УДК 519.68

ЭМПИРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАБОТЫ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕПЛИКАЦИИ ИНДЕКСА

А. Р. Файзлиев, А. А. Хомченко, С. П. Сидоров

Файзлиев Алексей Раисович, кандидат экономических наук, инженер, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, faizlievar1983@mail.ru
Хомченко Андрей Анатольевич, инженер, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, aahomchenko@gmail.com
Сидоров Сергей Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории функций и стохастического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, SidorovSP@info.sgu.ru

Стратегия слежения за индексом (репликация индекса) — это пассивная финансовая стратегия, которая состоит в имитации (репликации) доходности заданного индекса или портфеля. Цель инвестора — найти веса активов в своем портфеле, чтобы получившийся портфель имел минимальную ошибку слежения, в качестве которой обычно используют дисперсию разности между доходностью индекса и доходностью портфеля. В данной работе решение проблемы слежения за индексом рассматривается с ограничением на кардинальность, т. е. с ограничением на максимальное количество активов, удерживаемых в портфеле. Задача слежения за индексом с ограничением на кардинальность является задачей неполиномиальной сложности и, как правило, требует разработки эвристических алгоритмов. В статье рассматриваются различные алгоритмы решения данной задачи в норме l_2, в частности, жадный алгоритм, алгоритм дифференциальной эволюции и алгоритм типа LASSO. Для проведения эмпирического анализа были использованы открытые данные, относящиеся к трем основным рыночным индексам — Hang Seng (Гонконг), S&P 100 (США) и Nikkei 225 (Япония). Для сравнительного анализа жадного алгоритма с алгоритмом типа LASSO и с алгоритмом дифференциальной эволюции была использована процедура скользящего временного окна. При этом сравнение подходов происходило как по внутривыборочным, так и по вневыборочным данным.

Ключевые слова: слежение за индексом, оптимизация портфеля, жадные алгоритмы, регрессии типа LASSO, алгоритм дифференциальной эволюции.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-101-124

ВВЕДЕНИЕ

В1. Постановка задачи и обозначения

В 1951 году Генри Марковиц заложил фундамент современной портфельной теории на основе применения простых математических идей по проблеме разработки оптимальных инвестиционных портфелей [1]. Однобокое стремление к высокой доходности является плохой стратегией, утверждал Марковиц. Вместо этого рациональные инвесторы должны сбалансировать стремление к высокой доходности с желанием получить низкий риск, который определяется как волатильность доходности.

Для $q > 0$ и $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ положим $\|x\|_q := (\sum_{i=1}^n |x_i|^q)^{1/q}$ и $\|x\|_0 = \lim_{q\to 0+} \|x\|_q =$ (число ненулевых элементов вектора x). Если $q \geqslant 1$, то $\|x\|_q$ означает l_q-норму вектора $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть n есть общее число инвестиционных активов. Обозначим r_{ti} – доходность актива i в момент t, $R = (r_{ti})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant t \leqslant m$. Портфель определяется как вектор весов активов, $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Пусть I_t есть доходность индекса в момент времени t, $1 \leqslant t \leqslant m$, и $I = (I_1, \dots, I_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Мы будем полагать, что портфель нельзя изменять в течение инвестиционного периода, и транзакционные издержки отсутствуют. Мы будем считать, что

1) короткие продажи допустимы, т. е. веса x_i могут быть отрицательными;

2) инвестор имеет одну единицу капитала, т. е. $x^T 1_n = 1$, где 1_n означает вектор из $\mathbb{R}^n$, в котором каждый компонент равен 1.

В традиционной задаче слежения за индексом цель состоит в нахождении портфеля, который имеет минимальное значение дисперсии ошибки слежения, т. е. суммы квадратов отклонений между доходностями портфеля и рыночным индексом [2]:

$$x^* = \arg\min \frac{1}{m}\|I - Rx\|_2^2 \quad \text{при условии } x^T 1_n = 1. \tag{1}$$

Следует отметить, что стандартная модель Марковица есть частный случай задачи слежения за индексом (1) (см., например [3, 4]). Так как задача (1) есть задача выпуклой оптимизации, ее решение может быть легко получено методом Лагранжа. С другой стороны, задача слежения за индексом (1) есть разновидность многомерной регрессии с дополнительными ограничениями. Однако, как оказалось, перевести решение этой задачи в удовлетворительный алгоритм выбора портфеля в контексте реального мира — это совсем нетривиальная задача.

В работах [5–7] в качестве меры ошибки слежения за индексом использовалась ошибка в норме l_1, т. е. сумма абсолютных отклонений доходностей индекса и портфеля.

Полученное аналитическое решение задачи слежения за индексом (1) зачатую непригодно для практиков-инвесторов по следующим причинам:

1) получающееся оптимальное решение содержит слишком много ненулевых весов, и таким образом, число активов в портфеле слишком велико для управления;

2) не учитываются транзакционные издержки;

3) короткие продажи невозможны.

Более того, при практическом использовании различных реализаций вычислительных методов решения задачи слежения за индексом (1) возникает множество проблем. В частности, в исследовании [8] было рассмотрено несколько алгоритмов построения портфеля, основанных на идеях Марковица. Авторы обнаружили, что, используя разумный объем обучающих данных, ни один из исследуемых алгоритмов не смог существенно опередить тривиальную стратегию, в которой каждый актив имеет равный вес в портфеле. Эти разочаровывающие результаты работы алгоритмов, вероятно, обусловлены, по крайней мере частично, структурой первоначально предложенной оптимизационной модели Марковица. Так, оптимизация на основе схемы Марковица является эмпирически неустойчивой: малые изменения доходностей активов, волатильности доходностей активов или их корреляций может оказывать большое влияние на результат процедуры оптимизации. В этом смысле классическая задача Марковица оптимизации портфеля может рассматриваться как некорректная обратная задача. Такие задачи часто встречаются во многих других областях. Различные методы регуляризации были предложены с целью уменьшить нестабильность работы алгоритмов [9].

Прежде всего приведем короткий обзор подходов к решению задачи слежения за индексом (1), позволяющим избежать эти проблемы. Для получения значимых результатов, устойчивых для такого рода некорректных задач, используют, как правило, процедуру регуляризации. Один из стандартных подходов состоит в том, чтобы добавить в целевую функцию штрафное слагаемое, которое может принимать различные формы и в идеале должно иметь содержательную интерпретацию в терминах данной задачи.

B2. l_1-Регуляризация

В статье [4] предлагается добавить так называемый l_1-штраф к исходной целевой функции. Таким образом, необходимо найти вектор портфельных весов x, который является решением следующей задачи:

$$x^* = \arg\min \|I - Rx\|_2^2 + \tau\|x\|_1 \quad \text{при условии} \quad x^T 1_n = 1. \tag{2}$$

В [4] отмечается, что добавление штрафа в норме l_1 в целевой функции (1) приводит к нескольким полезным последствиям.

Во первых, штраф в норме l_1 делает возможным учет транзакционных издержек естественным образом. Реальные инвесторы в дополнение к задаче выбора ценных бумаг, которыми они торгуют, должны также заботиться о размере транзакционных издержек, которые они понесут при открытии и закрытии позиции по активам. Затраты по сделке на ликвидном рынке обычно состоят из двух компонент: первая есть фиксированные «накладные расходы», не зависящие от размера сделки, а вторая получается путем умножения на количество сделок и будет пропорциональна размеру транзакции. Для крупных инвесторов накладными расходами можно пренебречь. Тогда общие транзакционные издержки есть сумма произведений абсолютных значений весов на спреды. Мы предполагаем, что спреды являются одинаковыми для всех активов и постоянны для широкого диапазона размеров транзакций. В этом случае стоимость транзакции эффективно описывается штрафом в l_1.

Во-вторых, это способствует получению так называемых разреженных решений (sparse, sparsity). Тот факт, что минимизация нормы в l_1 может иметь такой эффект, хорошо известен в математической статистике [10]. Методы с минимизацией целевых функций с штрафом в l_1 в настоящее время широко используются тогда, когда желают получить разреженные решения. Разреженность играет важную роль при построении инвестиционных портфелей. Действительно, инвесторы часто хотят, чтобы число позиций, которые они должны создать, контролировать и ликвидировать, было ограничено. Добиться именно такого эффекта можно, увеличивая значения параметра τ в (2).

В-третьих, штраф в норме l_1 регулирует количество коротких позиций в портфеле, полученном в процессе оптимизации. Из-за ограничения $x^T 1_n = 1$ эквивалентная форма целевой функции задачи (2) будет иметь вид

$$\|I - Rx\|_2^2 + 2\tau \sum_{x_i<0} |x_i| + \tau, \tag{3}$$

в которой последнее слагаемое, конечно, не имеет влияния на результат оптимизации. При бюджетном ограничении $x^T 1_n = 1$, таким образом, штраф в l_1 эквивалентен штрафу на число коротких позиций. Оптимальный портфель без коротких позиций, полученный путем минимизации целевой функции (1) с двумя ограничениями, — не только $x^T 1_n = 1$, но также и дополнительное ограничение $x_i \geqslant 0$ для $i = 1, \ldots, n$, является в самом деле оптимальным портфелем задачи (3), полученным в пределе для очень больших значений τ. Вполне естественно, что при больших τ вектор положительных весов должен быть достаточно разреженным; разреженность оптимальных портфелей без коротких позиций действительно наблюдается на практике. В работе [4] указано, что в литературе отмечается стабильность неотрицательных решений, но, кажется, совсем не замечена разреженность таких решений, что может быть связано, по-видимому, с использованием итерационных алгоритмов численной оптимизации, в которых применяется критерий останова прежде чем большинство весов сходились к нулю. При уменьшении τ в целевой функции с штрафом в l_1 ограничение на неотрицательность весов ослабляется, при этом оно не снимается полностью; мы по-прежнему предусматриваем штраф за чрезмерно большие отрицательные веса.

Наконец, как отмечается в работе [4], штраф в норме l_1 приводит к стабилизации решений задачи (2). При наложении штрафа на размер весов соответствующим образом мы уменьшаем чувствительность алгоритмов оптимизации к возможным коллинеарностям (т. е. сильным корелляциям) между активами. В работе [11] показано, что любой штраф в l_p при $1 \leqslant p \leqslant 2$ приводит к стабилизации задачи минимизации (1) посредством регуляризации обратной задачи. Стабильность, вызванная штрафом в норме l_1, является чрезвычайно важной; действительно, это делает возможным работать с ограниченными обучающими выборками данных, которые как раз и используются на практике и в эмпирических работах.

На практике реализовать оптимизационную стратегию для решения задачи (2) достаточно непросто. Сначала рассмотрим случай без ограничений, то есть задачу безусловной минимизации целевой функции задачи (2), а затем обсудим, как учитывать бюджетное ограничение.

Для решения (2) могут быть использованы различные алгоритмы. Особенно удобным является алгоритм на основе гомотопического метода [12, 13], также известный как метод наименьших углов, или LARS (Least Angle Regression) [14]. Этот алгоритм решает задачу минимизации целевой функции в (2) для различных диапазонов значений τ, начиная с очень больших значений и постепенно уменьшая τ, пока не будет достигнута желаемая величина. При изменении τ оптимальное решение $x(\tau)$ движется в пространстве $\mathbb{R}^n$ по кусочно-аффинной траектории. Таким образом, чтобы найти весь локус решений для $x(\tau)$, мы должны определить только критические точки (точки изменения наклона). Таким образом, достаточно найти только точки перегиба этой кусочно-линейной векторной функции. Как правило, число ненулевых активов в портфеле увеличивается с уменьшением τ.

Однако нас интересует проблема минимизации (2) при наличии бюджетного ограничения. В этом случае оригинальный алгоритм LARS не может быть применен. В работе [4] разработана модификация алгоритма LARS, адаптированная для решения произвольной задачи минимизации со штрафом в l_1 с линейными ограничениями, которая позволяет найти решение задачи

$$x^* = \arg\min_{x \in H} \|I - Rx\|_2^2 + \tau \|x\|_1, \tag{4}$$

где H есть аффинное подпространство, определяемое линейными ограничениями.

Адаптированный алгоритм также начинает работу с больших значений τ, которые затем постепенно уменьшаются, пока не будет достигнуто искомое значение. Траектория решений $x(\tau)$ при этом также будет кусочно-линейной. Из-за бюджетного ограничения начальное решение (при больших значениях τ) теперь сложнее получить (в случае задачи без ограничения оно просто равно нулевому вектору). Кроме того, должны быть введены дополнительные переменные (множителей Лагранжа), которые также кусочно-линейны по τ и которые должны пересчитываться при каждой останове.

Тем не менее при l_1-регуляризации возникает ряд проблем:

– параметр разреженности (количество активов в портфеле с нулевыми весами) явно не контролируется;

– для того чтобы получить сильно разреженный портфель, необходимо использовать большое значение параметра регуляризации τ, что приводит к (возможно) плохой точности репликации индекса, так как штраф в норме l_1 уменьшает в портфеле доли не только нерелевантных активов, но и релевантных активов [15].

B3. l_2-Регуляризация

Ряд эмпирических исследований показал, что l_2-регуляризация (т. е. добавление в целевую функцию штрафа в норме l_2), как правило, приводит к гладкости решения и, следовательно, хорошей работе на вневыборочных данных. l_2-регуляризация, или регуляризация Тихонова (в английской литературе — ridge regression), активно используется при нахождении приближённых решений некорректно поставленных операторных задач и был разработан А. Н. Тихоновым в 1965 г. в работе [16].

Рассмотрим следующую модель:

$$x^* = \arg\min \|I - Rx\|_2^2 + \tau\|x\|_2^2 \quad \text{при условии} \quad x^T 1_n = 1. \tag{5}$$

Слагаемое l_2-регуляризации играет очень важную роль в этой модели. Как уже отмечалось, в матрице данных R зачастую имеет место мультиколлинеарность. Действительно, в практических задачах R состоит из векторов исторических значений доходностей n активов, при этом имеется много пар активов с высокой степенью корреляции их доходностей. Когда R обладает такой мультиколлинеарностью, оценки наименьших квадратов, полученных для $\tau = 0$, обладают слишком большим стандартным отклонением. Добавление штрафа в норме l_2 (регуляризация) является одним из способов избежать такой проблемы.

Преимуществом такого подхода является возможность получить решение задачи (5) в явном аналитическом виде. Решение задачи (5) может быть найдено методом Лагранжа:

$$x^\tau = (R^T R + \tau E_n)^{-1}(R^T I - \lambda e_n), \tag{6}$$

где E_n есть единичная матрица размерности $(n \times n)$ и

$$\lambda = \frac{1_n^T (R^T R + \tau E_n)^{-1} R^T I - 1}{1_n^T (R^T R + \tau E_n)^{-1} 1_n}.$$

С другой стороны, одним из главных недостатков l_2-регуляризации является то, что получившееся решение будет содержать слишком много ненулевых весов. Поэтому часто накладывают в явном виде ограничение на количество активов в портфеле — так называемое ограничение на кардинальность.

B4. Ограничение на кардинальность (l_0-регуляризация)

Практикующие инвесторы часто сталкиваются с требованиями, которые ограничивают количество активов в их портфеле, например для того, чтобы улучшить его описание и для общения с потенциальными клиентами. Следовательно, хорошая модель слежения за индексом должна определять, сколько и какие активы должны быть в портфеле [17]. Один из наиболее распространенных подходов к решению проблемы слежения за индексом состоит в минимизации ошибки слежения с ограничением на максимальное количество активов, удерживаемых в портфеле.

Рассмотрим задачу минимизации (1) с ограничением на кардинальность:

$$x^* = \arg\min \frac{1}{m}\|I - Rx\|_2^2 \quad \text{при условиях} \quad x^T 1_n = 1, \quad \|x\|_0 \leqslant K, \tag{7}$$

где K есть ограничение на количество активов в портфеле с ненулевыми весами. Обычно предполагается, что K значительно меньше общего числа активов n, $K \ll n$.

Два хороших обзора литературы по основным количественным методам можно найти в [18, 19]. Большинство подходов основаны на эвристическом поиске, который оказался успешным в пространствах высокой размерности (например, см. [18, 20–26].

Введение верхней границы на количества активов в портфеле представляет собой задачу оптимизации неполиномиальной сложности (см., например, [27]). На настоящее время существует несколько основных подходов, которые используются для решения задач оптимизации портфеля с ограничением на кардинальность.

- Многие исследователи используют гибридные схемы, основанные на хорошо известных способах смешанного целочисленного линейного программирования (например, метод ветвей и границ) и их развитии [19, 28–32].

- Методы траекторий, для которых для избежания попаданий в локальный минимум допускается временное движение в сторону увеличения минимизируемой функции. Алгоритмы двигаются по некоторому пути (траектории) в пространстве поиска, совершая один шаг за итерацию. Хорошо известные методы данного типа — это алгоритм имитации отжига, алгоритм поиска с запретами и пороговый алгоритм [33]. Жадные алгоритмы также доказали свою эффективность [3, 34].

- Популяционные методы работают с целым набором (популяцией) различных точек пространства поиска (особями) в течение одной итерации, некоторые из которых хуже, чем другие, но это также позволяет избегать решений, сходящихся в локальные минимумы. Эти методы часто работают достаточно хорошо в большом пространстве поиска и их можно разделить на локальные методы поиска и конструктивные методы [33]. Для локальных методов поиска алгоритм переходит от существующего решения к новому решению в каждой итерации. Вероятно, самым известным в этой категории алгоритмом является генетический алгоритм (ГА), впервые описанный Холландом в 1970-е годы. В ГА приспособленность особей вычисляется на основе значения целевой функции. Относительно недавним вкладом в популяционные методы является алгоритм дифференциальной эволюции [23]. Различные типы эвристических алгоритмов были использованы для решения задачи слежения за индексом с ограничением на кардинальность в работах [5, 18, 22, 23, 25, 35, 36]. Хотя эти алгоритмы и приводят к получению достаточно точного решения задачи, при этом они требуют использования больших вычислительных мощностей, возможностей распараллеливания, временных затрат на подбор оптимальных параметров, а также больших объемов вычислений и времени выполнения. Хороший обзор может быть найден в работах [18, 19, 37].

- Методы с «ослабленным» ограничением на кардинальность. Главной идеей таких методов является использование регуляризации в рамках модели Марковица [4]. Статья [38] рассматривает несколько различных методов регуляризации для задачи оптимизации портфеля. В частности, возможно получить разреженное (sparse) решение задачи оптимизации, заменив ограничение на кардинальность (7) наложением ограничений на соответствующие нормы вектора весов портфеля. Статья [39] предлагает алгоритм с l_q-регуляризацией ошибок слежения за индексом для нахождения разреженных и устойчивых портфелей. В работе [40] получают разреженное (sparse) решение задачи (7), заменив ограничение на кардинальность в (7) ограничением сверху на вектора портфельных весов в l_q-норме, $0 < q < 1$. F. Xu с соавт. [41] рассмотрел частный случай данного разреженного решения с $q = 1/2$ и предложили гибридный алгоритм для решения этой задачи в $l_{1/2}$ норме. Методы с использованием l_1-регуляризации также были рассмотрены в работах [42, 43]. Быстрый метод, основанный на покоординатном спуске, разработан в работе [44] для решения задач оптимизации портфеля, в которых веса активов ограничены в норме l_q для $1 \leqslant q \leqslant 2$. Для улучшения решений на вневыборочных данных при портфельной оптимизации некоторые авторы используют штрафную функцию в виде взвешенной суммы l_1-нормы и квадрата l_2-нормы вектора весов портфеля [45].

Тем не менее этот список не является полным. Используя последние достижения в многоцелевой оптимизации без использования производных [46], в работе [47] предлагается новый подход для работы с кардинальностью при построении портфеля. В работе [48] разработан геометрический подход, модифицирующий целевую функцию в несколько отдельных ограничений. В работе [49] показывается, что приближение оптимального решения исходной задачи можно найти за конечное число итераций с использованием методов полуопределенного программирования (semidefinite programming).

Следует отметить, что существует большое количество проблем в инженерии, математике, экономике, принятии решений и статистике, которые, как правило, являются NP-сложными и для которых стандартные оптимизационные подходы требуют больших вычислительных ресурсов. Среди этих проблем можно выделить следующие: оценка максимального правдоподобия, обобщенный метод моментов, проблемы количественной теории игр, численные модели в экономике (в том числе задачи портфельной оптимизации с ограничением на кардинальность) и мн. др.

B5. Структура работы

В параг. 1 описываются три алгоритма (жадный алгоритм, алгоритм дифференциальной эволюции и алгоритм типа LASSO) для решения задачи (7). Жадный алгоритм использует идеи работы [3]. Таким образом, наш сравнительный анализ будет основан на алгоритмах из трех различных классов алгоритмов: жадный алгоритм является методом траекторий, алгоритм дифференциальной эволюции представляет собой популяционный метод и алгоритм типа LASSO является методом с «ослабленным» ограничением на кардинальность.

В парагр. 2, используя технику сравнительного анализа, предложенную в [40], мы сравниваем различные портфели, полученные этими тремя алгоритмами для решения задачи слежения за индексом (7).

Эмпирические результаты показали, что подход на основе регрессии типа LASSO генерирует портфели с лучшим поведением в терминах доходности, в то время как жадный алгоритм дает портфели с лучшим поведением в отношении дисперсии ошибки слежения. Кроме того, алгоритм дифференциальной эволюции и жадный алгоритм генерируют портфели с похожим поведением как в терминах доходности, так и волатильности ошибки репликации.

1. АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕПЛИКАЦИИ ИНДЕКСА С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА КАРДИНАЛЬНОСТЬ

1.1. Жадный алгоритм для минимизации в l_2

Для решения задачи (7) в данной статье мы предлагаем использовать жадные алгоритмы. Выбор жадного алгоритма для нашего анализа основан на том факте, что жадные алгоритмы показали высокую эффективность при решении прикладных задач [3, 34]. Мы можем предположить, что они являются многообещающими и для решения задачи слежения за индексом с ограничением на кардинальность. С другой стороны, жадные алгоритмы не обязательно дают оптимальное решение.

Жадные алгоритмы интенсивно изучались с 80-х годов прошлого века, и их основное применение состояло в получении конструктивных методов для нахождения наилучших m-членных приближений. Основной вклад в разработку жадных алгоритмов внесли Дж. Фридман, В. Стузл, С. Маллат, Дж. Чанг, П. Губер, Л. Джонс, А. Бэррон, Р. ДеВор, В. Н. Темляков, С. В. Конягин и другие. Жадные алгоритмы показали отличную производительность в решении практических проблем машинного обучения. В данной статье мы используем такие методы для решения задачи репликации индекса.

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ есть индексное множество инвестиционных активов. Жадный алгоритм для решения задачи (7) в норме l_2 был рассмотрен в работах [3]. Алгоритм на каждом шаге своей работы добавляет в портфель актив, который еще не входит в портфель и который наиболее (в некотором смысле) «близок» к индексу. Процесс включения новых активов в портфель продолжается до тех пор, пока в портфеле не окажется ровно K активов.

Обозначим через $M_k \subset N$ подмножество индексного множества N, соответствующее k ненулевым элементам x, а через $\widetilde{R}_{M_k}$ — подматрицу матрицы доходностей R размерности $(m \times |M_k|)$, в которую вошли столбцы M_k. Тогда задача (7) с $x_i = 0$ для $i \in N \setminus M_k$ будет иметь вид

$$\widetilde{x}^* = \arg\min_{\widetilde{x}} \|I - \widetilde{R}_{M_k}\widetilde{x}\|_2^2 \quad \text{при условии} \quad \widetilde{x}^T 1_{|M_k|} = 1, \ \widetilde{x} \in \mathbb{R}^{|M_k|}. \tag{8}$$

Обозначим $f(M_k) := \|I - \widetilde{R}_{M_k}\widetilde{x}^*\|_2^2$. Оптимальное решение задачи (8) может быть найдено методом Лагранжа:

$$\widetilde{x}_{M_k} = (\widetilde{R}^T_{M_k}\widetilde{R}_{M_k})^{-1}(\widetilde{R}^T_{M_k} I - \lambda e_k), \tag{9}$$

и

$$\lambda = \frac{1_k^T(\widetilde{R}^T_{M_k}\widetilde{R}_{M_k})^{-1}\widetilde{R}^T_{M_k} I - 1}{1_k^T(\widetilde{R}^T_{M_k}\widetilde{R}_{M_k})^{-1}1_k}.$$

Алгоритм 1: Жадный алгоритм в L_2

начало алгоритма

Пусть $M_0 = \varnothing$ и $k = 1$. Положить $f(M_0)$ достаточно большим.

· **цикл пока** $k \leqslant K$ **выполнять**

$\forall s \in N \backslash M_{k-1}$ вычислить $\widetilde{x}_{M_{k-1}\cup\{s\}}$, используя (9).

Выбрать $s^* = \arg \min\limits_{s\in N\backslash M_{k-1}} f(M_{k-1} \cup \{s\})$ и положить $\widetilde{x}_{M_k} = \widetilde{x}_{M_{k-1}\cup\{s^*\}}$.

Положить $M_k = M_{k-1} \cup \{s^*\}$ и $k = k + 1$.

Присвоить $x_G = \widetilde{x}_{M_K}$ и $M_G = M_K$.

Вернуть x_G и M_G.

конец алгоритма

1.2. Алгоритм типа LASSO

Регрессия LASSO (least absolute shrinkage and selection operator) была описана в 1996 г. в работе [50].

Как уже отмечалось, введение штрафной функции в норме l_1 в целевую функцию может привести к эффекту получения разреженных решений (с большим числом нулей). Этот эффект наблюдался во многих исследованиях и на практике. Минимизация нормы в l_1 в настоящее время широко используется для получения разреженных (sparse) решений [4]. Статья [4] использует подход на основе регрессии типа LASSO для задачи (1), переформулированной как регрессия наименьших квадратов с ограничениями

$$x^\delta = \arg\min \|x\|_1 \quad \text{при условиях} \quad \|I - Rx\|_2 \leqslant \delta,\ x^T 1_n = 1, \tag{10}$$

где δ есть скаляр, который выбирается таким образом, чтобы истинное решение попадало в допустимое множество с высокой вероятностью. Задача вида (10) без ограничения $x^T 1_n = 1$ называется регрессией LASSO [50]. Регрессия типа LASSO в целом способна достаточно точно оценивать почти разреженные вектора. Эффективные алгоритмы для задач восстановления разреженных векторов были разработаны в работе [51]. Для численного решения задачи (10) в нашей работе мы использовали Matlab-библиотеку TFOCS, которая сопровождает статью [51].

Число активов в портфеле с ненулевыми весами (т. е. кардинальность K) оптимального решения задачи (10) зависит от параметра δ. Большие (меньшие) значения параметра δ соответствуют меньшим (большим) значениям кардинальности K.

1.3. Алгоритм дифференциальной эволюции для минимизации в l_2

Недавнее дополнение к классу эволюционной эвристики является метод дифференциальной эволюции, предложенный в [52, 53]. Некоторые алгоритмы дифференциальной эволюции и генетические алгоритмы для решения задачи слежения за индексом были разработаны в работе [54].

В нашей работе мы используем алгоритм дифференциальной эволюции (ДЭ) для решения задачи (7). ДЭ является одной из возможных модификаций стандартных генетических алгоритмов и основана на эволюционном принципе.

В ходе ДЭ на каждой итерации создается популяция из особей (точек пространства поиска), которые получены из особей предыдущей популяции путем модификации в соответствии с эволюционными принципами, при этом с ростом числа популяций особи сходятся в некоторую точку пространства решений, которая является глобальным оптимумом. Начальная популяция P состоит из векторов $x^i = (x^i_0, \dots, x^i_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, N$, N есть количество портфелей в исходной популяции и выбирается следующим образом. Сначала мы случайным образом генерируем N векторов y^i из $\mathbb{R}^n$. Для каждого y^i полагаем нулю $n - K$ компонентов y^i_j вектора y^i, которые ближе всего к нулю (кардинальность y^i становится K), а затем полагаем $x^i_j = y^i_j / (\sum_{s=1}^n y^i_s)$, чтобы добиться выполнения бюджетного ограничения $x^T 1_n = 1$.

Под портфелями $x^i \subset D$ понимаются точки n-мерного пространства, в которых определена целевая функция $\frac{1}{m}\|I - Rx\|_2^2$, которую требуется минимизировать. На каждой итерации алгоритм генерирует новое поколение портфелей (популяций) случайным образом, комбинируя портфели из предыдущего поколения. Для каждого портфеля x^i из предыдущего поколения выбирается три различных случайных портфеля x^a, x^b, x^c среди портфелей предыдущего поколения, генерируется портфель x^i следующим образом:

$$\tilde{x}^i_j = x^a_j + (F + z_1)(x^b_j - x^c_j + z_2),$$

где $\tilde{x}^i_j$, x^a_j, x^b_j, x^c_j — j-е компоненты векторов $\tilde{x}^i$, x^a, x^b, x^c соответственно; F — положительная действительная константа из интервала $[0, 2]$, управляющая усилением влияния разности $x^b_j - x^c_j + z_2$ на результирующий вектор, z_1 и z_2 или равны нулю с малыми вероятностями (например, 0.0001 и 0.0002 соответственно), или являются нормально распределенными случайными величинами с математическим ожиданием, равным нулю, и малым стандартным отклонением (например, 0.02).

Параметры z_1 и z_2 есть необязательные параметры алгоритма дифференциальной эволюции, они необходимы для внесения «шума» в вычисление результирующего вектора, что помогает избежать попадания в локальные экстремумы.

Компонента $\hat{x}^i_j$ вектора $\hat{x}^i$ заменяет x^i_j с вероятностью π, а портфель $\hat{x}^i$ переходит в следующее поколение при выполнении условия

$$\|I - R\hat{x}^i\|_2^2 < \|I - Rx^i\|_2^2. \tag{11}$$

Эволюция популяций соответствует динамике «роя мошек» (т. е. облаку случайных точек). Облако движется вдоль рельефа минимизируемой функции, повторяя особенности ландшафта. В случае падения в овраг облако точек принимает форму этого оврага, и распределение точек таково, что ожидание разности двух случайных векторов направлено вдоль длинной стороны оврага. Это дает быстрое движение вдоль узких вытянутых оврагов. Это обеспечивает быстрое движение по узким ущельям. В подобных условиях градиентные методы имеют колебательную динамику «от стены к стене».

Псевдокод минимизации функции $\frac{1}{m}\|I - Rx\|_2^2$ с помощью алгоритма дифференциальной эволюции приведен ниже.

Алгоритм 2: Алгоритм дифференциальной эволюции в l_2

начало алгоритма

Генерируем N случайно распределенных $y^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, N$

$\forall\ i$, присваиваем $y^i_j = 0$ для $n - K$ компонентов, наиболее близких к 0

$\forall i$, формируем начальную популяцию P следующим образом

$x^i_j = y^i_j / (\sum_{s=1}^n y^i_s)$, $j = 1, \dots, n$

задаём число итераций L

· **цикл пока** $t \leqslant L$ **выполнять**

  for *каждого x^i, $i = 1, \dots, N$, из матрицы P* **do**

    выбираем 3 случайных вектора x^a, x^b, x^c

    for *каждого компонента j вектора x^i_j* **do**

      с вероятностью π_1: $z_{1,j} \leftarrow N(0, \sigma_1)$, иначе $z_{1,j} = 0$

      с вероятностью π_2: $z_{2,j} \leftarrow N(0, \sigma_2)$, иначе $z_{2,j} = 0$

      $u_j \leftarrow U(0, 1)$

      если $u_j < 1 - \pi$ то

      $\tilde{x}^i_j = x^i_j$

      иначе $\tilde{x}^i_j = x^a_j + (F + z_{1,j})(x^b_j - x^c_j + z_{2,j})$

      $\forall \tilde{x}^i$, присваиваем $\tilde{x}^i_j = 0$ для $n - K$ компонентов, наиболее близких к 0

      $\forall \tilde{x}^i \in P$, заменяем $\hat{x}^i = \tilde{x}^i / \sum_s \tilde{x}^i_s$

      если условия (11) выполнены, то $\hat{x}^i$ заменяем x^i в P

ищем $x^{i^*} = \arg\min_i \frac{1}{m} \|I - Rx^i\|_2^2$

возвращаем x^{i^*}

конец алгоритма

2. ЭМПИРИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Описание данных

В нашем эмпирическом анализе мы использовали открытые данные, относящиеся к трем основным рыночным индексам, которые расположены в хранилище OR-Library [18, 55]. Эти три рыночных индекса включают Hang Seng (Гонконг, $n = 31$), S&P 100 (США, $n = 98$) и Nikkei 225 (Япония, $n = 225$) для $m = 290$ временных периодов каждый (недельные доходности), взятые из хранилища [18]. Описательные статистики доходностей индексов, представленные в табл. 1, показывают, что временные ряды доходностей демонстрируют типичные паттерны финансовых временных рядов: средние значения находятся около нуля, легкую асимметрию и «толстые хвосты».

Таблица 1 / Table 1

Описательные статистики недельных доходностей индексов

Descriptive statistics of weekly index returns

Data set	n	m	mean, %	std, %	skewness	kurtosis	min	max
Hang Seng	31	290	0.42	3.32	−0.04	3.85	−0.12	0.11
S&P 100	98	290	0.31	1.53	0.17	3.73	−0.04	0.06
Nikkei 225	225	290	−0.01	2.86	0.44	4.85	−0.11	0.12

2.2. Сравнение алгоритмов методом скользящего окна

Чтобы сравнить подходы, описанные в парагр. 1, для решения задачи репликации индекса, используем процедуру скользящего временного окна, описанную в статье [40]. Определяем оптимальную модель, используя окно в 100 наблюдений (недель), и оставляем его без изменений для последующих 10 вневыборочных торговых недель с целью тестирования. Затем это (внутривыборочное) окно сдвигается вперед на 10 недель, и находится новый портфель решения задачи слежения за индексом, используя окно из этих новых 100 наблюдений, и затем снова оставляется без изменений для последующих 10 вневыборочных недель и т. д. Таким образом, портфели пересчитываются один раз в 10 недель. Отметим, что сравнение моделей по внутривыборочным данным проходило по последним 10 наблюдениям (внутривыборочным) окна в 100 наблюдений. Это сделано для того, чтобы внутривыборочные и вневыборочные выборки были одинаковой размерности.

Задача слежения за индексом с ограничением на кардинальность была реализована с использованием программного обеспечения Matlab, а также встроенных и специально разработанных функций. Все расчеты также проводились в Matlab. Работа проведена в 64-битной системе MS Windows 10. В нашем вычислительном эксперименте мы использовали компьютер AMD FX-8350 с процессором 4.00 ГГц и 8.0 Гб оперативной памяти.

Сравнительный анализ жадного алгоритма и алгоритма типа LASSO

Табл. 2 представляет эмпирические результаты как для внутривыборочных, так и для вневыборочных значений волатильностей ошибки слежения, эксцесса доходностей портфелей и корреляций для множеств данных Hang Seng, S&P 100 и Nikkei 225 и для значений δ, равных 0.9 и 0.25. Статистически значимое различие t-статистики (t_{diff}) с уровнем значимости 10% (5%, 1%) между двумя подходами обозначено как * (**, ***). В строках *corr* приведены значения коэффициента корреляции между доходностью портфеля и доходностью индекса.

Таблица 2 / Table 2

Результаты сравнения алгоритма типа LASSO (Lasso) и жадного алгоритма (Greedy)

The results of comparing of the LASSO algorithm (Lasso) and the greedy algorithm (Greedy)

Набор данных Data set	$\delta = 0.9$				$\delta = 0.25$			
	Внутривыборочные Intra-sample		Вневыборочные Out-sample		Внутривыборочные Intra-sample		Вневыборочные Out-sample	
	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy
Hang Seng	5–10 активов / assets				12–17 активов / assets			
	Недельная волатильность / Weekly volatility, %							
Mean	1.61	0.42	1.66	0.52	0.59	0.18	0.69	0.30
Std	0.79	0.13	0.81	0.16	0.21	0.07	0.29	0.15
t_{diff}	6.50^{***}		6.04^{***}		8.22^{***}		5.2^{***}	
	Доходность относительно индекса / Excess return, %							
Mean	0.67	0.06	0.39	0.05	0.33	0.03	0.16	0.06
Std	0.47	0.13	0.40	0.13	0.19	0.06	0.18	0.10
t_{diff}	5.49^{***}		3.52^{***}		6.57^{***}		2.26^{**}	
corr	0.85	0.99	0.86	0.98	0.98	0.99	0.97	0.99

Окончание табл. 2 / End of Table 2

Набор данных Data set	$\delta = 0.9$				$\delta = 0.25$			
	Внутривыборочные In-of-sample		Вневыборочные Out-of-sample		Внутривыборочные In-of-sample		Вневыборочные Out-of-sample	
	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy
S&P 100	8–16 активов / assets				19–34 активов / assets			
	Недельная волатильность / Weekly volatility, %							
Mean	1.28	0.34	1.49	0.68	0.56	0.15	0.76	0.44
Std	0.42	0.11	0.64	0.19	0.13	0.05	0.25	0.13
t_{diff}	9.50***		5.23***		12.8***		5.01***	
	Доходность относительно индекса / Excess return, %							
Mean	0.59	−0.02	−0.10	−0.01	0.40	0.00	−0.01	−0.01
Std	0.38	0.12	0.48	0.20	0.17	0.05	0.24	0.12
t_{diff}	6.71***		0.73		10.06***		0.01	
corr	0.75	0.96	0.72	0.90	0.91	0.99	0.86	0.95
Nikkei 225	10–20 активов / assets				31–40 активов / assets			
	Недельная волатильность / Weekly volatility, %							
Mean	1.21	0.24	1.24	0.66	0.49	0.08	0.68	0.50
Std	0.48	0.07	0.55	0.28	0.17	0.02	0.25	0.24
t_{diff}	8.85**		4.08***		10.13***		2.33**	
	Доходность относительно индекса / Excess return, %							
Mean	0.66	0.01	0.01	−0.01	0.43	0.01	0.01	0.00
Std	0.48	0.07	0.49	0.15	0.22	0.04	0.27	0.11
t_{diff}	5.87***		0.21		8.00***		0.16	
corr	0.88	0.99	0.86	0.96	0.98	0.99	0.95	0.98

Следуя [40], мы полагали максимальное число активов K в ограничении на кардинальность для жадного алгоритма равным числу ненулевых весов, найденных на основе подхода типа LASSO в соответствующих окнах.

Табл. 2 показывает, что алгоритм типа LASSO дает портфели с лучшим поведением в терминах доходности для всех внутривыборочных множеств, и для 2 из 6 вневыборочных случаях. С другой стороны, жадный алгоритм приводит к портфелям с лучшими характеристиками в терминах волатильности ошибки слежения как на внутривыборочных, так и вневыборочных множествах данных. Жадный алгоритм даёт более высокие значения в отношении корреляции с индексом, особенно сильное различие наблюдается для показателя $\delta = 0.9$ (когда в портфеле присутствует относительно небольшое число активов), как для внутривыборочных, так и для вневыборочных данных.

Все данные характеризуются толстыми хвостами (куртозис больше 3), при этом присутствует легкая асимметрия для всех множеств данных (табл. 3).

Следует отметить, что эти два алгоритма приводят к различным портфелям в смысле выбора входящих в них активов. Пересечение множеств активов, входящих в портфели, полученные жадным алгоритмом и алгоритмом на основе LASSO-регрессии, зачастую было пустым.

Сравнение времени работы алгоритмов приведены в табл. 4. Результаты показывают, что жадный алгоритм работает на порядки быстрее, чем алгоритм типа LASSO на всех наборах данных.

Таблица 3 / Table 3

Значения асимметрии, эксцесса и величины VaR на уровне 95% для алгоритма типа LASSO (Lasso) и жадного алгоритма (Greedy)

The skewness, kurtosis and 95%-VaR values for the LASSO algorithm (Lasso) and the greedy algorithm (Greedy)

Набор данных Data set	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy
Hang Seng	5–10 активов / assets ($K_{\text{mean}} = 7.32$) $\delta = 0.9$		12–17 активов / assets ($K_{\text{mean}} = 15.16$) $\delta = 0.25$	
	Распределение доходностей (вневыборочных) Distribution of returns (out-of-sample)			
Skew	−0.03	−0.03	−0.10	−0.01
Kurt	3.27	3.45	3.42	3.70
VaR_{95}	0.94	0.95	0.95	0.95
S&P 100	8–16 активов / assets ($K_{\text{mean}} = 12.11$) $\delta = 0.9$		19–34 активов / assets ($K_{\text{mean}} = 26.68$) $\delta = 0.25$	
	Распределение доходностей (вневыборочных) Distribution of returns (out-of-sample)			
Skew	−0.09	0.12	0.07	0.23
Kurt	3.53	3.08	3.10	3.28
VaR_{95}	0.96	0.97	0.97	0.98
Nikkei 225	10–20 активов / assets ($K_{\text{mean}} = 15.07$) $\delta = 0.9$		31–40 активов / assets ($K_{\text{mean}} = 34.84$) $\delta = 0.25$	
	Распределение доходностей (вневыборочных) Distribution of returns (out-of-sample)			
Skew	0.65	0.11	0.47	0.20
Kurt	5.10	4.98	4.83	5.72
VaR_{95}	0.96	0.96	0.96	0.96

Таблица 4 / Table 4

Значения процессорного времени в секундах для алгоритма типа LASSO (Lasso) и жадного алгоритма (Greedy)

The CPU-time values in seconds for the LASSO algorithm (Lasso) and the greedy algorithm (Greedy)

Набор данных Data set	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy
	$\delta = 0.9$		$\delta = 0.25$	
Hang Seng	289.163	0.934	566.441	1.982
S&P 100	352.615	5.022	769.465	13.188
Nikkei 225	371.550	17.119	853.244	52.513

Сравнительный анализ жадного алгоритма и алгоритма дифференциальной эволюции

Хорошо известно, что параметры эвристических алгоритмов, в том числе алгоритма дифференциальной эволюции, оказывают огромное влияние на их работу и результаты. Иногда даже небольшие изменения параметров могут привести к лучшим результатам. Например, если размер популяций N будет мал и время вычисления фиксировано, то это позволит создать большое количество поколений (итераций) L, и вероятность сходимости к локальному экстремуму может увеличится. Слишком большой размер популяции N может привести к ситуации, когда число итераций L будет недостаточно для нахождения глобального экстремума. Вопрос о том, какой должен быть оптимальный размер популяции в алгоритмах с мутацией остается открытым. Очень важно выбрать подходящие параметры алгоритма для каждого из рассматриваемых наборов данных. Для достижения наилучших результатов мы протестировали алгоритм с использованием первого набора данных (Hang Seng), выбирая подходящее значение для каждого параметра и анализируя эффективность алгоритма с целью определения наилучшего набора параметров для нашего исследования.

Эффективность алгоритма дифференциальной эволюции зависит от таких параметров, как вес F, вероятность мутации π, размер популяции N и число поколений L. Параметр F является ключевым параметром метода дифференциальной эволюции. Известно, что $F \in [0, 2]$. Мы получили, что при $F > 1$ решение является неустойчивым. В результате тестирования было установлено, что значение $F = 0.5$ дает нам лучшие результаты по всем критериям. Следующим шагом является выбор оптимального значения вероятности мутации. Мы получили, что значение $\pi = 0.5$ обеспечивает приемлемое время расчета и устойчивость решения. Следует отметить, что параметры F и π должны быть выбраны для конкретной целевой функции и основываться на особенностях данной задачи, в то время как значения N и L, напротив, в первую очередь зависят от размера экспериментальных данных.

Таким образом, мы определяем значения N и L для данных Hang Seng с 32 активами (с учетом индекса в качестве актива), а затем для больших объемов данных мы увеличиваем значения N и L в пропорции к лучшим значениям, найденным для данных Hang Seng. Значения $N = 20, 40, 60$ были протестированы с целью определения подходящего параметра с точки зрения времени расчета и оптимального решения. Как результат, начальная популяция с $N = 40$ обеспечивает лучшую доходность и значение волатильности с разумными временными затратами. Значение $N = 60$ требует значительно больше времени по сравнению с $N = 40$, обеспечивая такое же качество решения, в то время как меньшая популяция приводит к неустойчивому решению. Аналогичным образом было выбрано лучшее число поколений $L = 70$ для данных Hang Seng, обеспечивая минимальную волатильность в разумные сроки. Следует также отметить, что параметры L и N для Nikkei 225 набора данных идентичны с набором данных S&P 100 в нашем эмпирическом исследовании, так как для набора данных Nikkei 225 алгоритм дифференциальной эволюции находит решение быстро. Следовательно, нет смысла увеличивать количество поколений и размер популяции.

Табл. 5 представляет эмпирические результаты как для внутривыборочных, так и для вневыборочных значений волатильностей ошибки слежения, эксцесса доходностей портфелей и корреляций для множеств данных Hang Seng, S&P 100, Nikkei 225 и для кардинальности K, равной 5 и 20. Статистически значимое различие t-статистики (t_{diff}) с уровнем значимости 10% (5%, 1%) между двумя подходами обозначено как * (**, ***). В строках *corr* приведены значения коэффициента корреляции между доходностью портфеля и доходностью индекса.

Значения t-статистики из табл. 5 показывают, что различие между алгоритмом дифференциальной эволюции и жадным алгоритмом с точки зрения доходностей относительно индекса является незначимым для всех выборок. Также эта тенденция прослеживается и с точки зрения волатильности, за исключением 2 из 6 внутривыборочных данных для Nikkei 225 (возможно, что алгоритм дифференциальной эволюции в этом случае оказался хуже из-за недостаточного числа операций, либо популяций, которые бы позволили ему получить более точное решение), где жадный алгоритм приводит к значимому улучшению портфеля.

Таблица 5 / Table 5

Результаты сравнения алгоритма дифференциальной эволюции (DE) и жадного алгоритма (Greedy) для трех наборов данных

The comparison results for the algorithm of differential evolution (DE) and the greedy algorithm (Greedy) for three data sets

Набор данных Data set	$K=5$				$K=20$			
	Внутривыборочные In-of-sample		Вневыборочные Out-of-sample		Внутривыборчные In-of-sample		Вневыборочные Out-of-sample	
	DE	Greedy	DE	Greedy	DE	Greedy	DE	Greedy
Hang Seng	*Недельная волатильность / Weekly volatility, %*							
Mean	0.54	0.57	0.60	0.67	0.15	0.15	0.23	0.24
Std	0.18	0.18	0.15	0.19	0.07	0.07	0.13	0.14
t_{diff}	0.90		1.60		0.02		0.25	
	Доходность относительно индекса / Yield against the index, %							
Mean	0.11	0.06	0.14	0.10	0.03	0.02	0.05	0.05
Std	0.15	0.17	0.16	0.20	0.05	0.05	0.08	0.07
t_{diff}	1.00		0.68		0.24		0.10	
corr	0.98	0.98	0.98	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00
S&P 100	*Недельная волатильность / Weekly volatility, %*							
Mean	0.67	0.67	1.00	1.01	0.19	0.19	0.48	0.49
Std	0.14	0.14	0.30	0.22	0.04	0.05	0.17	0.14
t_{diff}	0.01		0.19		0.08		0.22	
	Доходность относительно индекса / Yield against the index, %							
Mean	0.00	0.00	0.04	−0.02	−0.01	0.01	−0.01	−0.03
Std	0.19	0.20	0.26	0.24	0.05	0.07	0.12	0.15
t_{diff}	0.07		0.81		0.59		0.38	
corr	0.90	0.88	0.81	0.79	0.99	0.99	0.93	0.94
Nikkei 225	*Недельная волатильность / Weekly volatility, %*							
Mean	0.78	0.54	1.07	1.06	0.24	0.17	0.60	0.59
Std	0.19	0.12	0.38	0.34	0.04	0.04	0.14	0.19
t_{diff}	4.78***		0.16		5.62***		0.11	
	Доходность относительно индекса / Yield against the index, %							
Mean	0.01	−0.05	0.01	−0.07	0.01	0.01	−0.02	0.00
Std	0.18	0.15	0.28	0.24	0.07	0.05	0.17	0.13
t_{diff}	1.07		0.99		0.43		0.49	
corr	0.94	0.97	0.89	0.88	0.99	1.00	0.96	0.96

Жадный алгоритм и алгоритм дифференциальной эволюции дают сходные результаты в отношении корреляции с эталоном (индексом). Однако можно отметить, что у жадного алгоритма, как правило, корреляция меньше, чем у алгоритма дифференциальной эволюции для внутривыборочных данных, и больше для вневыборочных данных.

Для двух из трех наборов данных характерно наличие тяжелых хвостов (куртозис>3), при этом присутствует незначительная асимметрия для всех наборов данных. Необходимо отметить, что несмотря на то что мы не накладывали ограничение на положительность долей активов x_i, оба алгоритма предлагают осуществлять короткие продажи только при кардинальности $K = 20$. Портфели, полученные по жадному алгоритму и алгоритму дифференциальной эволюции существенно не отличаются по подбору активов, а именно, пересечение множеств активов, выбранных первым и вторым алгоритмом, были значительными.

Табл. 6 показывает, что значения асимметрии, эксцесса и величина VaR на 95 % уровне значимости для алгоритма дифференциальной эволюции и жадного алгоритма очень похожи.

Таблица 6 / Table 6

Значения асимметрии, эксцесса и величины VaR на уровне 95 % для алгоритма дифференциальной эволюции (DE) и жадного алгоритма (Greedy)

The skewness, kurtosis and 95%-VaR values for the differential evolution algorithm (DE) and the greedy algorithm (Greedy)

Набор данных	DE	Greedy	DE	Greedy
Data set	K=5		K=20	
Hang Seng	*Распределение доходностей (вневыборочных) Distribution of returns (out-of-sample)*			
Skew	0.06	0.04	0.07	0.08
Kurt	3.50	3.44	3.63	3.66
Var_95	0.95	0.95	0.95	0.95
S&P 100	*Распределение доходностей (вневыборочных) Distribution of returns (out-of-sample)*			
Skew	0.21	0.16	0.26	0.30
Kurt	2.49	2.75	3.44	3.30
Var_95	0.97	0.97	0.98	0.98
Nikkei 225	*Распределение доходностей (вневыборочных) Distribution of returns (out-of-sample)*			
Skew	0.36	0.14	0.29	0.11
Kurt	5.14	5.20	5.13	5.28
Var_95	0.96	0.95	0.96	0.96

Сравнение времени работы алгоритмов приведены в табл. 7. Результаты показывают, что жадный алгоритм также работает на порядки быстрее, чем и алгоритм дифференциальной эволюции на всех наборах данных.

Таблица 7 / Table 7

Значения процессорного времени в секундах для алгоритма дифференциальной эволюции (DE) и жадного алгоритма (Greedy)

The CPU-time values in seconds for the differential evolution algorithm (DE) and the greedy algorithm (Greedy)

Набор данных Data set	Параметры DE DE Parameters	DE	Greedy	DE	Greedy
		$K = 5$		$K = 20$	
Hang Seng	$L = 70$, $N = 40$	13.995	0.668	30.254	1.800
S&P 100	$L = 200$, $N = 120$	217.172	2.218	340.862	8.415
Nikkei 225	$L = 200$, $N = 120$	447.273	4.856	575.207	21.332

ВЫВОДЫ

Слежение за индексом является одной из форм пассивного управления капиталом, которая нацелена на создание оптимальных портфелей для репликации индекса, балансирующих между риском и доходностью. Однако полная модель репликации индекса, как правило, включает в себя почти все доступные активы на рынке, что приводит к большим затратам по сделкам и портфелю, которым очень трудно управлять из-за большого числа активов.

Подводя итоги по сравнению жадного алгоритма с алгоритмом типа LASSO, необходимо отметить, что эти два алгоритма приводят к совершенно различным портфелям в смысле выбора входящих в них активов. При этом алгоритм типа LASSO дает портфели с лучшим поведением в терминах доходности, а жадный алгоритм приводит к портфелям с лучшими характеристиками в терминах волатильности.

Что касается сравнения жадного алгоритма и алгоритма дифференциальной эволюции, необходимо отметить, что портфели, полученные с использованием жадного алгоритма и алгоритма дифференциальной эволюции, существенно не отличаются по подбору активов, при этом, как правило, не осуществляя короткие продажи. Значение t-статистики показывает, что различие между алгоритмом дифференциальной эволюции и жадным алгоритмом, как с точки зрения доходностей относительно индекса, так и с точки зрения волатильности является незначимым почти для всех выборок. Заметим, что жадный алгоритм существенно превосходит алгоритм дифференциальной эволюции в простоте реализации и по времени выполнения алгоритма.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-37-00060).

Библиографический список

1. *Markowits H. M.* Portfolio Selection // J. Finance. 1952. Vol. 7, № 1. P. 71–91. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x.
2. *Roll R.* A mean/variance analysis of tracking error // J. Portfol. Mgmt. 1992. Vol. 18, № 4. P. 13–22. DOI: 10.3905/jpm.1992.701922.
3. *Takeda A., Niranjan M., Gotoh J., Kawahara Y.* Simultaneous pursuit of out-of-sample performance and sparsity in index tracking portfolios // Comput. Manag. Sci. 2013. Vol. 10, iss 1. P. 21–49. DOI: 10.1007/s10287-012-0158-y.
4. *Brodie J., Daubechiesa I., De Molc C., Giannoned D., Lorisc I.* Sparse and stable Markowitz portfolios // PNAS. 2009. Vol. 106, № 30. P. 12267–12272. DOI: 10.1073/pnas.0904287106.
5. *Gilli M., Kellezi E.* The threshold accepting heuristic for index tracking // Financial Engineering, E-Commerce and Supply Chain. 2002. P. 1–18. DOI: 10.1007/978-1-4757-5226-7_1.
6. *Prigent J.-L.* Portfolio Optimization and Performance Analysis. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2007. 456 p.
7. *Rudolf M., Wolter H. J., Zimmermann H.* A linear model for tracking error minimization // J. Banking & Finance. 1999. Vol. 23, № 1. P. 85–103. DOI: 10.1016/S0378-4266(98)00076-4.
8. *DeMiguel V., Garlappi L., Uppal R.* Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy? // Rev. Financ. Stud. 2009. Vol. 22, № 5. P. 1915–1953. DOI: 10.1093/rfs/hhm075.
9. *Bertero M., Boccacci P.* Introduction to Inverse Problems in Imaging. L. : Institute of Physics Publ., 1998. 352 p. DOI: 10.1887/0750304359.
10. *Chen S. S., Donoho D. L., Saunders M. A.* Atomic Decomposition by Basis Pursuit // SIAM Review. 2001. Vol. 43, iss. 1. P. 129–159. DOI: 10.1137/S003614450037906X.
11. *Daubechies I., Defrise M., De Mol C.* An Iterative Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems With a Sparsity Constraint // Communications on Pure and Appl. Math. 2004. Vol. 57, iss. 11. P. 1413–1457. DOI: 10.1002/cpa.20042.
12. *Osborne M. R., Presnell B., Turlach B. A.* A New Approach to Variable Selection in Least Squares Problems // IMA J. Numer. Anal. 2000. Vol. 20, iss. 3. P. 389–403. DOI: 10.1093/imanum/20.3.389.

13. *Osborne M. R., Presnell B., Turlach B. A.* On the LASSO and Its Dual // J. Comput. and Graphical Statistics. 2004. Vol. 9, № 2. P. 319–337. DOI: 10.2307/1390657.
14. *Efron B., Hastie T., Johnstone I., Tibshirani R.* Least Angle Regression // Ann. Statist. 2004. Vol. 32, № 2. P. 407–499. DOI:10.1214/009053604000000067.
15. *Zhang T.* Adaptive forward-backward greedy algorithm for sparse learning with linear models // Advances in Neural Information Processing Systems 21 (NIPS 2008). Curran Associates, Inc., 2008. P. 1921–1928.
16. *Тихонов А. Н.* О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 3. С. 591–594.
17. *van Montfort K., Visser E., van Draat L. F.* Index tracking by means of optimized sampling // J. Portfol. Mgmt. 2008. Vol. 34, № 2. p. 143–151. DOI: 10.3905/jpm.2008.701625.
18. *Beasley J. E., Meade N., Chang T.-J.* An evolutionary heuristic for the index tracking problem // Eur. J. Oper. Res. 2003. Vol. 148, iss. 3. P. 621–643. DOI: 10.1016/S0377-2217(02)00425-3.
19. *Canagkoz N. A., Beasley J. E.* Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation // Eur. J. Oper. Res. 2008. Vol. 196, iss. 1. P. 384–399. DOI: 10.1016/j.ejor.2008.03.015.
20. *Chang T. J., Meade N., Beasley J. E., Sharaiha Y. M.* Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation // Computers & Operations Research. 2000. Vol. 27, iss. 13. P. 1271–1302. DOI: 10.1016/S0305-0548(99)00074-X.
21. *Oriakhi M., Lucas C., Beasley J. E.* Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier // Eur. J. Oper. Res. 2011. Vol. 213, iss. 13. P. 538–550. DOI:10.1016/j.ejor.2011.03.030.
22. *Derigs U., Nickel N.-H.* Meta-heuristic based decision support for portfolio optimization with a case study on tracking error minimization in passive portfolio management // OR Spectrum. 2003. Vol. 25, iss. 3. P. 345–378. DOI: 10.1007/s00291-003-0127-5.
23. *Maringer D., Oyewumi O.* Index tracking with constrained portfolios // Intell. Syst. Account., Finance Mgmt. 2007. Vol. 15, iss. 1–2. P. 57–71. DOI: 10.1002/isaf.285.
24. *Gilli M., Këllezi E.* The threshold accepting heuristic for index tracking // Financial Engineering, E-Commerce and Supply Chain. Dordrecht : Kluwer, 2009. P. 1–18. DOI: 10.1007/978-1-4757-5226-7_1.
25. *Gilli M., Winker P.* Heuristic optimization methods in econometrics // Handbook of Computational Econometircs / eds. D. Beasley, E. Kontoghiorghes. Chichester : John Wiley & Sons, Ltd, 2009. P. 81–120. DOI: 10.1002/9780470748916.ch3.
26. *Krink T., Mittnik S., Paterlini S.* Differential evolution and combinatorial search for constrained index tracking // Ann. Oper. Res. 2009. Vol. 172. Article 153. P. 153–176. DOI: 10.1007/s10479-009-0552-1.
27. *Coleman T. F., Li Y., Henniger J.* Minimizing tracking error while restricting the number of assets // J. Risk. 2006. Vol. 8, № 4. P. 33–56.
28. *Mehlhorn K., Sanders P.* Algorithms and Data Structures. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2008. 300 p. DOI: 10.1007/978-3-540-77978-0.
29. *Le T., An H., Mahdi M.* Long-Short Portfolio Optimization Under Cardinality Constraints by Difference of Convex Functions Algorithm // J. Optim. Theory Appl. 2014. Vol. 161, iss. 1. P. 199–224. DOI: 10.1007/s10957-012-0197-0.
30. *Li Y., Yang X., ZHu S.,Li D.-H.* A hybrid approach for index tracking with practical constraints // J. Ind. Manag. Optim. 2014. Vol. 10, iss. 3. P. 905–927. DOI: 10.3934/jimo.2014.10.905.
31. *Cui T., Cheng S., Bai R.* A combinatorial algorithm for the cardinality constrained portfolio optimization problem // Proc. of the 2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2014. 2014. Vol. 18, iss. 1. Article 6900357. P. 491–498.

32. *Cesarone F., Scozzari A., Tardella F.* A new method for mean-variance portfolio optimization with cardinality constraints // Ann. Oper. Res. 2013. Vol. 205, iss. 1. P. 213–234. DOI: 10.1007/s10479-012-1165-7.
33. *Gilli M., Schumann E.* Heuristic optimisation in financial modeling // Ann. Oper. Res. 2012. Vol. 193, iss. 1. P. 129–158. DOI: 10.1007/s10479-011-0862-y.
34. *Das A., Kempe D.* Submodular meets spectral : Greedy algorithms for subset selection,sparse approximation and dictionary selection // Proc. of the 28th Intern. Conf. on Machine Learning (ICML-11). N. Y. : ACM, 2011. P. 1057–1064.
35. *Jeurissen R.* A hybrid genetic algorithm to track the dutch AEX-index // Bachelor's thesis, Informatics & Economics. Erasmus Univ. Rotterdam, 2005. 36 p. URL: https://ru.scribd.com/document/125079765/Jeurissen-Roland-A-Hybrid-Genetic-Algorithm-to-Track-the-Dutch-AEX-Index-2005 (дата обращения: 10.07.2016).
36. *Jeurissen R., van den Berg J.* Optimized index tracking using a hybrid genetic algorithm // Proc. IEEE World Congr. Evolutionary Computation (CEC2008). 2008. P. 2327–2334. DOI: 10.1109/CEC.2008.4631108.
37. *Maringer D.* Portfolio Management with Heuristic Optimization. Advances in Comput. Manag. Sci. Vol. 8. Berlin : Springer, 2005. 223 p. DOI: 10.1007/b136219.
38. *DeMiguel V., Garlappi L.,Francisco J.* A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms // Management Science. 2009. Vol. 55, iss. 5. P. 798–812.
39. *Giuzio M., Ferrari D.,Paterlini S.* Sparse and robust normal and t-portfolios by penalized L_q-likelihood minimization // EJOR. 2016. Vol. 250, iss. 1. P. 251–261. DOI: 10.1016/j.ejor.2015.08.056.
40. *Fastrich B., Paterlini S., Winker P.* Cardinality versus q-norm constraints for index tracking // Quantitative Finance. 2014. Vol. 14, iss. 11. P. 2019–2032. DOI: 10.1080/14697688.2012.691986.
41. *Xu F., Xu Z., Xue H.* Sparse index tracking: an $L_{1/2}$ regularization based model and solution // Working Paper. arXiv:1506.05867. 2012. P. 1–19.
42. *Ruiz-Torrubiano R., Suárez A.* A memetic algorithm for cardinality-constrained portfolio optimization with transaction costs // Appl. Soft Comput. 2015. Vol. 36. P. 125–142. DOI: 10.1016/j.asoc.2015.06.053.
43. *Xu F., Lu Z., Xu Z.* An efficient optimization approach for a cardinality-constrained index tracking problem // Optimization Methods and Software. 2016. Vol. 31, iss. 2. P. 258–271. DOI: 10.1080/10556788.2015.1062891.
44. *Yen Y.-M., Yen T.-J.* Solving norm constrained portfolio optimization via coordinate-wise descent algorithms // Comput. Statist. & Data Anal. 2014. Vol. 76. P. 737–759. DOI: 10.1016/j.csda.2013.07.010.
45. *Yen Y.-M.* Sparse Weighted-Norm Minimum Variance Portfolios // Review of Finance. 2015. Vol. 20, iss. 3. P. 1259–1287. DOI: 10.1093/rof/rfv024.
46. *Xidonas P., Mavrotas G., Psarras J.* Portfolio management within the frame of multiobjective mathematical programming: a categorised bibliographic study // Intern. J. Oper. Res. 2010. Vol. 8, iss. 1. P. 21–41. DOI: 10.1504/IJOR.2010.033102.
47. *Brito R. P., Vicente L. N* Efficient cardinality/mean-variance portfolios // System Modeling and Optimization. IFIP International Federation for Information Processing. Vol. 443. Berlin, Heidelberg : Springer, 2014. P. 52–73. DOI: 10.1007/978-3-662-45504-3_6.
48. *Gao J., Li D.* Optimal Cardinality Constrained Portfolio Selection // Operations Research. 2013. Vol. 61, iss. 3. P. 745–761. DOI: 10.1287/opre.2013.1170.
49. *Ye T., Fang S, Deng Z., Jin Q.* Cardinality constrained portfolio selection problem: A completely positive programming approach // J. Ind. Manag. Optim. 2016. Vol. 12, iss. 3. P. 1041–1056. DOI: 10.3934/jimo.2016.12.1041.
50. *Tibshirani R.* Regression Shrinkage and Selection via the Lasso // J. Royal Statist. Soc. : Ser. B (Statistical Methodology). 1996. Vol. 58, № 1. P. 267–288. DOI: 10.1111/j.1467-9868.2011.00771.x.

51. *Becker S., Candes E. J., Grant M.* Templates for convex cone problems with applications to sparse signal recovery // Mathematical Programming Computation. 2011. Vol. 3, iss. 3. Article 165. P. 165–218. DOI: 10.1007/s12532-011-0029-5.
52. *Storn R., Price K.* Differential Evolution — A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces // J. Global Optimization. 1997. Vol. 11, iss. 4. P. 341–359. DOI: 10.1023/A:1008202821328.
53. *Price K., Storn R. M., Lampinen J. A.* Differential evolution: a practical approach to global optimization. Berlin : Springer, 2005. 539 p.
54. *Andriosopoulos K., Doumpos M., Papapostolou N. C., Pouliasis P. K.* Portfolio optimization and index tracking for the shipping stock and freight markets using evolutionary algorithms // Transportation Research Part E : Logistics and Transportation Review. 2013. Vol. 52. Spec. iss. : Maritime Financial Management. P. 16–34. DOI: 10.1016/j.tre.2012.11.006.
55. *Beasley J. E.* OR-Library. URL: http://people.brunel.ac.uk/mastjjb/jeb/orlib/indtrack info.html (дата обращения: 11.04.2016).

Образец для цитирования:
Файзлиев А. Р., Хомченко А. А., Сидоров С. П. Эмпирический анализ работы алгоритмов решения задачи репликации индекса // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 101–124. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-101-124.

Empirical Analysis of Algorithms for Solving the Index Tracking Problem

A. R. Faizliev, A. A. Khomchenko, S. P. Sidorov

Alexey R. Faizliev, https://orcid.org/0000-0001-6442-43613, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, faizlievar1983@mail.ru
Andrew A. Khomchenko, https://orcid.org/0000-0002-0208-7854, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, aahomchenko@gmail.com
Sergei P. Sidorov, https://orcid.org/0000-0003-4047-82392, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, sidorovsp@info.sgu.ru

Index tracking is a passive financial strategy that tries to replicate the performance of a given index or benchmark. The aim of investor is to find the weights of assets in her/his portfolio that minimize the tracking error, i.e. difference between the performance of the index and the portfolio. The paper considers the index tracking problem with cardinality constraint, i.e. the limit on the number of assets in the portfolio with non-zero weights. Index tracking problem with cardinality constraint is NP-hard problem and it usually requires the development of heuristic algorithms such as genetic algorithms and differential evolution algorithm. In this paper we will examine different algorithms for solving the problem in l_2-norm, including greedy algorithm, differential evolution algorithm and LASSO-type algorithm. In our empirical analysis we use publicly available data relating to three major market indices (the Hang Seng (Hong Kong), S&P 100 (USA) and the Nikkei 225 (Japan). To compare the three approaches (the greedy and the LASSO-type algorithms, the greedy and the differential evolution algorithms) to the index tracking problem, we use both a moving time window procedure and stochastic dominance principle. Moreover, we carried out the comparison using both for in-sample and out-of-sample tracking error analysis.

Key words: index tracking, portfolio optimization, greedy algorithm, LASSO-type regression, differential evolution algorithm.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 18-37-00060).

References

1. Markowits H. M. Portfolio Selection. *J. Finance*, 1952, vol. 7, no. 1, pp. 71–91. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x.
2. Roll R. A mean/variance analysis of tracking error. *J. Portfol. Mgmt.*, 1992, vol. 18, no. 4, pp. 13–22. DOI: 10.3905/jpm.1992.701922.
3. Takeda A., Niranjan M., Gotoh J., Kawahara Y. Simultaneous pursuit of out-of-sample performance and sparsity in index tracking portfolios. *Comput. Manag. Sci.*, 2013, vol. 10, iss 1, pp. 21–49. DOI: 10.1007/s10287-012-0158-y.
4. Brodie J., Daubechiesa I., De Molc C., Giannoned D., Lorisc I. Sparse and stable Markowitz portfolios. *PNAS*, 2009, vol. 106, no. 30, pp. 12267–12272. DOI: 10.1073/pnas.0904287106.
5. Gilli M., Kellezi E. The threshold accepting heuristic for index tracking. *Financial Engineering, E-Commerce and Supply Chain*, Springer, 2002, pp. 1–18. DOI: 10.1007/978-1-4757-5226-7_1.
6. Prigent J.-L. *Portfolio Optimization and Performance Analysis*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2007. 456 p.
7. Rudolf M., Wolter H. J., Zimmermann H. A linear model for tracking error minimization. *J. Banking & Finance*, 1999, vol. 23, no. 1, pp. 85–103. DOI: 10.1016/S0378-4266(98) 00076-4.
8. DeMiguel V., Garlappi L., Uppal R. Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the $1/N$ Portfolio Strategy? *Rev. Financ. Stud.*, 2009, vol. 22, no. 5, pp. 1915–1953. DOI: 10.1093/rfs/hhm075.
9. Bertero M., Boccacci P. *Introduction to Inverse Problems in Imaging*. London, Institute of Physics Publ., 1998. 352 p. DOI: 10.1887/0750304359.
10. Chen S. S., Donoho D. L., Saunders M. A. Atomic Decomposition by Basis Pursuit. *SIAM Review*, 2001, vol. 43, iss. 1, pp. 129–159. DOI: 10.1137/S003614450037906X.
11. Daubechies I., Defrise M., De Mol C. An Iterative Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems with a Sparsity Constraint. *Communications on Pure and Appl. Math.*, 2004, vol. 57, iss. 11, pp. 1413–1457. DOI: 10.1002/cpa.20042.
12. Osborne M. R., Presnell B., Turlach B. A. A New Approach to Variable Selection in Least Squares Problems. *IMA J. Numer. Anal.*, 2000, vol. 20, iss. 3, pp. 389–403. DOI: 10.1093/imanum/20.3.389.
13. Osborne M. R., Presnell B., Turlach B. A. On the LASSO and Its Dual. *J. Comput. and Graphical Statistics*, 2004, vol. 9, no. 2, pp. 319–337. DOI: 10.2307/1390657.
14. Efron B., Hastie T., Johnstone I., Tibshirani R. Least Angle Regression. *Ann. Statist.*, 2004, vol. 32, no. 2, pp. 407–499. DOI:10.1214/009053604000000067.
15. Zhang T. Adaptive forward-backward greedy algorithm for sparse learning with linear models. *Advances in Neural Information Processing Systems 21 (NIPS 2008)*, Curran Associates, Inc., 2008, pp. 1921–1928.
16. Tikhonov A. N. Incorrect problems of linear algebra and a stable method for their solution. *Sov. Math. Dokl.*, 1965, vol. 6, pp. 988–991.
17. van Montfort K., Visser E., van Draat L. F. Index tracking by means of optimized sampling. *J. Portfol. Mgmt.*, 2008, vol. 34, no. 2, pp. 143–151. DOI: 10.3905/jpm.2008.701625.
18. Beasley J. E., Meade N., Chang T.-J. An evolutionary heuristic for the index tracking problem. *Eur. J. Oper. Res.*, 2003, vol. 148, iss. 3, pp. 621–643. DOI: 10.1016/S0377-2217(02)00425-3.
19. Canagkoz N. A., Beasley J. E. Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation. *Eur. J. Oper. Res.*, 2008, vol. 196, iss. 1, pp. 384–399. DOI: 10.1016/j.ejor.2008.03.015.
20. Chang T. J., Meade N., Beasley J. E., Sharaiha Y. M. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research*, 2000, vol. 27, iss. 13, pp. 1271–1302. DOI: 10.1016/S0305-0548(99)00074-X.

21. Oriakhi M., Lucas C., Beasley J. E. Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier. *Eur. J. Oper. Res.*, 2011, vol. 213, iss. 13, pp. 538–550. DOI: 10.1016/j.ejor.2011.03.030.
22. Derigs U., Nickel N.-H. Meta-heuristic based decision support for portfolio optimization with a case study on tracking error minimization in passive portfolio management. *OR Spectrum*, 2003, vol. 25, iss. 3, pp. 345–378. DOI: 10.1007/s00291-003-0127-5.
23. Maringer D., Oyewumi O. Index tracking with constrained portfolios. *Intell. Syst. Account., Finance Mgmt.*, 2007, vol. 15, iss. 1–2, pp. 57–71. DOI: 10.1002/isaf.285.
24. Gilli M., Këllezi E. The threshold accepting heuristic for index tracking. *Financial Engineering, E-Commerce and Supply Chain*. Dordrecht, Kluwer, 2009, pp. 1–18. DOI: 10.1007/978-1-4757-5226-7_1.
25. Gilli M., Winker P. Heuristic optimization methods in econometrics. *Handbook of Computational Econometircs*, eds. D. Beasley, E. Kontoghiorghes. Chichester, John Wiley & Sons, Ltd, 2009, pp. 81–120. DOI: 10.1002/9780470748916.ch3.
26. Krink T., Mittnik S., Paterlini S. Differential evolution and combinatorial search for constrained index tracking. *Ann. Oper. Res*, 2009, vol. 172, art. 153, pp. 153–176. DOI: 10.1007/s10479-009-0552-1.
27. Coleman T. F., Li Y., Henniger J. Minimizing tracking error while restricting the number of assets. *J. Risk.*, 2006, vol. 8, no. 4, pp. 33–56.
28. Mehlhorn K., Sanders P. *Algorithms and Data Structures*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2008. 300 p. DOI: 10.1007/978-3-540-77978-0.
29. Le T., An H., Mahdi M. Long-Short Portfolio Optimization Under Cardinality Constraints by Difference of Convex Functions Algorithm. *J. Optim. Theory Appl.*, 2014, vol. 161, iss. 1, pp. 199–224. DOI: 10.1007/s10957-012-0197-0.
30. Li Y., Yang X., ZHu S., Li D.-H. A hybrid approach for index tracking with practical constraints. *J. Ind. Manag. Optim.*, 2014, vol. 10, iss. 3, pp. 905–927. DOI: 10.3934/jimo.2014.10.905.
31. Cui T., Cheng S., Bai R. A combinatorial algorithm for the cardinality constrained portfolio optimization problem. *Proc. of the 2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2014*, 2014, vol. 18, iss. 1, art. 6900357, pp. 491–498.
32. Cesarone F., Scozzari A., Tardella F. A new method for mean-variance portfolio optimization with cardinality constraints. *Ann. Oper. Res.*, 2013, vol. 205, iss. 1, pp. 213–234. DOI: 10.1007/s10479-012-1165-7.
33. Gilli M., Schumann E. Heuristic optimisation in financial modeling. *Ann. Oper. Res.*, 2012, vol. 193, iss. 1, pp. 129–158. DOI: 10.1007/s10479-011-0862-y.
34. Das A., Kempe D. Submodular meets spectral: Greedy algorithms for subset selection, sparse approximation and dictionary selection. *Proc. of the 28th Intern. Conf. on Machine Learning (ICML-11)*. New York, USA, ACM, 2011, pp. 1057–1064.
35. Jeurissen R. A hybrid genetic algorithm to track the dutch AEX-index. *Bachelor's thesis, Informatics & Economics*, Erasmus Univ. Rotterdam, 2005. 36 p. Available at: https://ru.scribd.com/document/125079765/Jeurissen-Roland-A-Hybrid-Genetic-Algorithm-to-Track-the-Dutch-AEX-Index-2005 (Accessed 10 July 2016).
36. Jeurissen R., van den Berg J. Optimized index tracking using a hybrid genetic algorithm. *Proc. IEEE World Congr. Evolutionary Computation (CEC2008)*, 2008, pp. 2327–2334. DOI: 10.1109/CEC.2008.4631108.
37. Maringer D. *Portfolio Management with Heuristic Optimization*. Advances in Comput. Manag. Sci., vol. 8. Berlin, Springer, 2005. 223 p. DOI: 10.1007/b136219.
38. DeMiguel V., Garlappi L., Francisco J. A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms. *Management Science*, 2009, vol. 55, iss. 5, pp. 798–812.
39. Giuzio M., Ferrari D., Paterlini S. Sparse and robust normal and t-portfolios by penalized L_q-likelihood minimization. *EJOR*, 2016, vol. 250, iss. 1, pp. 251–261. DOI: 10.1016/j.ejor.2015.08.056.

40. Fastrich B., Paterlini S., Winker P. Cardinality versus q-norm constraints for index tracking. *Quantitative Finance*, 2014, vol. 14, iss. 11, pp. 2019–2032. DOI: 10.1080/14697688.2012.691986.
41. Xu F., Xu Z., Xue H. *Sparse index tracking: an $L_{1/2}$ regularization based model and solution*. Working Paper, 2012, arXiv:1506.05867, pp. 1–19.
42. Ruiz-Torrubiano R., Suárez A. A memetic algorithm for cardinality-constrained portfolio optimization with transaction costs. *Appl. Soft Comput.*, 2015, vol. 36, pp. 125–142. DOI: 10.1016/j.asoc.2015.06.053.
43. Xu F., Lu Z., Xu Z. An efficient optimization approach for a cardinality-constrained index tracking problem. *Optimization Methods and Software*, 2016, vol. 31, iss. 2, pp. 258–271. DOI: 10.1080/10556788.2015.1062891.
44. Yen Y.-M., Yen T.-J. Solving norm constrained portfolio optimization via coordinate-wise descent algorithms. *Comput. Statist. & Data Anal.*, 2014, vol. 76, pp. 737–759. DOI: 10.1016/j.csda.2013.07.010.
45. Yen Y.-M. Sparse Weighted-Norm Minimum Variance Portfolios. *Review of Finance*, 2015, vol. 20, iss. 3, pp. 1259–1287. DOI: 10.1093/rof/rfv024.
46. Xidonas P., Mavrotas G., Psarras J. Portfolio management within the frame of multiobjective mathematical programming: a categorised bibliographic study. *Intern. J. Oper. Res.*, 2010, vol. 8, iss. 1, pp. 21–41. DOI: 10.1504/IJOR.2010.033102.
47. Brito R. P., Vicente L. N. Efficient cardinality/mean-variance portfolios. *System Modeling and Optimization*, IFIP International Federation for Information Processing, vol. 443. Berlin, Heidelberg, Springer, 2014, pp. 52–73. DOI: 10.1007/978-3-662-45504-3_6.
48. Gao J., Li D. Optimal Cardinality Constrained Portfolio Selection. *Operations Research*, 2013, vol. 61, iss. 3, pp. 745–761. DOI: 10.1287/opre.2013.1170.
49. Ye T.,Fang S, Deng Z., Jin Q. Cardinality constrained portfolio selection problem: A completely positive programming approach. *J. Ind. Manag. Optim.*, 2016, vol. 12, iss. 3, pp. 1041–1056. DOI: 10.3934/jimo.2016.12.1041.
50. Tibshirani R. Regression Shrinkage and Selection via the Lasso. *J. Royal Statist. Soc.: Ser. B (Statistical Methodology)*, 1996, vol. 58, no. 1, pp. 267–288. DOI: 10.1111/j.1467-9868.2011.00771.x.
51. Becker S., Candes E. J., Grant M. Templates for convex cone problems with applications to sparse signal recovery. *Mathematical Programming Computation*, 2011, vol. 3, iss. 3, art. 165, pp. 165–218. DOI: 10.1007/s12532-011-0029-5.
52. Storn R., Price K. Differential Evolution — A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces. *J. Global Optimization*, 1997, vol. 11, iss. 4, pp. 341–359. DOI: 10.1023/A:1008202821328.
53. Price K., Storn R. M., Lampinen J. A. *Differential evolution: a practical approach to global optimization*. Berlin, Springer, 2005. 539 p.
54. Andriosopoulos K., Doumpos M., Papapostolou N. C., Pouliasis P. K. Portfolio optimization and index tracking for the shipping stock and freight markets using evolutionary algorithms. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2013, vol. 52, spec. iss. : Maritime Financial Management, pp. 16–34. DOI: 10.1016/j.tre.2012.11.006.
55. Beasley J. E. *OR-Library*. Available at: http://people.brunel.ac.uk/ mastjjb/jeb/orlib/indtrackinfo.html (Accessed 11 April 2016).

Cite this article as:
Faizliev A. R., Khomchenko A. A., Sidorov S. P. Empirical Analysis of Algorithms for Solving the Index Tracking Problem. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 101–124 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-101-124.