде, на языке Python был реализован алгоритм Smart Local Moving, который является улучшением алгоритма Louvain в максимизации модулярности.

Анализ проводился на трех «обезличенных» наборах данных с ground-truth-сообществами, содержащими несколько сотен тысяч вершин и ребер, представляющих собой большие разреженные графы, и на данных, взятых из социальной сети «ВКонтакте» и содержащих всю доступную информацию о вершинах. Оценивались такие характеристики, как время выполнения алгоритмов, показатели модулярности и нормализованной взаимной информации (NMI). По времени выполнения и максимизации значения модулярности явными лидерами являются алгоритмы Louvain и Smart Local Moving, однако они не всегда хорошо находят ground-truth-сообщества. С этой задачей в двух тестах хорошо справился алгоритм Fastgreedy, однако он не смог найти «правильную» структуру для данных социальной сети «ВКонтакте». Таким образом, только при тщательном подборе алгоритма к соответствующей задаче можно извлекать ценную информацию из получающихся разбиений графа.

Библиографический список

1. *Aggarwal C. C., Charu C., Reddy C. K.* Data clustering. Algorithms and applications. N. Y. : CRC Press, 2014. 652 p.
2. *Jain A. K., Murty M. N., Flynn P. J.* Data clustering: a review // ACM Computing Surveys. 1999. Vol. 31, iss. 3. P. 264–323. DOI: 10.1145/331499.331504.
3. *Newman M. E. J.* Detecting community structure in networks // The European Physical Journal B – Condensed Matter and Complex Systems. 2004. Vol. 38, iss. 2. P. 321–330. DOI: 10.1140/epjb/e2004-00124-y.
4. *Leskovec J., Rajaraman A., Ullman J.* Mining of massive datasets. 2nd ed. Cambridge Univ. Press, 2014. 511 p.
5. *Fortunato S.* Community detection in graphs // Phys. Rep. 2010. Vol. 486, iss. 3–5. P. 75–174. DOI: 10.1016/j.physrep.2009.11.002.
6. Информационно-аналитический ресурс, посвященный машинному обучению, распознаванию образов и интеллектуальному анализу данных. URL: http://www.machinelearning.ru (дата обращения: 12.02.2017).
7. *Rosvall M., Axelsson D., Bergstrom C. T.* The map equation // The European Physical Journal – Special Topics. 2009. Vol. 178, iss. 1. P. 13–23. DOI: 10.1140/epjst/e2010-01179-1.
8. *Pons P., Latapy M.* Computing communities in large networks using random walks // Computer and Information Sciences – ISCIS 2005. 2005. P. 284–293. DOI: 10.1007/11569596_31.
9. *Raghavan U. N., Albert R., Kumara S.* Near linear time algorithm to detect community structures in large-scale networks // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76, iss. 3. P. 036106. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.036106.
10. *Clauset A., Newman M. E. J., Moore C.* Finding community structure in very large networks // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70, iss. 6. P. 066111. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.066111.
11. *Girvan M., Newman M. E. J.* Community structure in social and biological networks // Proc. National Academy of Sciences. 2002. Vol. 99, № 12. P. 7821–7826. DOI: 10.1073/pnas.122653799.
12. *Blondel V. D., Guillaume J., Lambiotte R., Lefebvre E.* Fast unfolding of communities in large networks // Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment. 2008. Vol. 2008, № 10. P. P10008. DOI: 10.1088/1742-5468/2008/10/P10008.
13. *Waltman L., Eck N. J.* A smart local moving algorithm for large–scale modularity–based community detection // The European Physical Journal B. 2013. Vol. 86, iss. 11. P. 471. DOI: 10.1140/epjb/e2013-40829-0.
14. *Romano S., Bailey J., Nguyen V., Verspoor K.* Standardized mutual information for clustering comparisons: one step further in adjustment for chance // Proc. 31st Intern. Conf. on Machine Learning. Beijing, China : PMLR, 2014. Vol. 32, № 2. P. 1143–1151. URL: http://proceedings.mlr.press/v32/romano14.pdf (дата обращения: 25.04.2017).
15. *Хайкин С.* Нейронные сети : полный курс. М. : ИД «Вильямс», 2006. 1104 с.
16. *Fortunato S., Barthelemy M.* Resolution limit in community detection // Proc. National Academy of Sciences. 2007. № 104. P. 36–41. DOI: 10.1073/pnas.0605965104.

17. *Traag V. A., Dooren P. V., Nesterov Y.* Narrow scope for resolution-limit-free community detection // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 84, iss. 1. P. 016114. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.016114.
18. Stanford Large Network Dataset Collection. URL: https://snap.stanford.edu/data (дата обращения: 25.04.2017).

Образец для цитирования:
Ионкин М. С., Огнева М. В. Программная реализация, анализ эффективности и оценка качества алгоритмов кластеризации графовых моделей социальных сетей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 441–451. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-441-451.

Implementation, Efficiency Analysis and Quality Evaluation of Clustering Algorithms for Graph Models of Social Networks

M. S. Ionkin, M. V. Ogneva

Michael S. Ionkin, orcid.org/0000-0002-4726-8245, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, msionkin@gmail.com
Marina V. Ogneva, orcid.org/0000-0002-9828-7681, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, ognevamv@gmail.com

The article deals with the community detection problem (the clustering problem) for undirected graphs. The clustering (grouping together of similar objects) is one of the fundamental tasks in the data analysis. This task is applied in a wide range of areas: image segmentation, marketing, anti-fraud, forecasting, text analysis and much more. At the moment, there is no universal and effective solution of this problem. There are several dozens of methods and there are many modifications of them which group objects that are as similar as possible to each other. The article describes algorithms for solving this task, presents their asymptotic complexity estimates, traditional metrics and quality functionals needed to evaluate the results of their work. The authors propose a solution to the problem which is the opposite of the resolution limit problem (algorithms find communities that are quite small in relation to the entire graph). The authors implemented the Smart Local Moving algorithm which is an improvement of the well-known Louvain algorithm. Performed an experimental comparison of the considered algorithms efficiency on large sparse graphs containing several hundreds of thousands of vertices and edges which corresponding to real data from YouTube, Amazon, Live Journal. The comparative analysis was performed on these three “impersonal” data sets with a previously known division into communities (ground-truth communities), as well as on a data set with all available information about the vertices (users) from the social network “Vkontakte”. The communities found by different algorithms on the same data set were also compared with each other. The authors examined such characteristics as the execution time of algorithms, values of modularity and normalized mutual information.

Key words: clustering, community detection, graph models, data analysis.

References

1. Aggarwal C. C., Charu C., Reddy C. K. *Data clustering. Algorithms and applications.* New York, CRC Зкуыы, 2014. 652 p.
2. Jain A. K., Murty M. N., Flynn P. J. Data clustering: a review. *ACM Computing Surveys*, 1999, vol. 31, no. 3, pp. 264–323. DOI: 10.1145/331499.331504.

3. Newman M. E. J. Detecting community structure in networks. *The European Physical Journal B – Condensed Matter and Complex Systems*, 2004, vol. 38, no. 2, pp. 321–330. DOI: 10.1140/epjb/e2004-00124-y.
4. Leskovec J., Rajaraman A., Ullman J. *Mining of massive datasets*. 2nd ed. Cambridge Univ. Press, 2014. 511 p.
5. Fortunato S. Community detection in graphs. *Physics Reports*, 2010, vol. 486, iss. 3, pp. 75–174. DOI: 10.1016/j.physrep.2009.11.002.
6. *Information and analytical resource dedicated to machine learning, pattern recognition and intelligent data analysis*. Available at: http://www.machinelearning.ru (accessed 12 February, 2017) (in Russian).
7. Rosvall M., Axelsson D., Bergstrom C. T. The map equation. *The European Physical Journal – Special Topics*, 2009, vol. 178,iss. 1, pp. 13–23. DOI: 10.1140/epjst/e2010-01179-1.
8. Pons P., Latapy M. Computing communities in large networks using random walks. *Computer and Information Sciences – ISCIS 2005*, 2005, pp. 284–293. DOI: 10.1007/11569596_31.
9. Raghavan U. N., Albert R., Kumara S. Near linear time algorithm to detect community structures in large-scale networks. *Phys. Rev. E*, 2007, vol. 76, iss. 3, pp. 036106. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.036106.
10. Clauset A., Newman M. E. J., Moore C. Finding community structure in very large networks. *Phys. Rev. E*, 2004, vol. 70, iss. 6, pp. 066111. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.066111.
11. Girvan M., Newman M. E. J. Community structure in social and biological networks. *Proc. National Academy of Sciences*, 2002, vol. 99, no. 12, pp. 7821–7826. DOI: 10.1073/pnas.122653799.
12. Blondel V. D., Guillaume J., Lambiotte R., Lefebvre E. Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2008, vol. 2008, no. 10, pp. P10008. DOI: 10.1088/1742-5468/2008/10/P10008.
13. Waltman L., Eck N. J. A smart local moving algorithm for large–scale modularity–based community detection. *The European Physical Journal B*, 2013, vol. 86, no. 11, pp. 471. DOI: 10.1140/epjb/e2013-40829-0.
14. Romano S., Bailey J., Nguyen V., Verspoor K. Standardized mutual information for clustering comparisons : one step further in adjustment for chance. *Proc. 31st International Conference on Machine Learning*. Beijing, China, PMLR, 2014, vol. 32, no. 2, pp. 1143–1151. Available at: http://proceedings.mlr.press/v32/romano14.pdf (accessed 25 April, 2017).
15. Haykin S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Singapore, Pearson Education (Singapore) Pte Ltd., 1998. 842 p. (Russ. ed. : Moscow, Publ. House Williams, 2006. 1104 p.)
16. Fortunato S., Barthelemy M. Resolution limit in community detection. *Proc. National Academy of Sciences*, 2007, no. 104, pp. 36–41. DOI: 10.1073/pnas.0605965104.
17. Traag V. A., Dooren P. V., Nesterov Y. Narrow scope for resolution-limit-free community detection. *Phys. Rev. E*, 2011, vol. 84, iss. 1, pp. 016114. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.016114.
18. *Stanford Large Network Dataset Collection*. Available at: https://snap.stanford.edu/data (accessed 25 April, 2017).

Cite this article as:

Ionkin M. S., Ogneva M. V. Implementation, Efficiency Analysis and Quality Evaluation of Clustering Algorithms for Graph Models of Social Networks. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 441–451 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-441-451.

УДК 004.934

РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ РЕЧИ НА ОСНОВЕ СКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ ОТДЕЛЬНЫХ СЛОВ

А. Н. Савин, Н. Е. Тимофеева, А. С. Гераськин, Ю. А. Мавлютова

Савин Александр Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, savinan@info.sgu.ru

Тимофеева Надежда Евгеньевна, заведующий лабораторией теоретических проблем информатики и ее приложений кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, timofeevane@yandex.ru

Гераськин Алексей Сергеевич, кандидат педагогических наук, доцент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, gerascinas@mail.ru

Мавлютова Юлия Альбертовна, старший лаборант лаборатории теоретических проблем информатики и ее приложений кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, yuliyamav@yandex.ru

Приведены результаты разработки программных модулей, реализующих систему распознавания речи на основе скрытых Марковских моделей отдельных слов и использования линейного предсказания при кодировании признаков звукового сигнала. Обосновывается структура системы распознавания речи, использующая скрытые марковские модели отдельных слов, состоящая из четырех модулей: модуль выделения слов из звукового потока, модуль анализа признаков слова, модуль обучения скрытых марковских моделей и модуль распознавания слов. Приводятся алгоритмы формирования скрытых марковских моделей с лево-правой топологией для отдельных слов требуемого словаря команд системы управления объекта, основанные на кодировании признаков звукового сигнала, использующего линейные предсказания. Приведены результаты оценки достоверности последовательности наблюдений, соответствующих отдельным словам, получаемым с помощью предложенного алгоритма обработки. Разработанные программные модули позволяют эффективно подготавливать необходимые исходные данные и формировать таким образом требуемый словарь команд системы управления объекта, строить скрытые марковские модели отдельных слов, проводить их обучение с помощью алгоритма Баума – Велша. Построенные словари команд предполагается использовать в интеллектуальных системах управления различными объектами.

Ключевые слова: скрытые марковские модели, кепстральный анализ, распознавание речи, метод Баума – Велша.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-452-464

ВВЕДЕНИЕ

Распознавание голоса в компьютерных системах весьма распространено. Распознавание речи и, как следствие, голосовая идентификация нашли свое применение во всех сферах человеческой деятельности. Благодаря системам распознавания речи обеспечивается безопасность от несанкционированного проникновения в защищенную зону. Такие системы содержат базу данных голосов сотрудников, имеющих доступ к защищаемой зоне, и предотвращают допуск людей, чьих голосов в ней нет [1, 2].

В настоящее время широко разрабатываются и внедряются интеллектуальные системы управления различными объектами, которые позволяют осуществлять контроль за объектами в реальном времени. Управление такими системами можно осуществлять различными способами, одним из них является метод голосовых команд. При этом защиту объекта от несанкционированного доступа можно решить, используя индивидуальные особенности голоса каждого человека.

Уровень развития современной микропроцессорной техники (например, мобильные устройства связи) позволяет использовать сложные вычислительные алгоритмы, основанные на цифровой потоковой обработке статистических данных в реальном времени. Поэтому разработка таких алгоритмов является весьма актуальной.

Одним из путей решения вышеуказанных задач является использование для распознавания фрагментов речи математического аппарата скрытых марковских моделей (СММ) [3]. Данная работа посвящена разработке алгоритма и соответствующего программного модуля, осуществляющего формирование СММ для отдельных слов требуемого словаря команд системы управления объекта, на основе кодирования признаков звукового сигнала, использующего линейные предсказания.

1. СТРУКТУРА СИСТЕМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ РЕЧИ НА ОСНОВЕ СММ

Рассмотрим дискретную систему, имеющую конечное множество из N состояний — $S = \{s_1, \dots, s_N\}$, в каждом из которых она может принимать одно из M значений из набора наблюдаемых параметров $V = \{v_1, \dots, v_M\}$ — алфавита. Состояние системы q_t в момент времени t, принимающее одно из N значений множества S, зависит только от её состояния q_{t-1} в момент времени $t-1$, а значение наблюдаемого параметра o_t в момент времени t зависит только от состояния q_t, т. е. не зависит от времени.

Вероятности переходов между состояниями системы задаются матрицей A. Вероятности выпадения каждого из M значений наблюдаемого параметра системы в каждом из N состояний системы задаются набором векторов B. Вероятность появления некоторого начального состояния системы задаётся вектором π. При этом последовательность состояний, в которых пребывает система $Q = q_1, \dots, q_T$, внешнему наблюдателю не видна, а видит он только последовательность наблюдений $O = o_1, \dots, o_T$ (здесь T — длина последовательности), т. е. система ведёт себя как «чёрный ящик». Модель такой системы получила название СММ и в компактной записи обозначается $\lambda = (A, B, \pi)$ [2].

Для моделирования отдельного слова может быть выбрана лево-правая СММ (рис. 1) на основе предположения о том, что в каждый момент времени система переходит в новое состояние [4]. Соответственно неизвестное число скрытых состояний N в этом случае определяется

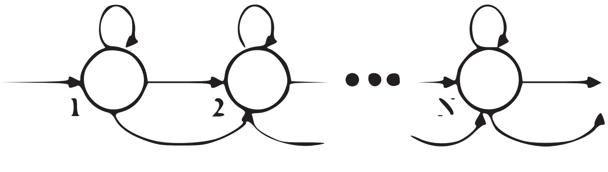


Рис. 1. Структура лево-правой СММ
Fig. 1. The structure of the left-right hidden Markov models (HMM)

длиной и количеством сегментов, на которые слово разбивается при анализе его признаков. Процесс распознавания с использованием СММ предполагает два этапа (рис. 2).

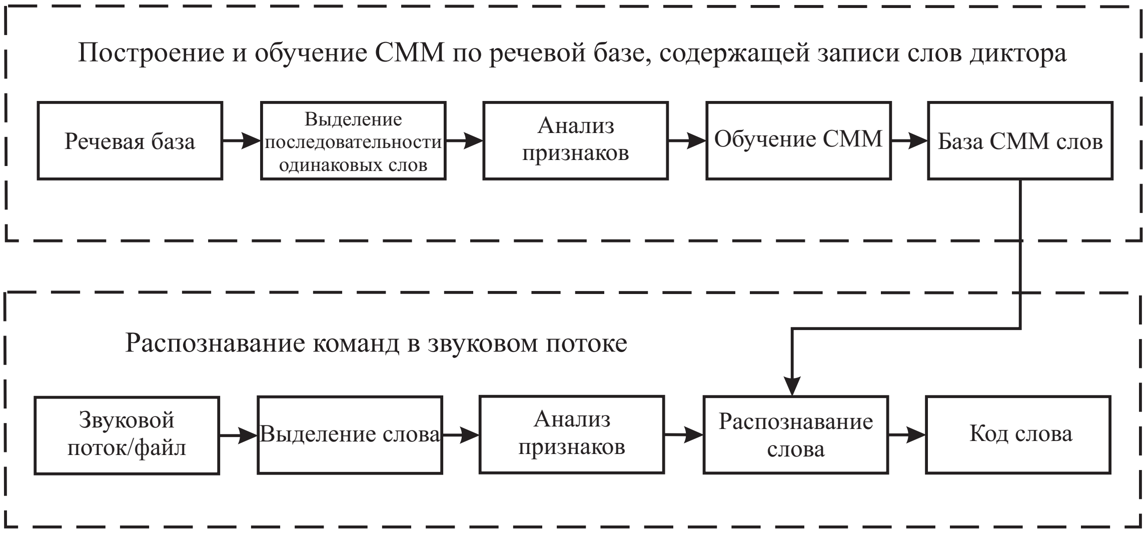


Рис. 2. Структура системы распознавания речи на основе использования СММ
Fig. 2. Structure of the speech recognition system based on the use of HMM

В режиме обучения элементы системы имеют следующее функциональное назначение:

- речевая база содержит записи слов, повторяющихся несколько раз для обеспечения адекватности получаемых СММ, которые будут доступны для распознавания;
- выделение последовательности одинаковых слов из файла речевой базы с помощью предварительной обработки (подавление шума, фильтрация и т. д.);
- анализ признаков и определение алфавита слова V, по которому формируется последовательность наблюдений O;
- обучение СММ — подбор параметров СММ, чтобы она как можно лучше описывала реальную наблюдаемую последовательность O символов алфавита V анализируемого слова;
- сохранение СММ в базе — словаре.

В режиме распознавания:

- выделение слова из входного звукового потока с помощью предварительной обработки;
- анализ признаков распознаваемого слова и формирование соответствующей последовательности наблюдений O;
- распознавание слова с использованием базы СММ и генерация кода распознаваемого слова.

Таким образом, для реализации данной структуры необходимо всего 4 модуля: модуль выделения слов из звукового потока, модуль анализа признаков слова, модуль обучения СММ с базой моделей, модуль распознавания слов.

2. АЛГОРИТМ ВЫДЕЛЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ СЛОВ ИЗ ЕДИНОГО ЗВУКОВОГО ФАЙЛА

В режиме обучения файл должен содержать несколько раз произнесенное одним диктором требуемое слово. Это необходимо для получения достоверной последовательности наблюдений O, соответствующей данному слову. На рис. 3 приведена блок-схема алгоритма предварительной обработки звукового файла, основанного на

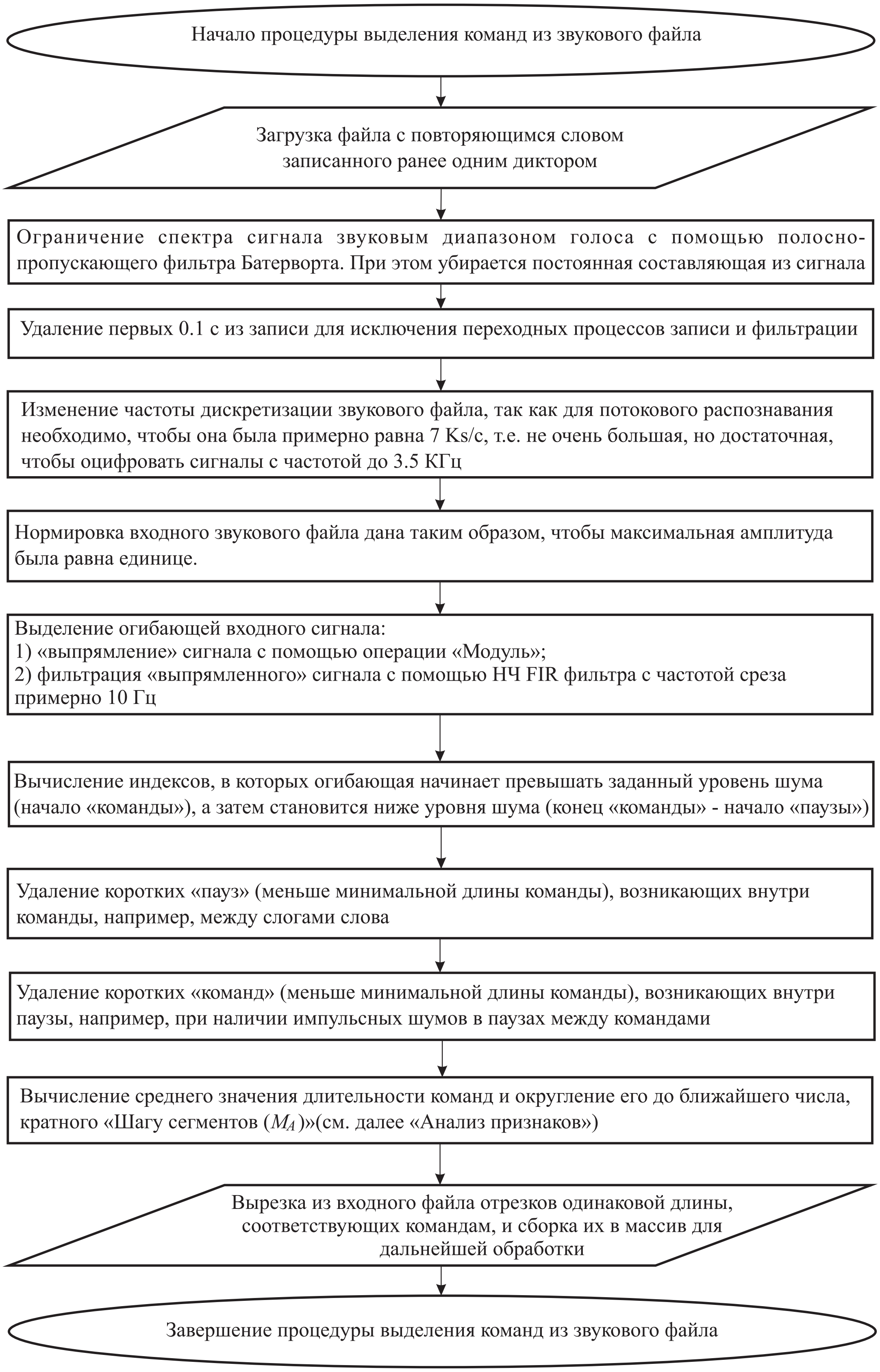


Рис. 3. Блок-схема алгоритма выделения отдельных повторяющихся слов из звукового файла

Fig. 3. A flowchart of an algorithm for selecting separate repetitive words from a sound file

вычислении огибающей и выделении на ее основе участков файла соответствующих повторяющимся словам.

При этом на выходе формируется массив отрезков звукового файла одинаковой длины, соответствующих повторяемому слову, что позволяет использовать усредненные входные данные при обучении СММ слова, делая её тем самым более адекватной.

Алгоритм выделения отдельных слов из звукового потока встроен в модуль построения СММ слов, реализованный в среде графического программирования LabVIEW компании National Instruments [5]. На рис. 4 показан процесс выделения команды из звукового файла, содержащего десять раз повторяющееся слово «Вперёд».

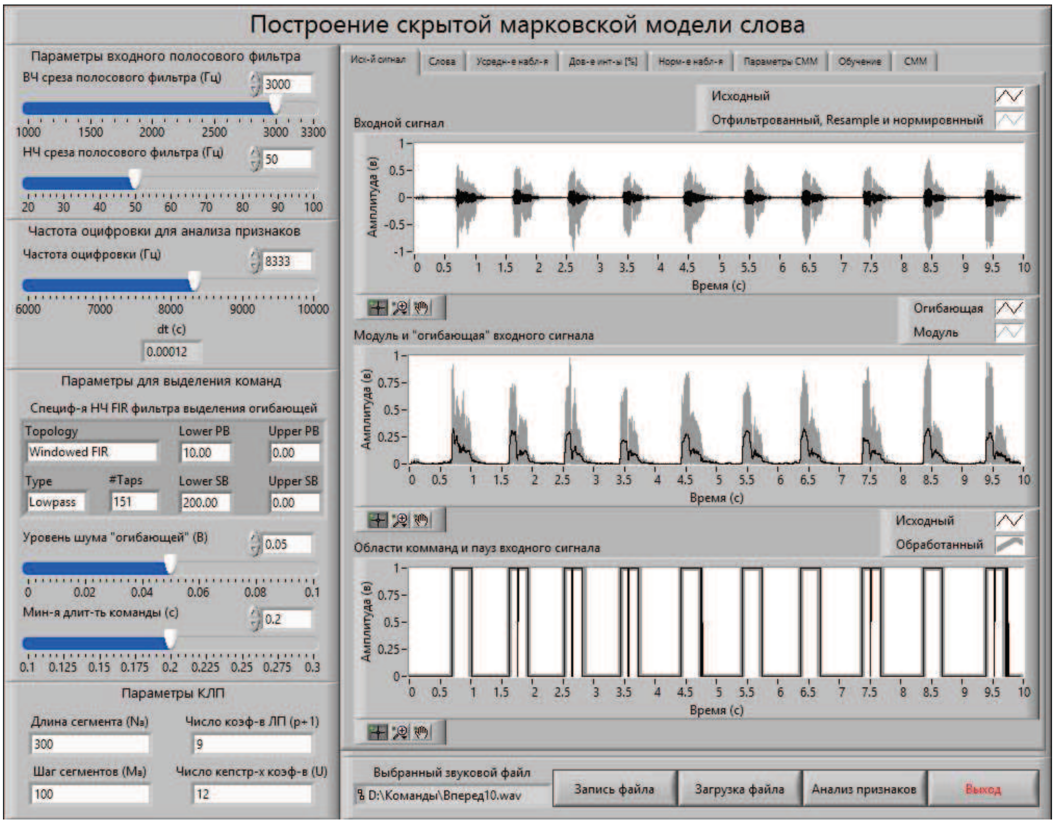


Рис. 4. Выделение повторяющихся слов из звукового файла
Fig. 4. Selecting duplicate words from a sound file

На первом графике рис. 4 чёрным изображен исходный сигнал, серым — отфильтрованный, с измененной частотой дискретизации и нормированный. Из записи убираются первые 0.1 с, соответствующие переходным процессам при включении микрофона и предварительной фильтрации.

Выделение слова осуществляется путем анализа огибающей сигнала. Индексы, в которых огибающая начинает превышать заданный в начале уровень шума, соответствуют началу команды. Индексы, в которых огибающая становится ниже уровня шума, — концу команды. Паузы внутри команды отсеиваются с помощью заданной заранее минимальной длительности команд. Таким же образом отсеиваются и лишние шумы.

Элементы управления модуля (граничные частоты среза входного полосового фильтра, частота дискретизации сигнала для анализа признаков, параметры НЧ фильтра огибающей, уровень шума огибающей, минимальная длительность команды) позволяют подбирать требуемые параметры на этапе выделения команд для обеспечения построения адекватных СММ слов.

3. АЛГОРИТМ АНАЛИЗА ПРИЗНАКОВ СЛОВ

Для системы распознавания речи каждому слову необходимо сопоставить набор признаков. Этот процесс в [4] предложено осуществлять на основе анализа периодичности спектра фрагментов звукового сигнала (кепстральный анализ), предварительно обработанного с помощью алгоритмов линейного предсказания. Такой процесс называется кодированием на основе линейного предсказания (КЛП). Алгоритм анализа признаков на основе КЛП, используемый при распознавании отдельных слов, приведен на рис. 5, 6.

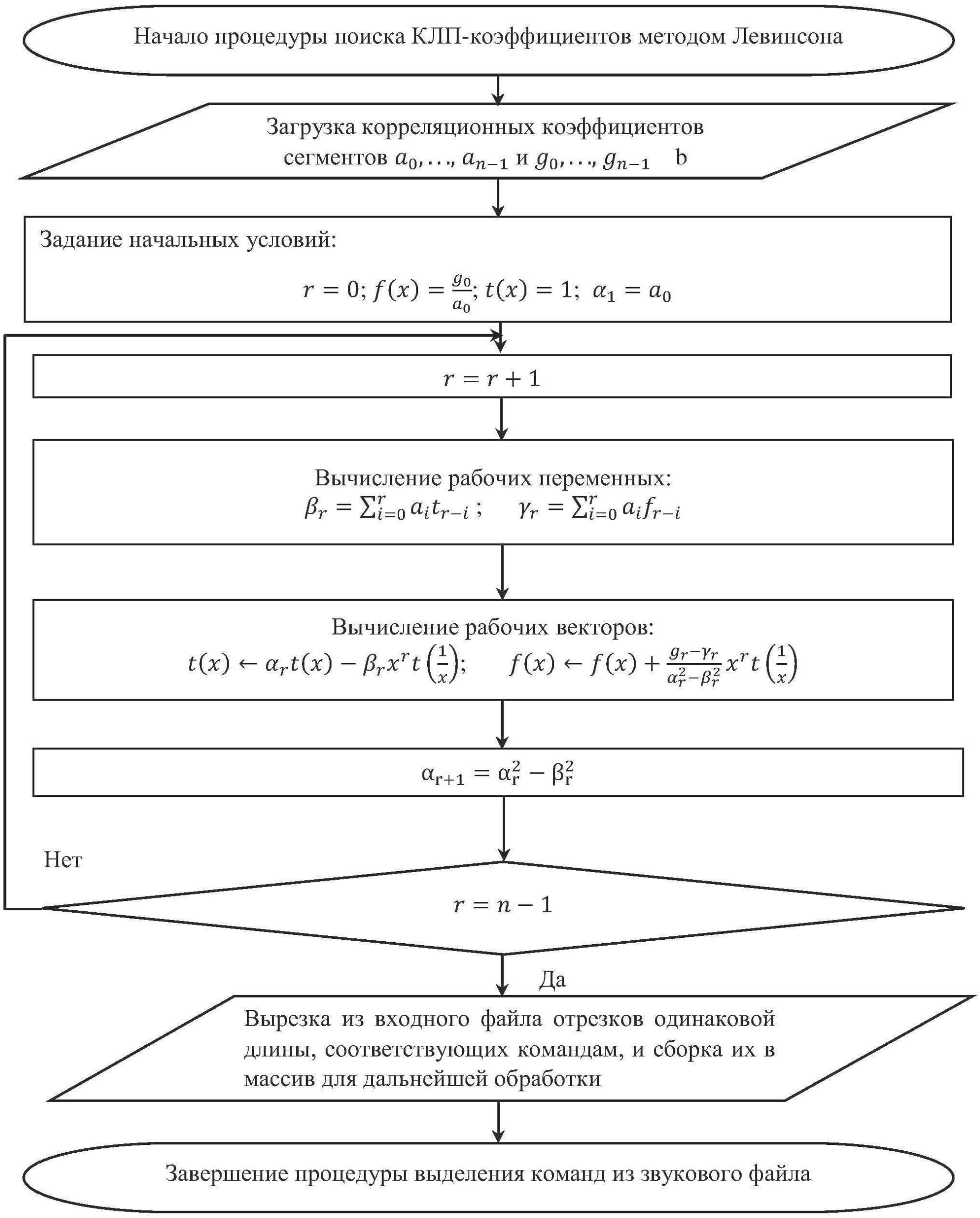


Рис. 5. Блок-схема процедуры алгоритма Левинсона вычисления КЛП-коэффициентов
Fig. 5. Block diagram of the procedure of Levinson’s algorithm for calculating linear prediction coding (LPC) coefficients

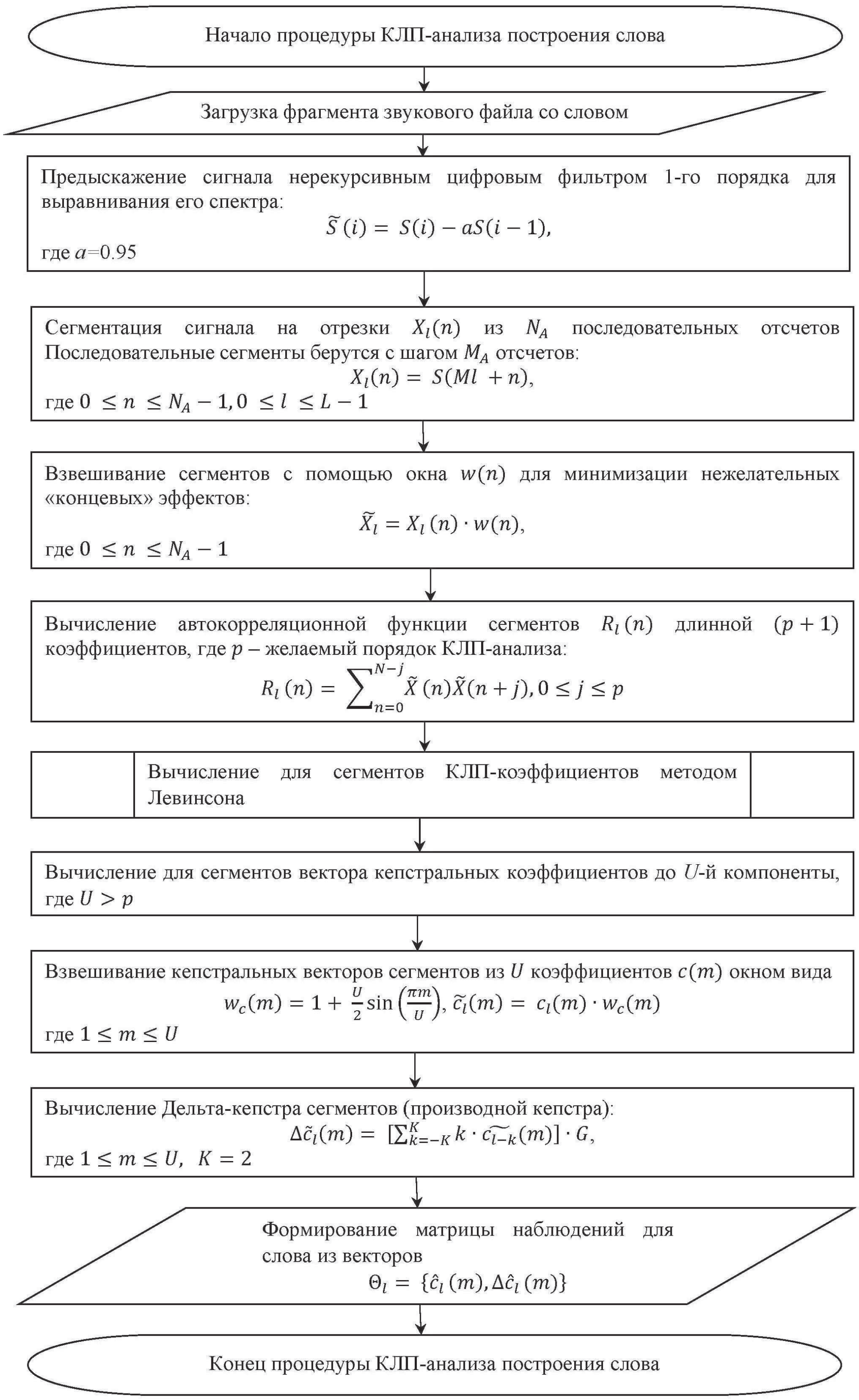


Рис. 6. Блок-схема алгоритма анализа признаков слова на основе КЛП
Fig. 6. Flowchart of word analysis algorithm based on LPC

Достоинством спектральной обработки звуковых сигналов является то, что при переходе из временной области в частотную представление информации становится более наглядным, компактным. Причем, чем более «простым» является сигнал во временной области, тем в большей степени происходит сжатие информации.

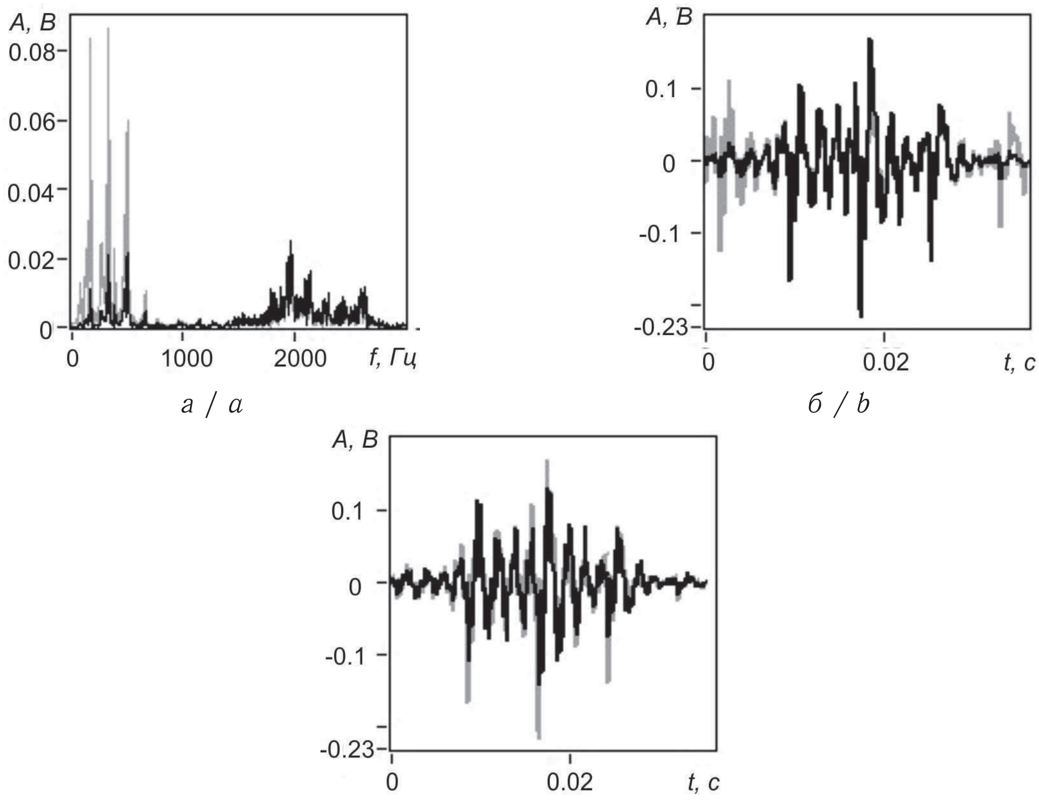
Выявление периодичности в спектре (кепстральный анализ) позволяет более достоверно и точно охарактеризовать особенности произношения дикторов. При этом спектральная информация представляется еще более компактно. Каждый гармонический ряд исходного спектра представляется в идеале всего одной составляющей в кепстре [4].

Использование линейного предсказания, основанного на автокорреляционной фильтрации, должно улучшать отношение сигнал – шум исходного сигнала и убирать из него случайные артефакты. Вычисление коэффициентов линейного предсказания осуществляется с помощью алгоритма Левинсона (см. рис. 5) [6].

В процессе анализа признаков слова каждый участок, выделенный ранее из файла и соответствующий повторяющемуся слову, разбивается на небольшие перекрывающиеся отрезки – сегменты и затем обрабатывается согласно алгоритму, приведенному на рис. 5, 6. Как видно (рис. 7, *а*), в результате предискажения сигнала происходит выравнивание спектра, что обеспечивает равноценность спектральных компонент при анализе признаков.

Оконное взвешивание (рис. 7, *б*) уменьшает сигнал на концах сегментов и увеличивает в центре, минимизируя нежелательные концевые эффекты.

Линейное предсказание (рис. 7, *в*) на основе алгоритма Левинсона (см. рис. 5) убирает сглаживает выбросы и случайные артефакты в анализируемом сигнале.



в / *c*

Рис. 7. Спектр исходного (**–**) и предискаженного (–) сигналов (*а*), исходный (–) и взвешенный (**–**) сегменты сигнала (*б*), исходный взвешенный (–) и предсказанный (**–**) сегменты сигнала (*в*)

Fig. 7. The spectrum of the initial (**–**) and pre-faded (–) signals (*a*), the initial (–) and weighted (**–**) signal segments (*b*), the initial weighted (–) and predicted (**–**) signal segments (*c*)

На выходе алгоритма формируется необходимая для распознавания слова матрица, строки которой образуются конкатенацией взвешенного кепстрального и соответствующего взвешенного дельта-кепстрального векторов сегментов. Каждая такая строка является набором признаков сегмента — вектором наблюдений и соответствует одному символу из алфавита V СММ слова в последовательности наблюдений O. Количество строк определяет число состояний N, в которых находилась лево-правая СММ слова.

Настройка параметров КЛП (число отсчётов в сегменте N_A, число отсчётов в смещении сегментов M_A, порядок КЛП-анализа p, число кепстральных коэффициентов U) осуществляется посредством соответсвующих элементов (см. рис. 5).

4. ПОСТРОЕНИЕ СММ СЛОВА

В процессе построения СММ слова для повышения её адекватности необходимо использовать матрицу векторов наблюдений, полученную статистическим усреднением матриц векторов наблюдений повторяющихся слов. При этом усредняются вектора наблюдений, соответствующие одним и тем же моментам времени повторяющихся слов.

Оценка достоверности выборочных средних значений признаков сегментов (элементов векторов наблюдений) повторяющихся слов проводится с помощью доверительных интервалов, вычисляемых при уровне статистической значимости $\alpha = 0,05$.

Сравнение степени разброса, т. е. оценка однородности выборочных дисперсий значений элементов векторов наблюдений, вычисленных по результатам анализа признаков повторяющихся слов, осуществляется с использованием критерия Кохрена [7]

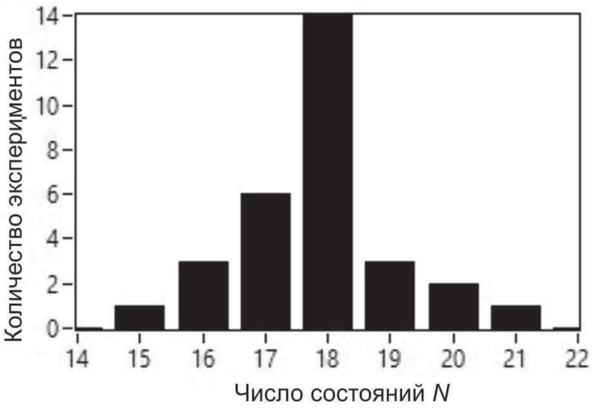
Обеспечение статистически значимых выборочных средних значений элементов векторов наблюдений и однородности их дисперсий, т. е. получение достоверной последовательности наблюдений для анализируемого слова, достигается подбором параметров обработки входного сигнала и параметров КЛП (см. п. 2, 3).

Оценку расстояния между символами алфавита V слова — усреднёнными векторами наблюдений — было предложено делать с помощью евклидовой нормы. При этом для обеспечения равнозначности признаков при вычислении расстояния проводилась их нормировка. В качестве нормирующего для каждого элемента вектора наблюдений использовался диапазон его изменения в матрице, расширенный с учётом доверительного интервала.

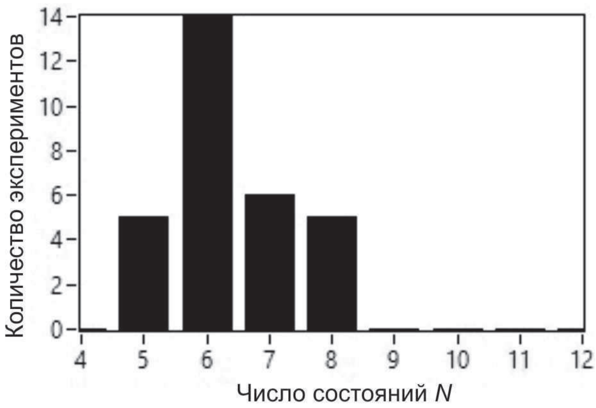
Формирование алфавита СММ слова осуществляется удалением повторяющихся строк из нормированной матрицы средних значений наблюдений, если такие имеются. При этом сравнивается расстояние между текущей строкой и остальными. Если оно меньше некоторой заданной величины, то строка с большим индексом удаляется, так как считаем, что эти строки соответствуют одному и тому же символу. Соответственно число строк получившейся прореженной матрицы определяет количество символов M алфавита V, индексы строк являются значениями алфавита, а сами строки — признаками символов.

Последовательность наблюдений слова определяется сравнением строк матрицы алфавита V (прореженной) с исходной нормированной матрицей средних значений наблюдений. Если расстояние между строками меньше некоторой заданной величины, использованной при построении алфавита, то индекс строки матрицы алфавита V записывается в последовательность наблюдений O. Длина последовательности наблюдений T равна числу строк исходной матрицы, а число состояний N равно T в случае лево-правой СММ слова.

На рис. 8 приведены результаты экспериментов по определению числа состояний N для слов «Вперёд» и «Стоп». На вход модуля построения СММ для каждого из этих слов подавалось тридцать звуковых файлов, содержащих по пятнадцать повторений, произнесённых одним диктором. Во всех случаях число состояний N совпадало с количеством символов M алфавита V, что соответствует предположению о лево-правой структуре СММ (см. рис. 1) для этих слов из-за отсутствия в них повторяющихся звуков.



а / a



б / b

Рис. 8. Количество полученных в экспериментах состояний для слов «Вперёд» (*а*) и «Стоп» (*б*)
Fig. 8. The number of states obtained in the experiments for the words „Forward“ (*a*) and „Stop“ (*b*)

Как видно из рис. 8, закон распределения отклонений числа состояний N от средних значений близок к нормальному. Соответственно для слова «Вперёд» среднее значение N составило $18 \pm 2.6\%$ при 95% -й доверительной вероятности, а для слова «Стоп» — $6 \pm 5.7\%$.

Следовательно, данные, полученные с помощью предложенного алгоритма предварительной обработки звукового файла в совокупности с КЛП-анализом, являются достаточно надёжными и их можно использовать для построения СММ слова.

Процесс построения начинается генерированием по известному числу состояний N и количеству символов M алфавита V исходной СММ $\lambda = (A, B, \pi)$, имеющей случайные параметры. При этом матрица вероятностей переходов между состояниями A, матрица вероятностей каждого наблюдения в каждом состоянии B, а также вектор вероятностей начального состояния π должны удовлетворять стохастическим ограничениям [3].

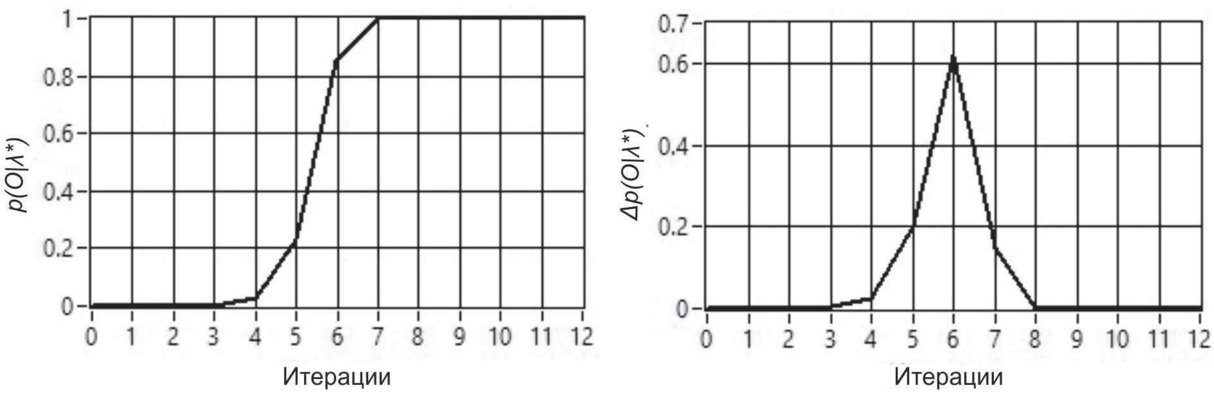
Далее необходимо так подобрать параметры исходной СММ, чтобы вероятность соответствия последовательности наблюдений, сгенерированной этой СММ $\lambda^* = (A^*, B^*, \pi^*)$ и полученной ранее последовательности наблюдений $O = o_1, \ldots, o_T$ слова, была максимально возможной. То есть исходную СММ $\lambda = (A, B, \pi)$, имеющую вероятность $p(O|\lambda)$ генерирования заданной последовательности наблюдения $O = o_1, \ldots, o_T$ слова, надо обучить по этой последовательности наблюдения $O = o_1, \ldots, o_T$, чтобы вероятность $p(O|\lambda^*)$ генерирования последовательности $O = o_1, \ldots, o_T$, обученной СММ $\lambda^* = (A^*, B^*, \pi^*)$, была максимально возможной.

Одним из вариантов обучения СММ $\lambda = (A, B, \pi)$ по заданной последовательности наблюдений $O = o_1, \ldots, o_T$ является применение алгоритма Баума – Велша [3].

Алгоритм позволяет уточнять параметры исходной СММ $\lambda = (A, B, \pi)$ таким образом, чтобы у уточнённой СММ $\lambda^* = (A^*, B^*, \pi^*)$ вероятность $p(O|\lambda^*)$ увеличивалась. Итеративное применении алгоритма до схождения в одной точке позволяет максимизировать $p(O|\lambda^*)$, т. е. настроить СММ $\lambda^* = (A^*, B^*, \pi^*)$ на заданную последовательность наблюдений $O = o_1, \ldots, o_T$ слова. На рис. 9 приведены зависимости изменений вероятности $p(O|\lambda^*)$ и её приращения $\Delta p(O|\lambda^*)$ на каждом итерационном шаге при настройке методом Баума – Велша СММ на слово «Стоп». Эти зависимости имеют характерный для метода Баума – Велша вид.

В начале обучения значения вероятности $p(O|\lambda^*)$ имеют, как правило, величины меньшие или сравнимые с используемой для оценки сходимости положительной величиной ε (см. рис. 9, *а*), но разность значений $p(O|\lambda^*)$ на каждом шаге увеличивается, т. е. приращение $\Delta p(O|\lambda^*) > 0$ растет (см. рис. 9, *б*).

При завершении обучения значения вероятности $p(O|\lambda^*)$, как правило, сходятся к некоторой величине, при этом приращение $\Delta p(O|\lambda^*) > 0$, но оно начинает уменьшаться и стремиться к 0.



а / *a* *б* / *b*

Рис. 9. Изменения вероятности СММ $p(O|\lambda^*)$: *а* — и её приращения $\Delta p(O|\lambda^*)$; *б* — при обучении методом Баума – Велша

Fig. 9. Changes in the probability of the HMM $p(O|\lambda^*)$: *a* — and its increment $\Delta p(O|\lambda^*)$; *b* — when learning by the Baum – Welsh method

Следовательно, для корректной оценки сходимости итерационного процесса обучения необходимо контролировать не только величину приращения $\Delta p(O|\lambda^*)$, но и знак его изменения, т. е. для завершения обучения должно выполняться условие $\Delta p(O|\lambda^*) \leqslant \varepsilon$ при уменьшении $\Delta p(O|\lambda^*)$.

В разработанном модуле построения СММ для оценки сходимости процесса обучения использовано значение $\varepsilon = 1.1 * 10^{-19}$, соответствующее машинной точности.

Недостатком алгоритма Баума – Велша при обучении СММ является поиск локального максимума $p(O|\lambda^*)$, а не глобального. Поэтому для достижения хорошего результата требуется, как правило, несколько запусков при различных начальных условиях.

Таким образом, используя последовательности наблюдений и алфавит моделируемых слов, получаемые на первых этапах обработки, с помощью алгоритма Баума – Велша можно строить соответствующие адекватные СММ для систем распознавания речи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный программный модуль позволяет эффективно подготавливать необходимые исходные данные на основе кодирования признаков звукового сигнала, использующего линейные предсказания, строить СММ отдельных слов и проводить их обучение с помощью алгоритма Баума – Велша. Построенные СММ слов предполагается использовать в интеллектуальных системах управления различными объектами.

Библиографический список

1. *Жиляков Е. Г., Бабаринов С. Л., Чадюк П. В.* Исследование сервиса компании Google Inc. по распознаванию русской речи // Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 2013. № 15(158), вып. 27/1. С. 247–255.
2. *Титов Ю. Н.* Современные технологии распознавания речи // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. 2006. Т. 11, вып. 4. С. 571–574.
3. *Савин А. Н., Тимофеева Н. Е., Гераськин А. С., Мавлютова Ю. А.* Разработка компонентов программного комплекса для потоковой фильтрации аудиоконтента на основе использования скрытых марковских моделей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 340–350. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-340-350.
4. *Рабинер Л. Р.* Скрытые Марковские модели и их применение в избранных приложениях при распознавании речи : Обзор // ТИИЭР. 1989. Т. 77, № 2. С. 86–120.
5. Портал компании National Instruments Russia. URL: http://www.labview.ru (дата обращения: 15.12.2017).
6. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М. : Мир, 1989. 448 с.
7. *Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М. : Наука, 1976. 279 с.

Образец для цитирования:
Савин А. Н., Тимофеева Н. Е., Гераськин А. С., Мавлютова Ю. А. Разработка системы распознавания речи на основе скрытых марковских моделей отдельных слов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 452–464. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-452-464.

Development of Speech Recognition Systems Based on Hidden Markov Models of Individual Words

A. N. Savin, N. E. Timofeeva, A. S. Geraskin, Yu. A. Mavlutova

Alexander N. Savin, orcid.org/0000-0001-5148-9166, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, savinan@info.sgu.ru
Nadezhda E. Timofeeva, orcid.org/0000-0002-3976-3115, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, timofeevane@yandex.ru
Aleksej S. Geraskin, orcid.org/0000-0002-3118-1022, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, gerascinas@mail.ru
Yuliya A. Mavlutova, orcid.org/0000-0002-1190-90064, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, yuliyamav@yandex.ru

The results of the development of software modules implementing the speech recognition system based on the hidden Markov models of individual words and the use of linear prediction in the coding of signs of an audio signal are presented. The structure of the speech recognition system is based on the hidden Markov models of individual words, consisting of four modules: a module for extracting words from the sound stream, a module for analyzing the features of a word, a module for learning the hidden Markov models, and a word recognition module. Algorithms for the formation of hidden Markov models with left-right topology for individual words of the required dictionary of commands of the object control system are based on the coding of signs of a sound signal using linear predictions. Results of an estimation of reliability of a sequence of observations corresponding to separate words obtained with the help of the proposed processing algorithm are given. The developed software modules allow to prepare efficiently the necessary initial data and thus form the required dictionary of commands of the object management system, build hidden Markov models of individual words, and conduct their training using the Baum – Welsh algorithm. The designed command dictionaries are supposed to be used in intelligent control systems for various objects.

Key words: Hidden Markov models, cepstral analysis, speech recognition, method of Baum – Welch.

References

1. Zhilyakov E. G., Babarinov S. L., Chadyuk P. V. Google Inc. Russian Speech Recognition Service Research. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Ser. History. Political science. Economics. Information technologies*, 2013, no. 15(158), iss. 27/1, pp. 247–255 (in Russian).
2. Titov Y. N. Modern technologies of speech recognition. *Tambov University Reports. Ser. Natural and Technical Sciences*, 2006, vol. 11, iss. 4, pp. 571–574 (in Russian).
3. Savin A. N., Timofeeva N. E., Geraskin A. S., Mavlutova Yu. A. The development of software components for streaming audio content filtering through the use of hidden Markov models. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 340–350. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-340-350.
4. Rabiner L. R. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition. *Proceedings of the IEEE*, 1989, vol. 77, no. 2. pp. 257–286. DOI: 10.1109/5.18626.
5. *Portal of company National Instruments Russia*. Available at: http://www.labview.ru (accessed 25 December, 2012).
6. Blahut R. E. *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*. Addison-Wesley Publ. Co; Repr. with corrections edition, 1987. 441 p. (Russ. ed. : Moscow, Mir, 1989. 448 p.).
7. Adler Ju. P., Markova E. V., Granovskij Ju. V. *Planirovanie eksperimenta pri poiske optimal'nykh uslovii* [Planning an experiment searching for optimal conditions]. Moscow, Nauka, 1976. 279 p. (in Russian).

Cite this article as:

Savin A. N., Timofeeva N. E., Geraskin A. S., Mavlutova Yu. A. Development of Speech Recognition Systems Based on Hidden Markov Models of Individual Words. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 452–464 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-452-464.

PERSONALIA

ПРОФЕССОР АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ МАНЖИРОВ (к 60-летию со дня рождения)

24 мая 2017 г. исполнилось 60 лет доктору физико-математических наук, профессору, иностранному члену Национальной академии наук Республики Армения Александру Владимировичу Манжирову.

А. В. Манжиров родился 24 мая 1957 г. в г. Ростове-на-Дону. Его отец, Манжиров Владимир Михайлович, был известным специалистом в области химической технологии производства кожи и меха, заслуженным рационализатором РСФСР, награжден медалями «За доблестный труд» и «Ветеран труда». Мать, Манжирова Тамара Семеновна, начала трудовую жизнь во время Великой Отечественной войны в действующей 28-й армии 4-го Украинского фронта. Она награждена юбилейными медалями в честь Победы в Великой Отечественной войне. В послевоенные годы работала в промышленности и в аптечном производстве. Однако большую часть жизни она посвятила семье. Его сестра, Манжирова–Афанасьева Татьяна Владимировна, получила математическое образование (механико-математический факультет Ростовского государственного университета) и работает в области IT (с 1983 г. — в Испании).

А. В. Манжиров — крупный ученый в области механики деформируемого твердого тела и прикладной математики. Основными направлениями его научной деятельности являются механика растущих тел, теория ползучести и вязкоупругости, контактные задачи механики, трибология, интегральные уравнения и их приложения. А. В. Манжиров известен как один из основателей нового научного направления — механики растущих тел, — возникшего в связи с потребностями фундаментальной и прикладной науки в исследовании сложных процессов, характерных для современных междисциплинарных проблем, находящихся на стыке механики, физики, химии и биологии. Механика растущих тел, в частности, позволяет эффективно моделировать широкий круг таких технологических процессов, как бетонирование и полимеризация, электролитическое формование и пиролитическое осаждение, лазерное напыление и наплавление, отверждение расплавов и рост кристаллов. Для природных явлений она дает возможности адекватного описания формирования ледников, массивов осадочных и вулканических пород, гравитирующих объектов, а также процессов роста биологических тканей.

Им разработаны фундаментальные основы математической теории растущих тел, предложена классификация возможных способов роста, впервые получены полностью обоснованные уравнения для целого ряда процессов роста и наращивания. А. В. Манжиров — один из ведущих ученых в области механики контактных взаимодействий. С целью исследования сложных процессов контактного взаимодействия и износа им развита теория смешанных интегральных уравнений, содержащих операторы как с постоянными, так и переменными пределами интегрирования. Предложенный им универсальный проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений позволил впервые изучить проблемы контакта и износа поверхностно неоднородных тел и тел с экспериментальными профилограммами поверхности, описываемыми быстро осциллирующими функциями.

Общепризнан его авторитет в области теории ползучести и вязкоупругости неоднородных материалов с реономными свойствами. А. В. Манжиров — автор научных монографий и нескольких фундаментальных справочных руководств по математике и интегральным уравнениям, изданных как в России, так и за ее пределами. Справочники по интегральным уравнениям не имеют аналогов в мировой литературе, а «Справочник по математике для инженеров и ученых», изданный CRC Press в 2006 г. на английском языке, является самым большим справочным руководством по математике в мире, охватывая обширный материал из различных разделов современной математики, и уникален в плане собранных в нем методов решения различных уравнений, возникающих в многочисленных приложениях математики.

Профессор А. В. Манжиров считает своими учителями академика АН СССР (РАН) И. И. Воровича (1920–2001), академика АН АрмССР (НАН Армении) Н. Х. Арутюняна (1912–1993) и профессора В. М. Александрова (1936–2012). Большое влияние на его научное творчество оказали также академики АН СССР (РАН) А. Ю. Ишлинский (1913–2003), В. А. Бабешко, Д. М. Климов, Н. Ф. Морозов, Ф. Л. Черноусько, профессор В. Н. Кукуджанов (1931–2013). Их фундаментальные работы в значительной степени сформировали научное мировоззрение А. В. Манжирова; с ними ему посчастливилось работать в редакционных коллегиях ряда научных журналов, Научном совете РАН по механике деформируемого твердого тела, в Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки РФ и Российском фонде фундаментальных исследований.

В 1974 г. А. В. Манжиров закончил в Ростове-на-Дону специализированную среднюю школу с преподаванием ряда предметов на английском языке с пятибалльным аттестатом. В 1974 г. он становится студентом механико-математического факультета Ростовского государственного университета (в настоящее время — Южный федеральный университет), где специализируется в области механики на кафедре теории упругости. Механико-математический факультет Ростовского университета в те годы обеспечивал высочайший уровень подготовки в различных областях математики и механики. Лекции в то время читали такие блестящие ученые и педагоги, как член-корреспондент АН СССР (академик АН СССР с 1990 г., академик РАН с 1991 г.) И. И. Ворович, профессор В. М. Александров, профессор (академик РАН с 1997 г.) В. А. Бабешко, доцент (впоследствии профессор, ректор РГУ) А. В. Белоконь (1941–2013), доценты (впоследствии профессора) Ю. А. Устинов, Л. М. Зубов, С. Г. Самко, Э. Н. Потетюнко, И. Г. Кадомцев, ассистент (в настоящее время профессор, заведующий кафедрой теории упругости Южного Федерального университета) А. О. Ватульян. Научной работой А. В. Манжирова начиная с 3-го курса руководил член-корреспондент АН СССР И. И. Ворович, под влиянием которого произошло формирование научного мировоззрения А. В. Манжирова, особенно в плане применения современного математического аппарата в исследованиях в области прикладной математики и механики деформируемого твердого тела. Дипломная работа была защищена с отличной оценкой, причем впервые в Ростовском университете защита проходила на английском языке. Оппонентом на защите диплома выступил В. А. Бабешко. В 1979 г. А. В. Манжиров с отличием заканчивает Ростовский государственный университет, получает квалификацию «механик» и рекомендацию научного руководителя и ученого совета университета для поступления в аспирантуру.

В 1979 г. по приглашению академика АН АрмССР Н. Х. Арутюняна и профессора В. М. Александрова А. В. Манжиров переезжает в Москву. Академик АН АрмССР Н. Х. Арутюнян в то время заведовал лабораторией механики вязкоупругих тел Института проблем механики АН СССР, а профессор В. М. Александров был ведущим научным сотрудником этой лаборатории. Н. Х. Арутюнян — выдающийся ученый и государственный деятель СССР, по праву считается одним из основателей научной школы механики в Армении и всемирно признанным классиком теории ползучести. Работая в Институте проблем механики АН СССР, он вместе со своими учениками создал целый ряд новых научных направлений механики деформируемого твердого тела, в частности, такое направление, как механика растущих тел. В настоящее время А. В. Манжиров возглавляет созданную в Институте проблем механики в 80-х гг. прошлого века научную школу Н. Х. Арутюняна. Одновременно профессор В. М. Александров привлек А. В. Манжирова к исследованию контактных и смешанных задач механики деформируемого твердого тела, которые навсегда вошли в круг его научных интересов.

В апреле 1983 г. А. В. Манжиров поступает на работу в Институт проблем механики АН СССР и работает сначала в должности инженера лаборатории механики вязкоупругих тел, с 1984 г., после утверждения его кандидатской диссертации Высшей аттестационной комиссией при Совете Министров СССР, — младшего научного сотрудника. В 1989 г. он становится научным сотрудником, а затем в 1992 г. — старшим научным сотрудником.

10 ноября 1983 г. А. В. Манжиров успешно защищает диссертационную работу «Исследование напряженно-деформированного состояния неоднородно вязкоупругих тел при их взаимодействии с концентраторами и жесткими штампами» и получает ученую степень кандидата физико-математических наук в совете при Московском институте электронного машиностроения. Заметим, что председателем Специализированного совета по защите докторских диссертаций в то время был академик АН АрмССР Н. Х. Арутюнян, но поскольку он был научным руководителем соискателя, то вел заседание его заместитель профессор Московского института электронного машиностроения А. С. Кравчук (1944–2010). Официальными оппонентами выступили заслуженный деятель науки и техники РСФСР профессор Тульского государственного университета Л. А. Толоконников (1923–1998) и доцент механико-математического факультета МГУ Р. И. Мазинг (1925–2009). Роль ведущей организации сыграл Днепропетровский государственный университет, который в то время возглавлял академик АН УССР В. И. Моссаковский (1919–2006).

7 октября 1993 г. А. В. Манжиров защищает докторскую диссертационную работу «Контактные задачи теории вязкоупругости наращиваемых тел» в диссертаци-

онном совете при Институте проблем механики РАН. Заседание вел председатель диссертационного совета академик РАН А. Ю. Ишлинский. Оппонентами по работе выступили директор НИИ механики и прикладной математики при Ростовском государственном университете академик РАН И. И. Ворович, проректор Московской государственной академии приборостроения и информатики профессор А. С. Кравчук, заведующий кафедрой Одесского государственного университета профессор Г. Я. Попов (1932–2013); ведущая организация — механико-математический факультет МГУ. Отзыв ведущей организации на докторскую диссертационную работу подписал профессор В. Д. Клюшников (1928–2001), который в то время возглавлял кафедру теории пластичности механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

В 1995 г. А. В. Манжиров становится ведущим научным сотрудником, а с 2004 г. занимает должность заведующего лабораторией моделирования в механике деформируемого твердого тела. В сентябре 2015 г. он назначается на должность заместителя директора Института прикладной механики РАН по научной работе.

С начала 1980-х гг. А. В. Манжиров ведет активную научную работу. В 1988 г. результаты его научных исследований в области контактных задач были подытожены в монографии (*Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В.* Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.). Книга была написана в конце 1980-х гг. и должна была выйти в 1990 г., но была издана только в 1999 г. В ней впервые систематически были изложены основы теории ползучести неоднородных стареющих тел (включая определяющие уравнения различных типов, анализ структуры ядер ползучести и релаксации, доказательства принципов соответствия), теории нелинейной установившейся ползучести, а также механики непрерывно растущих тел, и в рамках указанных теорий сформулированы и исследованы задачи контактного взаимодействия. Значительное место в этой книге отводится математическим методам построения решений интегральных уравнений и систем интегральных уравнений, которые возникают при анализе контактных задач теории ползучести, и алгоритмам построения точных и приближенных решений нелинейных задач.

В 1991 г. выходит в свет другая монография (*Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В., Наумов В. Э.* Контактные задачи механики растущих тел. М. : Наука, 1991. 176 с.), целиком посвященная новым задачам механики деформируемого твердого тела — контактным задачам непрерывно и дискретно наращиваемых тел, обладающих сложными реологическими свойствами (в том числе с учетом старения и возрастной неоднородности). В этой книге были созданы теоретические основы механики контактного взаимодействия деформируемых тел, конфигурации которых изменяются за счет присоединения дополнительного материала к их внешним поверхностям, сформулированы математические постановки соответствующих начально-краевых задач и разработаны методы их исследования.

С середины 90-х гг. много времени А. В. Манжиров уделяет развитию теории интегральных уравнений. Интегральные уравнения встречаются во многих разделах механики сплошных сред и физики (в теории упругости, теории пластичности, теории тепломассопереноса, гидромеханике, электродинамике и теории распространения волн). Начиная с 1998 г. он публикует серию книг, посвященных точным решениям интегральных уравнений и методам их решения.

В 2006 г. А. В. Манжиров совместно с А. Д. Поляниным осуществляет издание большого справочного руководства по математике (*Polyanin A. D., Manzhirov A. V.*

Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Boca Raton ; London : Chapman & Hall/ CRC Press, 2006. 1544 p.), а в 2007 г. они выпускают самое полное, расширенное и исправленное второе издание справочника по интегральным уравнениям (*Polyanin A. D., Manzhirov A. V.* Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Boca Raton; London : Chapman & Hall/CRC Press, 2007. 1544 p.).

А. В. Манжиров активно участвует в международном научном сотрудничестве. Долгое время он являлся координатором Комплексной долгосрочной программы научно-технического сотрудничества между Россией и Индией в области механики. Им была проведена большая работа по объединению усилий ученых обеих стран для решения важных теоретических и прикладных проблем в рамках проектов Комплексной долгосрочной программы, РФФИ и Министерства науки и технологий Индии. Совместно с координатором от Индии профессором Н. К. Гуптой им организован постоянный российско-индийский семинар, в котором принимают участие ведущие ученые двух стран. Результатом этой деятельности стало опубликование трех коллективных индо-российских монографий. Важные исследования проводятся с Тшванским технологическим университетом (ЮАР, Претория) по термомеханике лазерной обработки материалов в рамках совместного гранта РФФИ и Национального исследовательского фонда. Здесь основное внимание уделяется теоретическим и экспериментальным проблемам лазерного напыления и наплавления. Многолетнее плодотворное сотрудничество ведется с Институтом основных проблем техники Польской академии наук в рамках Договора о сотрудничестве между РАН и ПАН: проводятся согласованные исследования в области тонких покрытий. Развивается традиционное сотрудничество с Институтом механики НАН Республики Армения в рамках договора между РАН и НАН РА, которое было распространено на новые области механики, в частности, связанные с процессами роста. В 2007 г. профессор А. В. Манжиров организовал совместно с директором Института механики НАН РА профессором В. Н. Акопяном международную конференцию «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвященную 95-й годовщине со дня рождения Н. Х. Арутюняна. В настоящее время эта конференция стала традиционной, представительной и авторитетной в области механики континуума.

А. В. Манжиров ведет активную преподавательскую деятельность. С 1994 г. он работает в должности профессора кафедры высшей математики Московского государственного университета приборостроения и информатики; с 1997 г. является профессором кафедры прикладной математики МГТУ им. Н. Э. Баумана, в 2002 г. становится заведующим созданного им филиала указанной кафедры в Институте проблем механики РАН; с 2014 г. занимает должность профессора кафедры высшей математики Национального исследовательского ядерного университета (МИФИ). В разные годы он читает курсы по аналитической геометрии, высшей алгебре, математическому анализу, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей и математической статистике, теории массового обслуживания, уравнениям математической физики. Им подготовлены современные оригинальные спецкурсы по теории ползучести неоднородных тел, механике растущих тел, неклассическим задачам механики деформируемого твердого тела, механике конструкционных материалов, интегральным уравнениям. Много времени он уделяет работе с аспирантами в ИПМех РАН, МГТУ им. Н. Э. Баумана и МИРЭА. Он член диссертационных советов по присуждению ученой степени доктора наук при Институте проблем механики РАН и МГТУ им. Н. Э. Баумана, руководитель семинара ИПМех РАН по механике сплошной среды им. Л. А. Галина.

А. В. Манжиров — лауреат первого конкурса (2001 г.) Фонда содействия отечественной науке. Ему была присуждена Государственная научная стипендия для выдающихся ученых России (1997–2003 гг.). Благодаря его трудам механика растущих тел как новое научное направление получила международное признание. В 2015 г. в Москве в Институте проблем механики РАН состоялся Симпозиум IUTAM по растущим телам. В этом же году Российский фонд фундаментальных исследований наградил А. В. Манжирова своим дипломом за большой вклад в развитие науки и многолетнюю плодотворную работу по поддержке фундаментальных научных исследований.

А. В. Манжиров — член редколлегий ряда научных журналов: «Известия РАН. Механика твердого тела», «Вычислительная механика сплошных сред», «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика», «Известия НАН Армении. Механика», «Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния», «Математическое моделирование и численные методы».

С 1999 г. А. В. Манжиров является членом Экспертного совета по математике и механике ВАК Минобрнауки РФ, более 10 лет он был заместителем председателя совета и курировал направление «механика». С 2000 г. он является ученым секретарем, а с 2006 г.— заместителем председателя Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела и отвечает за организацию сессий, конференций и семинаров. За время его работы в совете им были организованы более 40 международных и всероссийских конференций и семинаров. Он член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, Американского общества инженеров-механиков (ASME), Американского математического общества (AMS), Международной ассоциации по прикладной математике и механике (GAMM), Международной ассоциации инженеров (IAENG), Европейского общества по механике (EUROMECH).

На счету А. В. Манжирова свыше двухсот опубликованных научных работ, в том числе 14 монографий и 4 учебных пособия.

А. В. Манжиров награжден медалью «В память 850-летия Москвы», ему присуждено почетное звание «Ветеран труда».

Профессор А. В. Манжиров — ученый высочайшей квалификации в области механики деформируемого твердого тела. Его отличает доброжелательное отношение к ученикам и коллегам. В то же время он всегда занимает принципиальную позицию в научных дискуссиях и во главу угла ставит прежде всего вопросы поиска научной истины.

Л. Ю. Коссович, Ю. Н. Радаев

Научные труды А. В. Манжирова*

1981

Контактная задача для двухслойной стареющей вязкоупругой полосы // Смешанные задачи механики деформируемого тела. II Всесоюз. науч. конф. : тез. докл. Днепропетровск, 1981. С. 56–57.

*Список подготовлен Т. К. Нестеровым.

1982

Колебания неоднородно-стареющего вязкоупругого армированного стержня // Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. Т. 35, № 3. С. 31–37.

Контактная задача для двухслойного стареющего вязкоупругого основания // Прикл. матем. и механика. 1982. Т. 46, вып. 4. С. 674–682 (совместно с Е. В. Коваленко).

Контактные задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел // Ползучесть в конструкциях : тез. докл. Днепропетровск, 1982. С. 79–80 (совместно с В. М. Александровым, Е. В. Коваленко).

О концентрации напряжений в неоднородно-стареющей вязкоупругой среде // Теория упругости и вязкоупругости : тез. докл. Ереван, 1982. С. 39.

1983

Исследование напряженно-деформированного состояния неоднородно вязкоупругих тел при их взаимодействии с концентраторами и жесткими штампами : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1983. 16 с.

Исследование напряженно-деформированного состояния неоднородно вязкоупругих тел при их взаимодействии с концентраторами и жесткими штампами : дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1983. 209 с.

Осесимметричные контактные задачи для неоднородно-стареющих вязкоупругих слоистых оснований // Прикл. матем. и механика. 1983. Т. 47, вып. 4. С. 684–693.

Плоские и осесимметричные задачи о действии нагрузок на тонкий неоднородный вязкоупругий слой // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1983. № 5. С. 153–158.

Контактные задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел // VIII Всесоюз. конф. по прочности и пластичности : тез. докл. Пермь, 1983. С. 4–5. (совместно с В. М. Александровым, Н. Х. Арутюняном)

О влиянии неоднородного старения на концентрацию напряжений возле отверстий в нелинейных вязкоупругих телах // Докл. АН АрмССР. 1983. Т. 77, № 5. С. 214–218.

1984

Некоторые смешанные задачи теории ползучести неоднородно-стареющих сред // Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37, № 2. С. 12–25 (совместно с В. М. Александровым, Е. В. Коваленко).

Нелинейные контактные задачи теории упругости // II Всесоюз. конф. по теории упругости : тез. докл. Тбилиси, 1984. С. 7–8 (совместно с В. М. Александровым, С. А. Гришиным).

Non-linear contact problems of the theory of creep // 25th Polish Mech. Conf. Jachranka, 27–31 August, 1984. Abstr. Polish Acad. Sci., 1984. P. 18 (совместно с Н. Х. Арутюняном, В. М. Александровым).

О некоторых методах решения смешанных задач механики стареющих вязкоупругих тел и их приложениях к расчету конструкций // Ползучесть в конструкциях : тез. докл. Новосибирск, 1984. С. 97 (совместно с В. М. Александровым, А. М. Шустовой).

1985

О действии произвольной системы жестких штампов на основания со сложной реологией: постановки, методы, расчеты // Смешанные задачи механики деформируемого тела : тез. докл. Харьков, 1985. С. 66–67.

Численно-аналитические решения контактных задач для физически нелинейного тонкого слоя // II Всесоюз. конф. по нелинейной теории упругости : тез. докл. Фрунзе, 1985. С. 168–170 (совместно с С. А. Гришиным).

Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач для тел со сложной реологией // Прикл. матем. и механика. 1985. Т. 49, вып. 6. С. 1019–1025.

1986

Контактные задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел // Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости. Свердловск, 1986. С. 3–13 (совместно с В. М. Александровым, Н. Х. Арутюняном).

Контактные задачи для тонкого слоя в условиях нелинейной установившейся ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 119–125 (совместно с С. А. Гришиным).

1987

Контактные задачи о взаимодействии вязкоупругих оснований, подверженных старению, с системами неодновременно прикладываемых штампов // Прикл. матем. и механика. 1987. Т. 51, вып. 4. С. 670–685.

О некоторых постановках и решениях контактных задач теории ползучести для произвольных систем штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 139–151.

О двумерных интегральных уравнениях в прикладной механике деформируемых твердых тел // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1987. № 5. С. 146–152 (совместно с В. М. Александровым).

Действие наращиваемой системы жестких штампов на вязкоупругую полуплоскость // Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. М., 1987. С. 187–202 (совместно с Н. Х. Арутюняном).

Гипертоническая болезнь с позиции механики и теории регулирования / Ин-т проблем механики АН СССР. Препринт № 306. М., 1987. 65 с. (совместно с Е. Ш. Штенгольдом и др.)

1988

Проекционно-спектральный метод решения операторных уравнений, возникающих в механике сплошных сред // Тр. XIII науч. конф. молодых ученых Ин-та механики АН УССР : в 2 ч. Ч. 2. Киев, 1988. С. 423–427. Деп. в ВИНИТИ 27.12.88, № 9072–В88.

О взаимодействии жесткой усиливающей втулки с неоднородной стареющей трубой высокого давления // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 112–118 (совместно с В. А. Чернышом).

1989

Контактные задачи механики растущих тел // Прикл. матем. и механика. 1989. Т. 53, вып. 1. С. 145–158 (совместно с Н. Х. Арутюняном).

Контактные задачи механики растущих тел. // Смешанные задачи механики деформируемого тела : тез. докл. IV Всесоюз. конф. : в 2 ч. Ч. 1. Одесса, 1989. С. 27 (совместно с Н. Х. Арутюняном).

1990

Способ определения механических свойств кожного покрова : а.с. 1586679. СССР // Бюл. изобретений и открытий СССР. 1990. № 31. 23 авг. (совместно с Е. А. Годиным, С. А. Гришиным и др.).

Осесимметрична контактна задача для в’язкоупружної шаруватої основи, що нарощується системой кільцевих в плані штампів // XV наук. конф. мол. вчених : тез. доп. Київ, 1990. С. 29.

Контактные задачи дискретного наращивания неоднородных вязкоупругих тел системами жестких элементов // Проблемы контактного взаимодействия, трения и износа : тез. докл. Ростов н/Д, 1990. С. 75.

Осесимметричная контактная задача для вязкоупругого слоистого основания, наращиваемого системой кольцевых в плане штампов // Тр. XV науч. конф. молодых ученых Ин-та механики АН УССР : в 2 ч. Ч. 2. Киев, 1990. С. 266–272. Деп. в ВИНИТИ 10.07.90, № 3801–В90.

О кручении растущего цилиндра жестким штампом // Прикл. матем. и механика. 1990. Т. 54, вып. 5. С. 842–850.

Механика растущих неоднородных вязкоупругих тел, подверженных старению. Рукописный отчет Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1990. 21 с. (совместно с Н. Х. Арутюняном, В. Э. Наумовым, А. А. Шматковой).

Контактная задача для слоистого неоднородного стареющего цилиндра, подкрепленного жестким кольцом // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1990. № 6. С. 101–109 (совместно с В. А. Чернышом).

1991

Контактные задачи механики растущих тел. М., 1991. 176 с. (совместно с Н. Х. Арутюняном, В. Э. Наумовым).

Способ определения механических свойств биологических мягких тканей : а.с. 1644029 СССР // Бюл. изобретений и открытий СССР. 1991. № 15. 23 апр. (совместно с Е. А. Годиным, Ю. Н. Радаевым, Е. Ш. Штенгольдом).

О последовательном усилении неоднородных вязкоупругих цилиндрических тел системами жестких элементов. М., 1991. 56 с. Деп. в ВИНИТИ 11.07.91, № 2975-В91 (совместно с В. А. Чернышом).

Контактные задачи теории вязкоупругости наращиваемых тел // VII Всесоюз. съезд по теоретической и прикладной механике : аннотации докл. М., 1991. С. 239–240.

Контактная задача дискретного наращивания неоднородного вязкоупругого стареющего цилиндра системой жестких втулок // Прикл. матем. и механика. 1991. Т. 55, вып. 6. С. 1018–1025 (совместно с В. А. Чернышом).

1992

Экспериментальные исследования и математическое моделирование циклической долговечности деформируемых тел при одноосном напряженном состоянии : отчет Ин-та проблем механики РАН. М., 1992. 27 с. (совместно с В. Н. Кукуджановым, В. А. Пороховым).

Математическое моделирование вязкоупругого поведения деформируемых тел и экспериментальные исследования упругих и реологических характеристик конструкционных материалов : отчет Ин-та проблем механики РАН. М., 1992. 34 с. (совместно с В. А. Пороховым).

Задача об усилении заглубленной арочной конструкции методом наращивания // Изв. АН. МТТ. 1992. № 5. С. 25–37 (совместно с В. А. Чернышом).

Математическое моделирование и алгоритм расчета наращиваемых упругих и вязкоупругих тел с учетом процессов физического старения материалов : отчет Ин-та проблем механики РАН. М., 1992. 47 с. (совместно с Н. Х. Арутюняном).

1993

Изгиб балки переменной жесткости на линейно-деформируемом основании : отчет Ин-та проблем механики РАН. М., 1993. 31 с. (совместно с В. М. Александровым, А. А. Шматковой).

Контактные задачи теории вязкоупругости наращиваемых тел : автореф. дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. М., 1993. 30 с.

Контактные задачи теории вязкоупругости наращиваемых тел : дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. М., 1993. 377 с.

1995

Об одном методе решения общей безынерционной начально-краевой задачи для наращиваемого вязкоупругого тела // Современные проблемы механики сплошной среды : тез. докл. Ростов н/Д, 1995. С. 35.

Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // Прикл. матем. и механика. 1995. Т. 59, вып. 5. С. 836–848.

1996

О решении задач множественного контакта с учетом износа для деформируемых тел с тонкими покрытиями // IX конференция по прочности и пластичности : сб. аннотаций докл. Киев ; М., 1996. С. 72–73.

О зарастающей вертикальной полости в тяжелом полупространстве // Перспективы повышения надежности и качества наукоемкой продукции на основе новейших достижений приборостроения : тез. докл. М., 1996. С. 151 (совместно с Т. Ю. Рязановой).

1997

Метод модельных решений в теории линейных интегральных уравнений // Докл. АН. 1997. Т. 354, № 1. С. 30–34 (совместно с А. Д. Поляниным).

1998

Интегральные уравнения : учеб. пособие. М., 1998. 144 с. (совместно с А. Д. Поляниным).

Справочник по интегральным уравнениям. Точные решения. М., 1998. 432 с. (совместно с А. Д. Поляниным).

Handbook of Integral Equations. Boca Raton; N. Y. : CRC Press, 1998. 816 p. (совместно с А. Д. Поляниным).

1999

Handbuch der Integralgleichungen: Exakte Lösungen. Heidelberg : Spektrum Akademischer Verlag, 1999. 608 p. (совместно с А. Д. Поляниным).

Методы решения интегральных уравнений : Справочник. М., 1999. 272 с. (совместно с А. Д. Поляниным).

Контактные задачи теории ползучести. Ереван, 1999. 320 с. (совместно с Н. Х. Арутюняном).

2000

Справочник по интегральным уравнениям : Методы решения. М., 2000. 384 с. (совместно с А. Д. Поляниным).

Износ шероховатого слоя системой штампов: плоская задача // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 91–92.

2001

Плоская задача для растущего тела // Современные проблемы механики сплошной среды : тр. VI междунар. конф. : в 2 т. Т. 2. Ростов н/Д, 2001. С. 106–109 (совместно с М. Н. Михиным).

Метод решения интегральных уравнений контактных задач для тел со сложными свойствами и формой поверхности // Восьмой Всерос. съезд по теоретической и прикладной механике : аннотации докл. Екатеринбург, 2001. С. 417.

Контактные задачи для неоднородных стареющих вязкоупругих тел // Механика контактных взаимодействий / под ред. И. И. Воровича и В. М. Александрова. М., 2001. С. 565.

Контактные задачи механики наращиваемых тел // Механика контактных взаимодействий / под ред. И. И. Воровича и В. М. Александрова. М. : Физматлит, 2001. С. 621.

2002

Contact problem for solids with coatings: projection approach // Contact Mechanics of Coated Bodies. EUROMECH Colloquium 434. M., 2002. P. 46.

К 90-летию Н. Х. Арутюняна // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. 2002. № 4(26). С. 39–58 (совместно с Ю. Н. Радаевым).

2003

Справочник по интегральным уравнениям. М., 2003. 608 с. (совместно с А. Д. Поляниным).

Нагуш Хачатурович Арутюнян. К 90-летию со дня рождения // Проблемы механики деформируемых тел. Ереван, 2003. С. 6–27 (совместно с Ю. Н. Радаевым).

О кручении наращиваемого эллиптического бруса // Проблемы механики деформируемых тел. Ереван, 2003. С. 216–224 (совместно с М. Н. Михиным).

Износ поверхностно неоднородного шероховатого упругого слоя кольцевым штампом // Тр. III Всерос. конф. по теории упругости с междунар. участием. Ростов н/Д, 2004. С. 260–264.

2004

Методы теории функций комплексного переменного в механике растущих тел // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. 2004. № 4(34). С. 82–98 (совместно с М. Н. Михиным).

2005

Смешанные интегральные уравнения контактной механики и трибологии // Смешанные задачи механики деформируемого тела : тез. докл. V Рос. конф. с междунар. участием. Саратов, 2005. С. 103.

Смешанные интегральные уравнения контактной механики и трибологии // Смешанные задачи механики деформируемого тела : тр. V Рос. конф. с междунар. участием. Саратов, 2005. С. 222–226.

О кручении растущих тел // Современные проблемы механики сплошной среды : тр. IX Международ. конф., посвящ. 85-летию со дня рожд. акад. РАН И. И. Воровича. Ростов н/Д, 2005. С. 131–136 (совместно с М. Н. Михиным).

Формирование гравитирующих тел в процессе аккреции // Внутреннее ядро земли. Геофизическая информация о процессах в ядре : тез. докл. М., 2005. URL: http://innercore.ru/2005/abstracts/551126797963.html (дата обращения: 10.09.2017) (совместно с Д. А. Паршиным).

Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие. М., 2005. 82 с. (совместно с М. Н. Михиным).

2006

Наращивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 66–83 (совместно с Д. А. Паршиным).

Плоские и осесимметричные контактные задачи для вязкоупругих стареющих тел с поверхностно неоднородными покрытиями // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию со дня рожд. Е. И. Шемякина. М., 2006. С. 411–422 (совместно с К. Е. Казаковым).

О приложениях механики растущих тел в механике композитов // Ракетно-космическая техника : фундаментальные и прикладные проблемы механики : тез. докл. М., 2006. С. 57.

Наращивание деформируемых тел под действием массовых сил // XI Всерос. съезд по теоретической и прикладной механике : аннотации докл. : в 3 т. Т. III. Н. Новгород, 2006. С. 142.

Моделирование процессов наращивания цилиндрических тел на вращающейся оправке с учетом действия центробежных сил // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 149–166 (совместно с Д. А. Паршиным).

Wear of elastic foundations with inhomogeneous coatings // 35th Solid Mechanics Conference. Volume of Abstracts. Warsaw, 2006. P. 279–280 (совместно с К. Е. Казаковым, И. Федотовым).

Contact problems for covered solids with real surface shape // Proceedings. Indo-Russian workshop on Problems in Nonlinear Mechanics of Solids with Large Deformation. New Delhi, 2006. P. 63–70 (совместно с К. Е. Казаковым).

Accretion of solids under mass forces // Proc. Indo-Russian workshop on Problems in Nonlinear Mechanics of Solids with Large Deformation. New Delhi, 2006. P. 71–79 (совместно с Д. А. Паршиным).

2007

Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Boca Raton ; L., 2006. 1544 p. (совместно с А. Д. Поляниным).

Износ вязкоупругого основания с неоднородным покрытием // Актуальные проблемы трибологии : сб. тр. междунар. науч.-техн. конф. : в 2 т. Т. 1. М., 2007. С. 338–351 (совместно с К. Е. Казаковым).

Моделирование процесса деформирования наращиваемых конических тел // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. 2007. № 4(54). С. 290–303 (совместно с Д. А. Паршиным).

Механика наращиваемых тел : состояние, проблемы, перспективы // Актуальные проблемы механики сплошной среды : тр. междунар. конф., посвящ. 95-летию акад. НАН Армении Н. Х. Арутюняна. Ереван, 2007. С. 243–246.

Некоторые задачи кручения растущих тел // Актуальные проблемы механики сплошной среды : тр. междунар. конф., посвящ. 95-летию акад. НАН Армении Н. Х. Арутюняна. Ереван, 2007. С. 247–251 (совместно с М. Н. Михиным, С. В. Юбером).

Моделирование процессов формирования, взаимодействия, деформирования и разрушения упруго-вязкопластических тел под действием нагрузок и физических полей // Аннотационный отчет ИПМех РАН. М., 2007 (совместно с В. М. Александровым, В. Н. Кукуджановым и др.).

2008

Handbook of Integral Equations. Second Edition. Boca Raton ; L., 2007. 1143 p. (совместно с А. Д. Поляниным).

Смежные задачи механики наращиваемых тел и геомеханики // Неклассические задачи геомеханики : тр. Всерос. объединенной науч. сессии Научных советов РАН по механике деформируемого твердого тела и по проблемам горных наук. Якутск, 2008. С. 107–114 (совместно с Д. А. Паршиным).

О конформном контакте слоистых оснований и штампов // Изв РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 227–240 (совместно с К. Е. Казаковым).

Mechanics of accreted solids with applications to technological and natural processes // XXXVI Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics» : Book of Abstracts. St. Petersburg, 2008. P. 49–50.

Conformal contact between a punch and a layer with thin coating // IPPT – IFTR Reports. 2008. Vol. 2. P. 248–249 (совместно с К. Е. Казаковым).

Raising of a semi-circular vault // IPPT – IFTR Reports. 2008. Vol. 2. P. 358–359 (совместно с Д. А. Паршиным).

Mathematical theory of accreted solids and its applications // XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Abstract Book / eds. J. Denier, M. D. Finn, T. Mattner. Adelaide, 2008. P. 271.

Mathematical theory of accreted solids and its applications // XXII Intern. Congr. of Theoret. and Applied Mechanics. CD-ROM Proceedings. Adelaide, 2008.

Conformal contact between foundations and punches // Topical Problems in Solid Mechanics. New Delhi, 2008. P. 92–104 (совместно с К. Е. Казаковым).

Erection of a heavy semicircular arch structure // Topical Problems in Solid Mechanics. New Delhi, 2008. P. 245–265 (совместно с Д. А. Паршиным).

О новых результатах в классических проблемах гео- и горных наук // Современные проблемы механики сплошной среды : тр. XII междунар. конф. : в 2 т. Т. 1. Ростов н/Д, 2008. С. 145–149 (совместно с Д. А. Паршиным).

2009

Итоги XXII Международного конгресса по теоретической и прикладной механике // Прикл. матем. и механика. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 150–155 (совместно с Ф. Л. Черноусько и И. В. Симоновым).

Основы механики наращиваемых тел // III сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела : тез. докл. Всерос. конф. / под ред. проф. Л. Ю. Коссовича. Саратов, 2009. С. 29.

The wear contact problem for an elastic foundation with an inhomogeneous coating // Proc. World Tribology Congress 2009. Kyoto, 2009. P. 157.

Механика наращиваемых тел : новый подход // Современные проблемы механики сплошной среды : тез. докл. XIII междунар. конф. Ростов н/Д, 2009. С. 5–6.

Механика наращиваемых тел : новый подход // Современные проблемы механики сплошной среды : тр. XIII междунар. конф. : в 2 т. Т. 1. Ростов н/Д, 2009. С. 142–147.

Проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений механики и его приложения к контактным задачам для тел с покрытиями // Актуальные проблемы механики : механика деформируемого твердого тела : сб. тр. / под ред. Р. В. Гольдштейна. М., 2009. С. 238–263 (совместно с К. Е. Казаковым).

Возведение тяжелого полуциркульного свода // Актуальные проблемы механики : механика деформируемого твердого тела : сб. тр. / под ред. Р. В. Гольдштейна. М., 2009. С. 382–421 (совместно с Д. А. Паршиным).

2010

Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // Современные проблемы механики сплошной среды : тез. докл. XIV междунар. конф. Ростов н/Д, 2010. С. 61.

Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // Современные проблемы механики сплошной среды : тр. XIV междунар. конф. : в 2 т. Т. 2. Ростов н/Д, 2010. С. 215–219.

Основы математической теории растущих тел // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике : тез. докл. междунар. конф., посвящ. 110-летию акад. М. А. Лаврентьева. Новосибирск, 2010. С. 130–131.

Смешанные интегральные уравнения и их приложения // Математическая физика и ее приложения : материалы междунар. конф. / под ред. чл.-корр. РАН И. В. Воловича и д-ра физ.-мат. наук, проф. Ю. Н. Радаева. Самара, 2010. С. 209–214.

Problems of contact interaction between coated solids and punches with bases of complicated shape // Book of Abstracts of the 37th Solid Mechanics Conference. Warsaw, 2010. P. 54–55 (совместно с К. Е. Казаковым).

New results in mechanics of growing solids // Актуальные проблемы механики сплошной среды : тр. II междунар. конф. : в 2 т. Т. 2. Ереван, 2010. С. 311–315.

Контактная задача с износом для упругого основания с неоднородным покрытием // Трибофатика (Tribo-fatigue) : тр. VI междунар. симп. по трибофатике МСТФ 2010 : в 2 ч. Ч. 1 / редкол. : М. А. Журавков (председатель) [и др.]. Минск, 2010. С. 325–331 (совместно с К. Е. Казаковым).

Задача множественного контакта с износом для слоя с неоднородным покрытием // Трибология и надежность : сб. науч. тр. X междунар. конф. / ред. проф. К. Н. Войнов. СПб., 2010. С. 98–99 (совместно с К. Е. Казаковым).

Исследование процессов изготовления, деформирования, контактного взаимодействия и разрушения неоднородных упруговязкопластических тел и тел со сложной структурой при механических нагрузках, воздействии физических полей и активных сред. Аннотационный отчет ИПМех РАН. М., 2010 (совместно с В. М. Александровым, В. Н. Кукуджановым и др.).

2011

Интегральные уравнения с быстро осциллирующими функциями и их приложения в механике контактных взаимодействий // V сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела : тез. докл. Всерос. конф. Астрахань, 2011.

Математическая теория растущих тел : уравнения, задачи, приложения // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 1603–1605.

Задача теплопроводности для растущего шара // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 139–148 (совместно с С. И. Кузнецовым и И. Федотовым).

2012

Развитие идей Н. Х. Арутюняна в современной механике // Актуальные проблемы механики сплошной среды : тр. междунар. конф., посвящ. 100-летию акад. НАН Армении Н. Х. Арутюняна : в 2 т. Т. 2. Ереван, 2012. С. 5–13.

On the resonance oscillation of longitudinally vibrating growing rod // Актуальные проблемы механики сплошной среды : тр. междунар. конф., посвящ. 100-летию акад.

НАН Армении Н. Х. Арутюняна : в 2 т. Т. 2. Ереван, 2012. С. 255–259 (совместно с И. Федотовым, М. Шаталовым).

Mathematical models of continuous growth // 8th European Solid Mechanics Conference. Graz, Austria, July, 2012. P. 1–2 (CD).

Краевые задачи наращивания трехмерных тел двумерными поверхностями // VI Сессия Научного совета РАН по механике : материалы Всерос. конф. Барнаул, 2012. С. 15–16.

Advances in mechanics of growing solids // Abstract Books of 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. ICTAM 2012. Beijing, 2012. P. 300–301.

Системы смешанных интегральных уравнений в проблеме множественного конформного контакта // Современные проблемы механики : тез. докл. междунар. конф., посвящ. 100-летию Л. А. Галина. М., 2012. С. 53–54.

Системы смешанных интегральных уравнений с быстро осциллирующими функциями в исходных данных // Современные проблемы механики сплошной среды : тез. докл. XVI междунар. конф. Ростов н/Д, 2012. С. 66–67.

Системы смешанных интегральных уравнений с быстро осциллирующими функциями в исходных данных // Современные проблемы механики сплошной среды : тез. докл. XVI междунар. конф. Ростов н/Д, 2012. С. 158–162.

О согласованном контакте штампов и тел с покрытиями, имеющих сложный профиль поверхности // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 42–48 (совместно с С. П. Курдиной, С. Кухарским).

On the resonant behaviour of longitudinally vibrating accreting rods // 8th South African Conference on Computational and Applied Mechanics (SACAM2012). Johannesburg, South Africa, 2012. P. 44–47 (совместно с И. Федотовым, М. Шаталовым).

2013

Особенности расчета деталей машин и элементов конструкций с учетом технологических процессов их изготовления // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий : сб. ст. по материалам междунар. науч.-практ. конф. : в 2 ч. Ч. 1. Механика деформируемого твердого тела / под ред. Б. Г. Миронова. Чебоксары, 2013. С. 178–180.

Интегральные уравнения смешанного типа: теория и приложения в механике и трибологии // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений : тез. докл. междунар. науч. конф. Одесса, 2013. С. 86–87.

Системы смешанных интегральных уравнений в проблеме множественного конформного контакта // Развитие идей Л. А. Галина в механике. М. ; Ижевск, 2013. С. 280–305 (совместно с К. Е. Казаковым, С. Кухарским).

Multi-body contact problem for a nonhomogeneous elastic coated foundation with wear // 5th World Tribology Congress 2013 (WTC 2013). Torino, Italy, 2013. Vol. 1–4. P. 2390.

Brayn's effect and isotropic nonlinear damping // Journal of Sound and Vibration. 2013. Vol. 332, № 23. P. 6169–6176 (совместно с С. В. Юбером, М. И. Федотовым).

Mechanics of growing solids and phase transitions // Key Engineering Materials. 2013. Vol. 535–536. P. 89–93.

О теоретических и экспериментальных исследованиях в области механики растущих тел, проводимых в Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН // Тез. докл. VII Всерос. (с междунар. участием) конф. по механике деформируемого твердого тела. Ростов н/Д, 2013. С. 107.

Conformal contact between a system of punches and a covered foundation taking into account the actual shape of their surfaces // Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics. New Delhi, 2013. P. 128–147 (совместно с К. Е. Казаковым, С. Кухарским).

Mixed-field extended Kantorovich method for accurate prediction of boundary layer stresses in composite and piezolaminated structures // Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics. New Delhi, 2013. P. 268–278 (совместно с П. Кумари, С. Капурия, Н. К. Гуптой).

2014

Обобщенная проекционная задача теории смешанных интегральных уравнений и ее приложения в механике // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций : сб. материалов III Всерос. конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. акад. Ю. Н. Работнова. Новосибирск, 2014. С. 63–64.

Контактные задачи для оснований с произвольно неоднородными покрытиями и сложной формой поверхности // Материалы VIII Всерос. конф. по механике деформируемого твердого тела : в 2 ч. Ч. 2 / под ред. Н.Ф. Морозова, Б. Г. Миронова, А. В. Манжирова. Чебоксары, 2014. С. 33–35.

Осесимметричная задача множественного конформного контакта для оснований с поверхностно неоднородными покрытиями // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред : тр. VIII междунар. конф. Ереван, 2014. С. 281–285 (совместно с К. Е. Казаковым, Н. К. Гуптой).

Mechanics of growing solids: New track in mechanical engineering // Proceedings of ASME 2014 International Mechanical Engi-neering Congress & Exposition, IMECE2014. Montreal, Canada, 2014. IMECE 2014-36712 (compact disc). 10 p.

Контактные задачи для оснований с произвольно неоднородными покрытиями // Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2014. № 3(21). С. 1–13.

2015

Fundamentals of continuous growth processes in technology and nature // Materials of the IUTAM Symposium on Growing Solids. M., 2015. P. 73–76 (совместно с Н. К. Гуптой).

Multibody Contact Problems for Discretely Growing Systems // Materials of the IUTAM Symposium on Growing Solids. M., 2015. P. 39–42 (совместно с К. Казаковым, С. Курдиной).

Transient temperature fields in growing bodies subject to discrete and continuous growth regimes // Materials of the IUTAM Symposium on Growing Solids. M., 2015. P. 68–71 (совместно с С. Лычевым, М. Шаталовым, И. Федотовым).

An approach to modeling of additive manufacturing technologies // Transactions on Engineering Technologies : The World Congress on Engineering 2014. Netherlands, Springer, 2015. P. 99–115 (совместно с С. А. Лычевым).

Discrete and continuous growth of deformable cylinder // Transactions on Engineering Technologies : The World Congress on Engineering 2014. Netherlands, 2015. P. 239–254 (совместно с С. А. Лычевым).

Mixed integral equations and their applications to contact mechanics and tribology // 9th European Solid Mechanics Conference. Madrid, 2015. 2 p.

Mechanical Design of Viscoelastic Parts Fabricated Using Additive Manufacturing Technologies // Lecture Notes in Engineering and Computer Science : Proc. World Congress on Engineering 2015. L., 2015. Vol. II. P. 710–714.

Интегральные уравнения смешанного типа и их системы в механике контактного взаимодействия и трибологии // Тр. XI Всерос. съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 2015. С. 2458–2460.

Возведение тяжелой конструкции из стареющего вязкоупругого материала с использованием аддитивной технологии // Механика предельного состояния и смежные вопросы : материалы Всерос. науч. шк.-конф., посвящ. 85-летию проф. Д. Д. Ивлева : в 2 ч. Ч. 1. Чебоксары, 2015. С. 1217 (совместно с Д. А. Паршиным).

Problems of growing solids mechanics in modern industrial technologies // Proc. IV International Conference on Topical Problems of Continuum Mechanics. Erevan, 2015. P. 47–475.

Возведение арочной конструкции с использованием аддитивной технологии под действием силы тяжести // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 5. С. 94–107 (совместно с Д. А. Паршиным).

Влияние режима возведения на напряженное состояние вязко-упругой арочной конструкции, возводимой с использованием аддитивной технологии под действием силы тяжести // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 6. С. 69—91 (совместно с Д. А. Паршиным).

2016

Управление кренами объектов на несущих фундаментах // Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование : сб. докл. V междунар. конф. М., 2016. С. 192–194 (совместно с К. Е. Казаковым).

Моделирование центрально-симметричного поверхностного роста неоднородного упругого шарового тела в поле сил центрального притяжения // Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование : сб. докл. V междунар. конф. М., 2016. С. 202–204 (совместно с Д. А. Паршиным).

Смешанное интегральное уравнение механики и обобщенный проекционный метод его решения // Докл. АН. 2016. Т. 470, № 4. С. 401–405.

Моделирование силовой намотки вращающегося осесимметричного вязкоупругого слоя // Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование : сб. докл. V междунар. конф. М., 2016. С. 205–207 (совместно с Д. А. Паршиным).

A Method for Mechanical Design of AM Fabricated Viscoelastic Parts // Transactions on Engineering Technologies / eds. S. Ao, GC. Yang, L. Gelman. Singapore, 2016. P. 223–235.

Моделирование аддитивных технологий : геометрический подход // Аддитивные технологии : настоящее и будущее : сб. докл. II междунар. конф. М., 2016. С. 18 (совместно с С. А. Лычевым, Е. В. Мурашкиным).

Морфофизиология роста биологических тканей // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете : тез. докл. XI Всерос. шк.-семинара. Ростов н/Д, 2016 С. 82 (совместно с Н.Э. Стадником).

Integral Equations with Several Different Operators and Their Application to Mechanics // Lecture Notes in Engineering and Computer Science : Proc. World Congress on Engineering 2016. L., 2016. Vol. 2224, № 1. P. 10–15.

Contact Problem for a Foundation with a Rough Coating // Lecture Notes in Engineering and Computer Science : Proc. World Congress on Engineering 2016. L., 2016. Vol. 2224, № 1. P. 877–882 (совместно с К. Е. Казаковым).

Accretion of Spherical Viscoelastic Objects under Self-Gravitation // Lecture Notes in Engineering and Computer Science : Proc. World Congress on Engineering 2016. L., 2016. Vol. 2224, № 1. P. 1131–1136 (совместно с Д. А. Паршиным).

Fundamentals of surface growth of solids in nature and technology // Proc. XXIV ICTAM. Montreal, Canada, 2016. TS.SM08-5.03.

Fundamentals of the theory of surface growth with applications to geomechanics and AM technologies // Book of Abstract. 40th Solid Mechanics Conference. SolMech-2016. Warsaw, Poland, 2016. P021.

Об общих подходах и методах механики наращиваемых упругих и вязкоупругих тел и ее возможных приложениях // IX Всерос. конф. по механике деформируемого твердого тела : сб. тр. Воронеж, 2016. С. 31–33 (совместно с Д. А. Паршиным).

Контактные задачи для поверхностно модифицированных материалов // Механика 2016 : тр. междунар. шк.-конф. молодых ученых. Ереван, 2016. С. 95–99 (совместно с К. Е. Казаковым).

Контактные задачи для тел с покрытиями : истоки, достижения, проблемы // Современные проблемы механики сплошной среды : тр. XVIII междунар. конф. : в 2 т. Т. 2. Ростов н/Д, 2016. С. 92–96.

Контактные задачи для тел с покрытиями : истоки, достижения, проблемы // Современные проблемы механики сплошной среды : тез. докл. XVIII междунар. конф. Ростов н/Д, 2016. С. 120.

Множественный контакт тел с покрытиями с учетом износа // Механика и трибология транспортных систем : сб. докл. междунар. науч. конф. : в 2 т. Т. 2. Ростов н/Д, 2016. С. 64–68 (совместно с К. Е. Казаковым)

Применение преднапряженных конструктивных элементов при возведении тяжелой вязкоупругой арочной конструкции с использованием аддитивной технологии // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 6. С. 93–104 (совместно с Д. А. Паршиным).

Fundamentals of Mechanical Design and Analysis for AM Fabricated Parts // Procedia Manufacturing. 2016. Vol. 7. P. 59–65.

2017

Интегральные уравнения : справочник для вузов : в 2 ч. Ч. 1. 2-е изд., испр. и доп. М., 2017. 369 с. (совместно с А. Д. Поляниным).

Интегральные уравнения : справочник для вузов : в 2 ч. Ч. 2. 2-е изд., испр. и доп. М., 2017. 238 с. (совместно с А. Д. Поляниным).

Mechanical Design of AM Fabricated Prismatic Rods under Torsion // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12002.

Axisymmetric contact problem for a rigid punch and a coated foundation with rough surfaces // Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling : Books of Abstracts of the 6th Intern. Conf. / ed. by M. B. Kachanov. M., 2017. P. 147–149 (совместно с К. Е. Казаковым).

Axisymmetric contact problem for a rigid punch and a coated foundation with rough surfaces // Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling : Books of Abstracts of the 6th Intern. Conf. / ed. by M. B. Kachanov. M., 2017. P. 159–162 (совместно с Д. А. Паршиным).

Advances in the Theory of Surface Growth with Applications to Additive Manufacturing Technologies // Procedia Engineering. 2017. Vol. 173. P. 11–16.

Математическая модель роста кровеносных сосудов // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете : тез. докл. XII Всерос. шк.-семинара. Ростов н/Д, 2017. С. 89 (совместно с Н. Э. Стадником).

Mechanical Analysis of an AM Fabricated Viscoelastic Shaft under Torsion by Rigid Disks // Lecture Notes in Engineering and Computer Science : Proc. World Congress on Engineering 2017. Vol. II. L., 2017. P. 856–860.

Additive Manufacturing of Conical Viscoelastic Parts under Axial Tension-Compression // Lecture Notes in Engineering and Computer Science : Proc. World Congress on Engineering 2017. L., 2017. Vol. II. P. 934–939 (совместно с Д. А. Паршиным).

The Interaction between a Coated Foundation and a Rigid Punch with Rough Surfaces // Lecture Notes in Engineering and Computer Science : Proc. World Congress on Engineering 2017. L., 2017. Vol. II. P. 993–996 (совместно с К. Е. Казаковым).

Contact interaction between surface nonuniform bases and regular systems of rigid punches // Procedia IUTAM. 2017. Vol. 23. P. 201–209 (совместно с К. Е. Казаковым, С. П. Курдиной)

Transient temperature fields in growing bodies subject to discrete and continuous growth regimes // Procedia IUTAM. 2017. Vol. 23. P. 120–129 (совместно с С. А. Лычевым, М. Ю. Шаталовым, И. А. Федотовым).

Fundamentals of continuous growth processes in technology and nature // Procedia IUTAM. 2017. Vol. 23. P. 1–12 (совместно с Н. К. Гупта).

Контактная задача с износом для основания с поверхностно неоднородным покрытием // Докл. АН. 2017. Т. 475, № 1. С. 39–44 (совместно с К. Е. Казаковым).

Mixed integral equations and their application to mechanics // IAENG Transactions on Engineering Sciences / eds. S. Ao, A. H. Chan, H. Katagiri. Singapore, 2017. P. 8–21.

Образец для цитирования:

Коссович Л. Ю., Радаев Ю. Н. Профессор Александр Владимирович Манжиров (к 60-летию со дня рождения) // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 465–483. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-465-483.

Cite this article as:

Kossovich L. Yu., Radaev Yu. N. Professor Alexander Vladimirovich Manzhirov (on his 60th birthday). *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 465–483. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-465-483.

ПОДПИСКА

Подписка на II полугодие 2018 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Цена свободная

Оформить подписку онлайн можно в Интернет-каталоге «Пресса по подписке» (www.akc.ru)

Адрес издательства:
410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89
Факс: +7(845-2) 27-85-29
E-mail: izvestiya@sgu.ru

Адрес редколлегии серии:
410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет
Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54
E-mail: mmi@sgu.ru
Website: http://mmi.sgu.ru/