УДК 517.15

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ, ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫХ ПОЛИНОМАМИ ЛАГЕРРА

Р. М. Гаджимирзаев

Гаджимирзаев Рамис Махмудович, младший научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, 367025, Россия, Махачкала, М. Гаджиева, 45, ramis3004@gmail.com

В настоящей работе рассматривается система полиномов $l_{r,n}^{\alpha}(x)$ (r — натуральное число, $n = 0, 1, \ldots$), ортонормированная относительно скалярного произведения типа Соболева (полиномы, ортонормированные по Соболеву) следующего вида: $\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^{\infty} f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x)\,dx$ и порожденная классическими ортонормированными полиномами Лагерра. Для системы полиномов $l_{r,n}^{\alpha}(x)$, ортонормирванной по Соболеву, получены рекуррентные соотношения, которые могут быть использованы для изучения различных свойств этих полиномов и вычисления их значений при любых x и n. Кроме того, рассматривается система функций Лагерра $\mu_n^{\alpha}(x) = \sqrt{\rho(x)}l_n^{\alpha}(x)$, которая порождает систему функций $\mu_{r,n}^{\alpha}(x)$, ортонормированную относительно скалярного произведения следующего вида $\langle \mu_{r,n}^{\alpha}, \mu_{r,k}^{\alpha}\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1}(\mu_{r,n}^{\alpha}(x))^{(\nu)}|_{x=0}(\mu_{r,k}^{\alpha}(x))^{(\nu)}|_{x=0} + \int_0^{\infty}(\mu_{r,n}^{\alpha}(x))^{(r)}(\mu_{r,k}^{\alpha}(x))^{(r)}\,dx$. Для порожденной системы функций $\mu_{r,n}^{\alpha}(x)$ также получены рекуррентные соотношения при $\alpha = 0$.

Ключевые слова: полиномы Лагерра, скалярное произведение типа Соболева, полиномы, ортонормированные по Соболеву, функции Лагерра.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-17-24

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы существенное развитие получила (см. работы [1–9] и приведённую в них библиографию) теория полиномов, ортогональных относительно скалярных произведений соболевского типа (полиномы, ортогональные по Соболеву). Скалярные произведения соболевского типа характеризуются тем, что они включают в себя слагаемые, которые «контролируют» поведение соответствующих ортогональных полиномов в заданной системе точек. В некоторых случаях полиномы, ортогональные по Соболеву на отрезке $[a, b]$, могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого отрезка. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпадали в концах отрезка $[a, b]$ с её значениями $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на промежутке (a, b) весом полиномы этим свойством не обладают.

В настоящей работе рассматривается система полиномов $l_{r,n}^{\alpha}(x)$ (r — натуральное число, $n = 0, 1, \ldots$), введенная в [1, 2], ортонормированная при $\alpha > -1$ относительно скалярного произведения Соболева следующего вида:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^{\infty} f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x)\,dx, \tag{1}$$

где $\rho(x)$ — весовая функция, определенная равенством

$$\rho(x) = x^\alpha e^{-x}.$$

Полиномы $l_{r,n}^\alpha(x)$, порожденные классическими ортонормированными полиномами Лагерра $l_n^\alpha(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, определяются [1, 2] с помощью равенств (11) и (12). В настоящей статье для полиномов $l_{r,n}^\alpha(x)$ получены рекуррентные соотношения, которые могут быть использованы для изучения различных свойств этих полиномов и вычисления их значений при любых x и n.

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ ЛАГЕРРА

При получении рекуррентных формул для полиномов, ортонормированных по Соболеву, порождённых полиномами Лагерра, нам понадобится некоторые свойства самих полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$, которые приведём в этом пункте.

Пусть α — произвольное действительное число. Тогда для полиномов Лагерра имеют место [10]:

формула Родрига

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \left\{x^{n+\alpha} e^{-x}\right\}^{(n)};$$

явный вид

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}; \tag{2}$$

соотношение ортогональности

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x)\, dx = \delta_{nm} h_n^\alpha \quad (\alpha > -1), \tag{3}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера,

$$h_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} \Gamma(\alpha+1);$$

равенства

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x); \tag{4}$$

$$L_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n-1}^{\alpha+1}(x); \tag{5}$$

рекуррентная формула

$$\left.\begin{array}{c} L_0^\alpha(x) = 1, \quad L_1^\alpha(x) = -x + \alpha + 1, \\ nL_n^\alpha(x) = (-x + 2n + \alpha - 1) L_{n-1}^\alpha(x) - (n + \alpha - 1) L_{n-2}^\alpha(x), \quad n = 2, 3, \ldots \end{array}\right\}. \tag{6}$$

Из (3) следует, что соответствующая ортонормированная система полиномов Лагерра имеет вид

$$l_n^\alpha(x) = (h_n^\alpha)^{-\frac{1}{2}} L_n^\alpha(x), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

т.е.

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} l_n^\alpha(x) l_m^\alpha(x)\, dx = \delta_{nm} \quad (\alpha > -1).$$

Равенства (2) и (7) дают следующий явный вид для $l_n^\alpha(x)$:

$$l_n^\alpha(x) = \frac{1}{(h_n^\alpha)^{\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}. \tag{8}$$

Из (6) и (7) легко можно получить рекуррентную формулу для ортонормированных полиномов Лагерра $l_n^\alpha(x)$:

$$\left.\begin{aligned} l_0^\alpha(x) = \frac{1}{(\Gamma(\alpha+1))^{\frac{1}{2}}}, \quad l_1^\alpha(x) = \frac{-x+\alpha+1}{(\Gamma(\alpha+2))^{\frac{1}{2}}}, \\ l_n^\alpha(x) = (a_n^\alpha - b_n^\alpha x) l_{n-1}^\alpha(x) - c_n^\alpha l_{n-2}^\alpha(x), \quad n = 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

где

$$a_n^\alpha = \frac{2n+\alpha-1}{[n(n+\alpha)]^{\frac{1}{2}}}, \quad b_n^\alpha = \frac{1}{[n(n+\alpha)]^{\frac{1}{2}}}, \quad c_n^\alpha = \left[\frac{(n-1)(n+\alpha-1)}{n(n+\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, через $\mu_n^\alpha(x)$ обозначим функции Лагерра, которые задаются следующим образом:

$$\mu_n^\alpha(x) = (\rho(x))^{\frac{1}{2}} l_n^\alpha(x) \ (n = 0, 1, \ldots). \tag{10}$$

Они ортонормированы на множестве $[0, \infty)$ с единичным весом, т.е.

$$\langle \mu_n^\alpha, \mu_k^\alpha \rangle = \int_0^\infty \mu_n^\alpha(x) \mu_k^\alpha(x) = \delta_{nk} \quad (\alpha > -1).$$

Так как функции $\mu_n^\alpha(x)$ отличаются от полиномов $l_n^\alpha(x)$ множителем, не зависящим от номера функции, следовательно, аналогичная рекуррентная формула справедлива и для функций $\mu_n^\alpha(x)$:

$$\left.\begin{aligned} \mu_0^\alpha(x) = \frac{(\rho(x))^{\frac{1}{2}}}{(\Gamma(\alpha+1))^{\frac{1}{2}}}, \quad \mu_1^\alpha(x) = \frac{(\rho(x))^{\frac{1}{2}}(-x+\alpha+1)}{(\Gamma(\alpha+2))^{\frac{1}{2}}}, \\ \mu_n^\alpha(x) = (a_n^\alpha - b_n^\alpha x) \mu_{n-1}^\alpha(x) - c_n^\alpha \mu_{n-2}^\alpha(x), \quad n = 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\}.$$

2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ, ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫХ ПОЛИНОМАМИ ЛАГЕРРА

Пусть $\alpha > -1$, $\rho = \rho(x) = e^{-x} x^\alpha$, L_ρ^2 — пространство измеримых функций f, определенных на полуоси $[0, \infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{L_\rho^2} = \left(\int_0^\infty f^2(x) \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Через $W_{L_\rho^2}^r$ обозначим подкласс функций f, непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a, b] \subset [0, \infty)$, а $f^{(r)} \in L_\rho^2$. В пространстве $W_{L_\rho^2}^r$ мы введем скалярное произведение (1).

Ортонормированная система полиномов Лагерра $l_n^\alpha(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ порождает [1, 2] на $[0, \infty)$ систему полиномов $l_{r,n}^\alpha(x)$ (r — натуральное число, $n = 0, 1, \ldots$), определенных равенствами

$$l_{r,r+n}^\alpha(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1} l_n^\alpha(t)\,dt, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{11}$$

$$l_{r,n}^\alpha(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots, r-1. \tag{12}$$

В работе [2] доказана следующая теорема

Теорема A. *Если $\alpha > -1$, то система полиномов $l_{r,n}^\alpha(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, порожденная полиномами Лагерра $l_n^\alpha(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ посредством равенств* (11) *и* (12), *полна в $W^r_{L^2_\rho}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (1).

Кроме того, в [1, 2] получены следующие представления для полиномов $l_{r,r+n}^\alpha(x)$:

$$l_{r,n+r}^\alpha(x) = \frac{1}{(h_n^\alpha)^{\frac{1}{2}}}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n+\alpha}{n-\nu}\frac{x^{\nu+r}}{\nu!(\nu+r)^{[r]}}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{13}$$

$$l_{r,r+n}^\alpha(x) = \frac{(-1)^r}{(h_n^\alpha)^{\frac{1}{2}}}\left[L_{n+r}^{\alpha-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{B_{n,\nu}^\alpha x^\nu}{\nu!}\right],$$

где

$$B_{n,\nu}^\alpha = \{L_{n+r}^{\alpha-r}(x)\}_{x=0}^{(\nu)} = \frac{(-1)^\nu\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(n+r-\nu)!}.$$

Сравнивая равенства (8) и (13) замечаем, что порожденные полиномы $l_{r,r+n}^\alpha(x)$ при $r = 0$ совпадают с классическими полиномами Лагерра $l_n^\alpha(x)$.

В свою очередь, система функций Лагерра $\mu_n^\alpha(x)$, определенная равенством (10), порождает на $[0, \infty)$ систему функций $\mu_{r,n}^\alpha(x)$ (r — натуральное число, $n = 0, 1, \ldots$) посредством равенств

$$\mu_{r,r+n}^\alpha(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1}\mu_n^\alpha(t)\,dt, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

$$\mu_{r,n}^\alpha(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots, r-1. \tag{15}$$

В качестве следствия теоремы 1 из работы [1] можно сформулировать следующее

Следствие 1. *Если $\alpha > -1$, то система функций $\mu_{r,n}^\alpha(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, порожденная функциями Лагерра $\mu_n^\alpha(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ посредством равенств* (14) *и* (15), *полна в $W^r_{L^2_1}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения*

$$\langle\mu_{r,n}^\alpha, \mu_{r,k}^\alpha\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1}(\mu_{r,n}^\alpha(x))^{(\nu)}|_{x=0}(\mu_{r,k}^\alpha(x))^{(\nu)}|_{x=0} + \int_0^\infty (\mu_{r,n}^\alpha(x))^{(r)}(\mu_{r,k}^\alpha(x))^{(r)}\,dx.$$

3. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ $l^{\alpha}_{r,r+n}(x)$

Хорошо известно, что в исследовании систем ортогональных полиномов важную роль играют рекуррентные соотношения, которые являются одним из способов задания систем ортогональных полиномов. Здесь будут получены рекуррентные соотношения для полиномов $l^{\alpha}_{r,n}(x)$, которые могут быть использованы для изучения различных свойств этих полиномов и вычисления их значений при любых x и n.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

$$l^{\alpha}_{r,n}(x) = \frac{x}{n} l^{\alpha}_{r,n-1}(x), \quad 1 \leqslant n \leqslant r-1; \tag{16}$$

$$l^{\alpha}_{r,r}(x) = \frac{x}{r} l^{\alpha}_{r-1,r-1}(x), \quad r \geqslant 1; \tag{17}$$

$$l^{\alpha}_{1,n+1}(x) = -\sqrt{\frac{n+\alpha+1}{n+1}} l^{\alpha}_{n+1}(x) + l^{\alpha}_{n}(x) + \sqrt{\frac{n+\alpha+1}{n+1}} l^{\alpha}_{n+1}(0) - l^{\alpha}_{n}(0), \quad n \geqslant 1; \tag{18}$$

$$\begin{gathered} b^{\alpha}_{n} r l^{\alpha}_{r+1,r+n}(x) = \\ = l^{\alpha}_{r,r+n}(x) + \left[b^{\alpha}_{n} x - a^{\alpha}_{n}\right] l^{\alpha}_{r,r+n-1}(x) + c^{\alpha}_{n} l^{\alpha}_{r,r+n-2}(x), \quad r \geqslant 1, \quad n = 2, 3, \ldots, \end{gathered} \tag{19}$$

где

$$a^{\alpha}_{n} = \frac{2n+\alpha-1}{[n(n+\alpha)]^{\frac{1}{2}}}, \quad b^{\alpha}_{n} = \frac{1}{[n(n+\alpha)]^{\frac{1}{2}}}, \quad c^{\alpha}_{n} = \left[\frac{(n-1)(n+\alpha-1)}{n(n+\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Равенство (16) очевидно, а (17) следует из (11) при $n = 0$. Докажем соотношение (18). Из определения полиномов $l^{\alpha}_{r,r+n}(x)$ и равенств (4), (5) следует, что

$$\begin{gathered} l^{\alpha}_{1,n+1}(x) = \int_0^x l^{\alpha}_{n}(t)\,dt = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} \int_0^x (l^{\alpha-1}_{n+1}(t))'\,dt = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(l^{\alpha-1}_{n+1}(x) - l^{\alpha-1}_{n+1}(0)\right) = \\ = -\sqrt{\frac{n+\alpha+1}{n+1}} l^{\alpha}_{n+1}(x) + l^{\alpha}_{n}(x) + \sqrt{\frac{n+\alpha+1}{n+1}} l^{\alpha}_{n+1}(0) - l^{\alpha}_{n}(0). \end{gathered}$$

Теперь докажем справедливость равенства (19). По определению

$$l^{\alpha}_{r,r+n}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} l^{\alpha}_{n}(t)\,dt.$$

Подставляя в последнее равенство вместо $l^{\alpha}_{n}(t)$ правую часть соотношения (9), получим:

$$\begin{gathered} l^{\alpha}_{r,r+n}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} \left[(a^{\alpha}_{n} - b^{\alpha}_{n} t) l^{\alpha}_{n-1}(t) - c^{\alpha}_{n} l^{\alpha}_{n-2}(t)\right]\,dt = \\ = a^{\alpha}_{n} l^{\alpha}_{r,r+n-1}(x) - \frac{b^{\alpha}_{n}}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} t\, l^{\alpha}_{n-1}(t)\,dt - c^{\alpha}_{n} l^{\alpha}_{r,r+n-2}(x). \end{gathered} \tag{20}$$

Отдельно рассмотрим второе слагаемое правой части равенства (20):

$$\frac{b_n^\alpha}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1} t l_{n-1}^\alpha(t)\,dt = -\frac{b_n^\alpha}{(r-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}(x-t-x) l_{n-1}^\alpha(t)\,dt =$$

$$= b_n^\alpha x l_{r,r+n-1}^\alpha(x) - \frac{b_n^\alpha r}{r!}\int\limits_0^x (x-t)^r l_{n-1}^\alpha(t)\,dt = b_n^\alpha x l_{r,r+n-1}^\alpha(x) - b_n^\alpha r l_{r+1,r+n}^\alpha(x). \qquad (21)$$

Подставляя (21) в (20) и приводя подобные слагаемые, получим (19). $\square$

Для функций $\mu_{r,r+n}^\alpha(x)$ мы приведем аналогичные рекуррентные соотношения при $\alpha = 0$:

$$\mu_{r,r}^0(x) = \frac{2x^{r-1}}{(r-1)!} - 2\mu_{r-1,r-1}^0(x), \quad r \geqslant 1;$$

$$\mu_{1,n+2}^0(x) = -\mu_{1,n+1}^0(x) - 2(\mu_{n+1}^0(x) - \mu_n^0(x)) \quad n \geqslant 0;$$

$$\mu_{r+1,r+n}^0(x) = \frac{n}{r}\mu_{r,r+n}^0(x) +$$

$$+\left[\frac{x}{r} - \frac{2n-1}{r}\right]\mu_{r,r+n-1}^0(x) + \frac{n-1}{r}\mu_{r,r+n-2}^0(x), \quad r \geqslant 1, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Библиографический список

1. *Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д., Гаджимирзаев Р. М.* Системы функций, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева с дискретными массами, порожденных классическими ортогональными системами // Дагестанские электронные математические известия. 2016. Вып. 6. С. 31–60.
2. *Шарапудинов И. И., Магомед-Касумов М. Г.* О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 1. С. 51–68.
3. *Marcellán F., Xu Y.* On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Math. 2015. Vol. 33, iss. 3. P. 308–352. DOI: 10.1016/j.exmath.2014.10.002.
4. *Pérez T. E., Piñar M. A., Xu Y.* Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball // J. Approx. Theory. 2013. Vol. 171. P. 84–104. DOI: 10.1016/j.jat.2013.03.004.
5. *Delgado A. M., Fernández L., Lubinsky D. S., Pérez T. E., Piñar M. A.* Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball via outward normal derivatives // J. Math. Anal. and Appl. 2016. Vol. 440, iss. 2. P. 716–740. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.03.041.
6. *Fernández L., Marcellán F., Pérez T. E., Piñar M. A., Xu Y.* Sobolev orthogonal polynomials on product domains // J. Comput. and Appl. Math. 2015. Vol. 284. P. 202–215. DOI: 10.1016/j.cam.2014.09.015.
7. *Lopez G., Marcellán F., Van Assche W.* Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product // Constr. Approx. 1995. Vol. 11, iss. 1. P. 107–137. DOI: 10.1007/BF01294341.
8. *Шарапудинов И. И., Шарапудинов Т. И.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Матем. 2017. № 8. С. 67–79.
9. *Гаджимирзаев Р. М.* Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 388–395. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-388-395.
10. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М. : Физматгиз, 1962. 500 с.

Образец для цитирования:
Гаджимирзаев Р. М. Рекуррентные соотношения для полиномов, ортонормированных по Соболеву, порожденных полиномами Лагерра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 17–24. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-17-24.

Recurrence Relations for Polynomials Orthonormal on Sobolev, Generated by Laguerre Polynomials

R. M. Gadzhimirzaev

Ramis M. Gadzhimirzaev, https://orcid.org/0000-0002-6686-881X, Dagestan Scientific Center, Russian Academy of Sciences, 45, Gadjieva Str., Makhachkala, Russia, 367025, ramis3004@gmail.com

In this paper we consider the system of polynomials $l_{r,n}^{\alpha}(x)$ (r — natural number, $n = 0, 1, \ldots$), orthonormal with respect to the Sobolev inner product (Sobolev orthonormal polynomials) of the following type $\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^{\infty} f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)\,dt$ and generated by the classical orthonormal Laguerre polynomials. Recurrence relations are obtained for the system of Sobolev orthonormal polynomials, which can be used for studying various properties of these polynomials and calculate their values for any x and n. Moreover, we consider the system of the Laguerre functions $\mu_n^{\alpha}(x) = \sqrt{\rho(x)}l_n^{\alpha}(x)$, which generates a system of functions $\mu_{r,n}^{\alpha}(x)$ orthonormal with respect to the inner product of the following form $\langle \mu_{r,n}^{\alpha}, \mu_{r,k}^{\alpha}\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1}(\mu_{r,n}^{\alpha}(x))^{(\nu)}|_{x=0}(\mu_{r,k}^{\alpha}(x))^{(\nu)}|_{x=0} + \int_0^{\infty}(\mu_{r,n}^{\alpha}(x))^{(r)}(\mu_{r,k}^{\alpha}(x))^{(r)}\,dx$. For the generated system of functions $\mu_{r,n}^{\alpha}(x)$, recurrence relations for $\alpha = 0$ are also obtained.

Key words: Laguerre polynomials, Sobolev-type inner product, Sobolev orthonormal polynomials, Laguerre functions.

References

1. Sharapudinov I. I., Gadzhieva Z. D., Gadzhimirzaev R. M. Systems of functions orthogonal with respect to scalar products of Sobolev type with discrete masses generated by classical orthogonal systems. *Daghestan Electronic Mathematical Reports*, 2016, iss. 6, pp. 31–60 (in Russian).
2. Sharapudinov I. I., Magomed-Kasumov M. G. Cauchy problem solution representation by Fourier series of polynomials, orthogonal on Sobolev, generated by Laguerre polynomials. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 51–68.
3. Marcellán F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials. *Expositiones Math.*, 2015, vol. 33, iss. 3, pp. 308–352. DOI: 10.1016/j.exmath.2014.10.002.
4. Pérez T. E., Piñar M. A., Xu Y. Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball. *J. Approx. Theory*, 2013, vol. 171, pp. 84–104. DOI: 10.1016/j.jat.2013.03.004.
5. Delgado A. M., Fernández L., Lubinsky D. S., Pérez T. E., Piñar M. A. Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball via outward normal derivatives. *J. Math. Anal. and Appl.*, 2016, vol. 440, iss. 2, pp. 716–740. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.03.041.
6. Fernández L., Marcellán F., Pérez T. E., Piñar M. A., Xu Y. Sobolev orthogonal polynomials on product domains. *J. Comput. and Appl. Math.*, 2015, vol. 284, pp. 202–215. DOI: 10.1016/j.cam.2014.09.015.
7. Lopez G., Marcellán F., Van Assche W. Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product. *Constr. Approx.*, 1995, vol. 11, iss. 1, pp. 107–137. DOI: 10.1007/BF01294341.

8. Sharapudinov I. I., Sharapudinov T. I. Polynomials orthogonal in the Sobolev sense, generated by Chebyshev polynomials orthogornal on a mesh. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2017, vol. 61, no. 8, 59–70. DOI: 10.3103/S1066369X17080072.
9. Gadzhimirzaev R. M. The Fourier series of the Meixner polynomials orthogonal with respect to the Sobolev-type inner product. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 388–395 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-388-395.
10. Szego G. *Orthogonal Polynomials*. AMS Colloq. Publ., 1939, vol. 23. 440 p.

Cite this article as:
Gadzhimirzaev R. M. Recurrence Relations for Polynomials Orthonormal on Sobolev, Generated by Laguerre Polynomials. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 17–24 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-17-24.