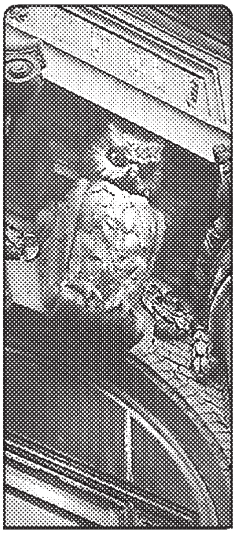

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.521.2

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Г. Г. Акниев

Акниев Гасан Гарунович, младший научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, 367025, Россия, Махачкала, М. Гаджиева, 45, hasan.akniyev@gmail.com

Для заданного натурального числа $N \geqslant 2$ на отрезке $[0, 2\pi]$ выбрано N равноотстоящих узлов $t_k = 2\pi k/N$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$. Для каждого натурального числа n, удовлетворяющего неравенству $1 \leqslant n \leqslant \lfloor N/2 \rfloor$, обозначим через $L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f, x)$ тригонометрический полином порядка n наименьшего квадратического отклонения от функции f в точках t_k, который доставляет минимум сумме $\sum_{k=0}^{N-1} |f(t_k) - T_n(t_k)|^2$ среди всех тригонометрических полиномов T_n порядка n. Рассмотрена задача о приближении кусочно-линейных периодических функций полиномами $L_{n,N}(f, x)$. На конкретных примерах показано, что полиномы $L_{n,N}(f, x)$ приближают кусочно-линейную непрерывную периодическую функцию со скоростью $O(1/n)$ равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$ и $1 \leqslant n \leqslant N/2$, а также приближают такую функцию $f(x)$ со скоростью $O(1/n^2)$ вне сколь угодно малых окрестностей, содержащих точки «излома» рассматриваемой ломаной $f(x)$. Кроме того, на примерах показано, что полиномы $L_{n,N}(f, x)$ приближают кусочно-линейную разрывную функцию со скоростью $O(1/n)$ вне сколь угодно малых окрестностей, сожержащих точки разрыва $f(x)$. Особое внимание уделено приближению полиномами $L_{n,N}(f, x)$ 2π-периодических функций f_1 и f_2, которые на отрезке $[-\pi, \pi]$ совпадают с функциями $|x|$ и $\operatorname{sign} x$ соответственно. Для первой из этих функций показано, что вместо оценки $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1, x)| \leqslant c \ln n/n$, вытекающей из известного неравенства Лебега для полиномов $L_{n,N}(f, x)$, установлена точная по порядку оценка $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1, x)| \leqslant c/n$ $(x \in \mathbb{R})$, которая имеет место равномерно относительно $1 \leqslant n \leqslant \lfloor N/2 \rfloor$. Кроме того, получена локальная оценка $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1, x)| \leqslant c(\varepsilon)/n^2$ $(|x - \pi k| \geqslant \varepsilon)$, которая также имеет место равномерно относительно $1 \leqslant n \leqslant \lfloor N/2 \rfloor$. Что касается второй из указанных функций $f_2(x)$, то для нее равномерно относительно $1 \leqslant n \leqslant \lfloor N/2 \rfloor$ получена оценка $|f_2(x) - L_{n,N}(f_2, x)| \leqslant$ $\leqslant c(\varepsilon)/n$ ($|x - \pi k| \geqslant \varepsilon$). Доказательства полученых оценок базируются на сравнении аппроксимативных свойств дискретных и непрерывных тригонометрических сумм Фурье.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, кусочно-линейные функции, приближение функций, тригонометрические полиномы, ряды Фурье.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-4-16

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $N \geqslant 2$ — целое положительное число, и $t_k = 2\pi k/N$, $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$ — система узловых точек. Обозначим через $L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f, x)$, где $1 \leqslant n \leqslant \lfloor N/2 \rfloor$, тригонометрический полином порядка n наименьшего квадратического отклонения от функции f на сетке $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$. Другими словами, полином $L_{n,N}(f, x)$ доставляет минимум для суммы $\sum_{k=0}^{N-1} |f(t_k) - T_n(t_k)|^2$ на множестве всех тригонометрических полиномов T_n порядка n. В частности, $L_{\lfloor N/2 \rfloor, N}(f, x)$ — интерполяционный полином, совпадающий с функцией $f(x)$ в точках t_k. Легко показать (см. [1]), что $L_{n,N}(f, x)$ при $n < N/2$ представляется в виде

$$L_{n,N}(f, x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu^{(N)}(f) e^{i\nu x}, \text{ где } c_\nu^{(N)}(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i\nu t_k},$$

а когда $n = N/2$ (когда N — чётное)

$$L_{N/2,N}(f, x) = L_{N/2-1,N}(f, x) + a_n^{(2n)}(f) \cos nx, \tag{1}$$

где

$$a_n^{(2n)}(f) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(t_k) \cos nt_k. \tag{2}$$

Подробнее о приближении функций тригонометрическими полиномами можно почитать в работах [2–11]. Целью данной работы является исследование поведения величин $|L_{n,N}(f_1, x) - f_1(x)|$ и $|L_{n,N}(f_2, x) - f_2(x)|$ при $n, N \to \infty$ для функций $f_1(x) = |x|$ и $f_2(x) = \operatorname{sign} x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Для этого воспользуемся одной леммой, доказанной в [1]. Предварительно введём некоторые обозначения, а именно обозначим через

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

коэффициенты Фурье функции f, а через

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}, \quad S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$$

— ряд Фурье функции f и его частичную сумму порядка n соответственно. Обозначим

$$\Delta^I(\varepsilon) = [-\pi + \varepsilon, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi - \varepsilon], \quad 0 < \varepsilon < \pi/2.$$

Кроме того, через C и $C(\varepsilon)$ мы будем обозначать некоторые положительные константы, зависящие только от указанных параметров, вообще говоря, разные в разных местах.

Лемма 1 (см. [1]). *Если ряд Фурье функции f сходится в точках $t_k = 2\pi k/N$, тогда имеет место представление*

$$L_{n,N}(f,x) = S_n(f,x) + R_{n,N}(f,x),$$

где $2n < N$ и

$$R_{n,N}(f,x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)\cos\mu Nt f(t)\,dt. \tag{3}$$

Из приведённой леммы следует, что при $n < N/2$

$$|L_{n,N}(f,x) - f(x)| \leqslant |S_n(f,x) - f(x)| + |R_{n,N}(f,x)|. \tag{4}$$

При чётном N возможен случай, когда $2n = N$, тогда из (1) и (4) можно записать

$$|L_{n,2n}(f,x) - f(x)| \leqslant |S_{n-1}(f,x) - f(x)| + |R_{n-1,2n}(f,x)| + |a_n^{(2n)}(f)|, \quad n = N/2. \tag{5}$$

В данной работе были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Для отклонения $L_{n,N}(f)$ от функции f_1, где $f_1(x) = |x|$ на $[-\pi,\pi]$ и $n \leqslant \lfloor N/2 \rfloor$, справедливы следующие оценки:*

$$|L_{n,N}(f_1,x) - f_1(x)| \leqslant \frac{C}{n}, \quad x \in [-\pi,\pi],$$

$$|L_{n,N}(f_1,x) - f_1(x)| \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{n^2}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

Теорема 2. *Для отклонения $L_{n,N}(f)$ от функции f_2, где $f_2(x) = sign\ x$ на $[-\pi,\pi]$ и $n \leqslant \lfloor N/2 \rfloor$, справедлива следующая оценка:*

$$|L_{n,N}(f,x) - f(x)| \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{n}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

Прежде чем приступить к доказательству данных теорем, мы докажем несколько вспомогательных утверждений. А именно из (4) и (5) видно, что для исследования поведения $|L_{n,N}(f,x) - f(x)|$ для функций f_1 и f_2 требуется изучить поведение величин $|S_n(f_1,x) - f_1(x)|$, $|S_n(f_2,x) - f_2(x)|$, $|R_{n,N}(f_1,x)|$ и $|R_{n,N}(f_2,x)|$, а также $|a_n^{(2n)}(f_1)|$ и $|a_n^{(2n)}(f_2)|$, что будет сделано в следующих пунктах.

1. ОЦЕНКА ДЛЯ $|S_n(f_i,x) - f_i(x)|$, $i = 0,1$, $n < N/2$

Лемма 2. *Для величины $|S_n(f_1,x) - f_1(x)|$, где $f_1(x) = |x|$, $x \in [-\pi,\pi]$, справедливы оценки*

$$|S_n(f_1,x) - f_1(x)| \leqslant \frac{C}{n}, \quad x \in [-\pi,\pi], \tag{6}$$

$$|S_n(f_1,x) - f_1(x)| \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{n^2}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon). \tag{7}$$

Лемма 3. *Для величины $|S_n(f_2,x) - f_2(x)|$, где $f_2(x) = sign\ x$, $x \in [-\pi,\pi]$, справедлива оценка*

$$|S_n(f_2,x) - f_2(x)| \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{n}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

Перейдем к доказательству данных лемм.

Доказательство (леммы 2). Из [12, с. 690] имеем формулу

$$f_1(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{8}$$

откуда, учитывая, что $|\cos(2k-1)x| \leqslant 1$, можно легко получить (6). С другой стороны, применив к (8) преобразование Абеля, легко получить (7). □

Доказательство леммы 3 получено в [13].

2. ОЦЕНКА ОСТАТКА $R_{n,N}(f_1, x)$

Справедлива следующая

Лемма 4. *Для $R_{n,N}(f_1, x)$ при $n < N/2$ справедливы оценки*

$$|R_{n,N}(f_1, x)| \leqslant \frac{\pi}{n}\left(4 + \frac{1}{2n}\right) \leqslant \frac{C}{n}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$|R_{n,N}(f_1, x)| \leqslant \frac{\pi}{n^2}\left(\frac{1}{6} + \frac{4}{|\sin\varepsilon|}\right) \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{n^2}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

Для доказательства данной леммы заметим, что остаток (3) для функции f_1 принимает следующий вид:

$$R_{n,N}(f_1, x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)\cos\mu N t|t|\,dt, \tag{9}$$

где

$$D_n(x-t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t) \tag{10}$$

— ядро Дирихле. Подставив формулу (10) в (9) имеем

$$|R_{n,N}(f_1, x)| \leqslant \left|R^1_{n,N}(f_1, x)\right| + \left|R^2_{n,N}(f_1, x)\right|, \tag{11}$$

где

$$R^1_{n,N}(f_1, x) = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\cos\mu N t\,dt, \tag{12}$$

$$R^2_{n,N}(f_1, x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\cos\mu N t\,dt. \tag{13}$$

Величины $|R_{n,N}(f_1, x)|$ и $|R_{n,N}(f_2, x)|$ оценены в следующих леммах.

Лемма 5. *Выражение* (12) *имеет следующую оценку при $n < N/2$:*

$$|R^1_{n,N}(f_1, x)| \leqslant \frac{\pi}{6n^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Лемма 6. *Выражение* (13) *имеет следующую оценку при* $n < N/2$*:*

$$|R^2_{n,N}(f_1, x)| \leqslant \frac{4\pi}{3n}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Лемма 7. *Выражение* (13) *имеет также следующую оценку при* $n < N/2$*:*

$$|R^2_{n,N}(f_1, x)| \leqslant \frac{4\pi}{n^2|\sin\varepsilon|}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

Перейдем к доказательству данных лемм.

Доказательство (леммы 5). В силу четности подынтегрального выражения можно переписать (12) в следующем виде:

$$R^1_{n,N}(f_1, x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi} t\cos\mu Nt\,dt.$$

Применив метод интегрирования по частям, получим:

$$R^1_{n,N}(f_1, x) = \frac{2}{\pi N^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu N} - 1}{\mu^2}.$$

Очевидно, что когда N — четное, $R^1_{n,N}(f_1, x) = 0$. Когда N — нечетное, сумма принимает следующий вид:

$$R^1_{n,N}(f_1, x) = -\frac{4}{\pi N^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\mu - 1)^2},$$

откуда

$$\left|R^1_{n,N}(f_1, x)\right| = \frac{1}{\pi N^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2(1 - \frac{1}{2\mu})^2} \leqslant \frac{4}{\pi N^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2} = \frac{2\pi}{3N^2} \leqslant \frac{\pi}{6n^2}. \qquad \square$$

Для доказательства лемм 6 и 7 нам понадобится доказать еще две леммы:

Лемма 8. *Выражение* (13) *можно представить в следующем виде:*

$$R^2_{n,N}(f_1, x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos kx\left[\frac{1}{(\mu N - k)^2} + \frac{1}{(\mu N + k)^2}\right]\left((-1)^{\mu N + k} - 1\right). \tag{14}$$

Доказательство. В (13) вынесем сумму из интеграла:

$$R^2_{n,N}(f_1, x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|\cos\mu Nt\cos k(x - t)\,dt. \tag{15}$$

Подставив в (15) формулу $\cos k(x - t) = \cos kx\cos kt + \sin kx\sin kt$, получим:

$$R^2_{n,N}(f_1, x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos kx\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|\cos\mu Nt\cos kt\,dt. \tag{16}$$

Рассмотрим подробнее интеграл из (16):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |t| \cos \mu N t \cos kt \, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |t| (\cos(\mu N - k)t + \cos(\mu N + k)t) dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} t \cos(\mu N - k)t \, dt + \int\limits_{0}^{\pi} t \cos(\mu N + k)t \, dt = \frac{(-1)^{\mu N - k} - 1}{(\mu N - k)^2} + \frac{(-1)^{\mu N + k} - 1}{(\mu N + k)^2}. \quad (17)$$

Из (16) и (17):

$$R^2_{n,N}(f_1, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \cos kx \left[\frac{1}{(\mu N - k)^2} + \frac{1}{(\mu N + k)^2} \right] \left((-1)^{\mu N + k} - 1 \right). \qquad \square$$

Лемма 9. *Справедлива следующая оценка:*

$$\left| \sum_{j=1}^{n} ((-1)^{M+j} - 1) \cos jx \right| \leqslant \frac{2}{|\sin x|}, \quad M \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Можно записать

$$\sum_{j=1}^{n} ((-1)^{M+j} - 1) \cos jx = \begin{cases} -2 \sum\limits_{k=1}^{l} \cos 2kx, & \text{если } M = 2m, \\ -2 \sum\limits_{k=0}^{l} \cos(2k+1)x, & \text{если } M = 2m+1. \end{cases} \quad (18)$$

Оценим каждый из случаев отдельно. Для этого проведем некоторые преобразования:

$$\sum_{k=1}^{l} \cos 2kx = \frac{1}{\sin x} \sum_{k=1}^{l} \sin x \cos 2kx = \frac{\sin(2l+1)x - \sin x}{2 \sin x}.$$

Отсюда имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{l} \cos 2kx \right| \leqslant \frac{1}{|\sin x|}. \quad (19)$$

Аналогично получаем формулу

$$\sum_{k=0}^{l} \cos(2k+1)x = \frac{\sin(2l+2)x}{2 \sin x},$$

откуда получаем оценку

$$\left| \sum_{k=1}^{l} \cos(2k+1)x \right| \leqslant \frac{1}{2|\sin x|} \leqslant \frac{1}{|\sin x|}. \quad (20)$$

Доказательство следует из (18)–(20). $\square$

Доказательство (леммы 6). Из формулы (14)

$$\left| R^2_{n,N}(f_1, x) \right| \leqslant \frac{4}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(\mu N - k)^2} + \frac{1}{(\mu N + k)^2} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(\mu N-n)^2}+\frac{1}{(\mu N+1)^2}\right] = \frac{4n}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(\mu N-n)^2}+\frac{1}{(\mu N+1)^2}\right] <$$
$$< \frac{4n}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(\mu N-n)^2}\right] = \frac{8n}{\pi N^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2}\frac{1}{(1-\frac{n}{\mu N})^2} \leqslant \frac{32n}{\pi N^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2} \leqslant \frac{4\pi}{3n}. \qquad \square$$

Доказательство (леммы 7). Рассмотрим внутреннюю сумму (14):

$$A = \sum_{k=1}^{n}\cos kx\left[\frac{1}{(\mu N-k)^2}+\frac{1}{(\mu N+k)^2}\right]\left((-1)^{\mu N+k}-1\right).$$

Применив к ней преобразование Абеля, получим:

$$A = \sum_{k=1}^{n}((-1)^{\mu N+k}-1)\cos kx\left(\frac{1}{(\mu N-n)^2}+\frac{1}{(\mu N+n)^2}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(\mu N-k)^2}+\frac{1}{(\mu N+k)^2}-\frac{1}{(\mu N-k-1)^2}-\frac{1}{(\mu N+k+1)^2}\right)\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{k}((-1)^{\mu N+j}-1)\cos kx$$

Оценим A:

$$|A| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n}((-1)^{\mu N+k}-1)\cos kx\right|\left(\frac{1}{(\mu N-n)^2}+\frac{1}{(\mu N+n)^2}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(\mu N-k)^2}+\frac{1}{(\mu N+k)^2}-\frac{1}{(\mu N-k-1)^2}-\frac{1}{(\mu N+k+1)^2}\right)\times$$
$$\times\left|\sum_{j=1}^{k}((-1)^{\mu N+j}-1)\cos kx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n}((-1)^{\mu N+k}-1)\cos kx\right|\left(\frac{1}{(\mu N-n)^2}+\frac{1}{(\mu N+n)^2}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(\mu N-k-1)^2}-\frac{1}{(\mu N-k)^2}+\frac{1}{(\mu N+k)^2}-\frac{1}{(\mu N+k+1)^2}\right)\times$$
$$\times\left|\sum_{j=1}^{k}((-1)^{\mu N+j}-1)\cos kx\right|. \tag{21}$$

Используя лемму 9, перепишем (21):

$$|A| \leqslant \frac{2}{|\sin x|}\left[\frac{1}{(\mu N-n)^2}+\frac{1}{(\mu N+n)^2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(\mu N-k-1)^2}-\frac{1}{(\mu N-k)^2}+\frac{1}{(\mu N+k)^2}-\frac{1}{(\mu N+k+1)^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{|\sin x|}\left(\frac{2}{(\mu N-n)^2} - \frac{1}{(\mu N-1)^2} + \frac{1}{(\mu N+1)^2}\right) \leqslant \frac{4}{|\sin x|(\mu N-n)^2}. \tag{22}$$

Из (14) и (22) можно записать оценку $R_{n,N}(f_1,x)$ в следующем виде:

$$|R_{n,N}(f_1,x)| \leqslant \frac{8}{\pi|\sin x|}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu N-n)^2} = \frac{8}{N^2\pi\sin x}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2}\frac{1}{(1-\frac{n}{\mu N})^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{16}{N^2\pi|\sin x|}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2} = \frac{16}{N^2\pi|\sin x|}\frac{\pi^2}{6} \leqslant \frac{4\pi}{n^2|\sin x|}, \quad x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi). \tag{23}$$

При $x\in\Delta^I(\varepsilon)$

$$|R_{n,N}(f_1,x)| \leqslant \frac{4\pi}{n^2|\sin\varepsilon|}.$$ □

Очевидно, что доказательство леммы 4 следует из формулы (11) и лемм 5–7.

3. ОЦЕНКА ОСТАТКА $R_{n,N}(f_2,x)$

Лемма 10. *Для $R_{n,N}(f_2,x)$ при $n<N/2$ справедлива оценка*

$$|R_{n,N}(f_2,x)| \leqslant \frac{2\pi}{n|\sin\varepsilon|} = \frac{C(\varepsilon)}{n}, \quad x\in\Delta^I(\varepsilon).$$

Повторяя описанные при доказательстве леммы 4 рассуждения, получим аналогично формуле (11) следующую формулу:

$$|R_{n,N}(f_2,x)| \leqslant \left|R^1_{n,N}(f_2,x)\right| + \left|R^2_{n,N}(f_2,x)\right|, \tag{24}$$

где

$$R^1_{n,N}(f_2,x) = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sign}\, t\cos\mu Nt\,dt,$$

$$R^2_{n,N}(f_2,x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sign}\, t\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\cos\mu Nt\,dt.$$

Очевидно, что

$$R^1_{n,N}(f_2,x) = 0, \quad x\in[-\pi,\pi], \tag{25}$$

оценка же для $R^2_{n,N}(f_2,x)$ будет получена в следующей лемме.

Лемма 11. *Справедлива оценка*

$$|R^2_{n,N}(f_2,x)| \leqslant \frac{2\pi}{n|\sin\varepsilon|}, \quad x\in\Delta^I(\varepsilon). \tag{26}$$

Перед доказательством данной леммы мы докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма 12. *Имеет место следующая оценка:*

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\sin jx(1-(-1)^{j+M})\right| \leqslant \frac{2}{|\sin x|},$$

где m и M — произвольные натуральные числа.

Доказательство. Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{m} \sin jx(1-(-1)^{j+M}) = \begin{cases} 2\sum\limits_{k=1}^{l} \sin 2kx, & \text{если } M = 2m, \\ 2\sum\limits_{k=0}^{l} \sin(2k+1)x, & \text{если } M = 2m+1. \end{cases}$$

Из равенств

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(2k+1)x = \frac{1-\cos 2(n+1)x}{2\sin x}, \quad \sum_{k=0}^{n} \sin 2kx = \frac{\cos x - \cos(2n+1)x}{2\sin x}$$

сразу следуют оценки

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \sin(2k+1)x\right| \leqslant \frac{1}{|\sin x|}, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} \sin 2kx\right| \leqslant \frac{1}{|\sin x|}. \qquad \square$$

Теперь перейдем к доказательству леммы 11.

Доказательство (леммы 11). Имеем

$$R^2_{n,N}(f_2,x) = \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign}\, t \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t)\cos \mu Nt\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos \mu Nt \operatorname{sign}\, t\,dt = \frac{4}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \sin kx \int_{0}^{\pi} \sin kt \cos \mu Nt\,dt =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \sin kx \int_{0}^{\pi} (\sin(k-\mu N)t + \sin(k+\mu N)t)\; dt. \tag{27}$$

Вычислим отдельно интеграл:

$$\int_{0}^{\pi} (\sin(k-\mu N)t + \sin(k+\mu N)t)\,dt = (1-(-1)^{k+\mu N})\frac{2k}{k^2-(\mu N)^2}. \tag{28}$$

Отсюда и из (27)

$$R^2_{n,N}(f_2,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \sin kx(1-(-1)^{k+\mu N})\frac{k}{k^2-(\mu N)^2}.$$

Применим к внутренней сумме преобразование Абеля:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx(1-(-1)^{k+\mu N})\frac{k}{k^2-(\mu N)^2} = \frac{n}{n^2-(\mu N)^2}\sum_{j=1}^{n} \sin jx(1-(-1)^{j+\mu N}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{k^2-(\mu N)^2} - \frac{k+1}{(k+1)^2-(\mu N)^2}\right)\sum_{j=1}^{k} \sin jx(1-(-1)^{j+\mu N}). \tag{29}$$

Из (27)–(29) получим

$$|R^2_{n,N}(f_2,x)| \leqslant \frac{8}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx(1-(-1)^{k+\mu N})\frac{k}{k^2-(\mu N)^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\left|\frac{n}{n^2-(\mu N)^2}\sum_{j=1}^{n}\sin jx(1-(-1)^{j+\mu N})\right| +\right.$$

$$\left. + \left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{k^2-(\mu N)^2}-\frac{k+1}{(k+1)^2-(\mu N)^2}\right)\sum_{j=1}^{k}\sin jx(1-(-1)^{j+\mu N})\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{n}{(\mu N)^2-n^2}\left|\sum_{j=1}^{n}\sin jx(1-(-1)^{k+\mu N})\right| +\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{k}{(\mu N)^2-k^2}-\frac{k+1}{(\mu N)^2-(k+1)^2}\right|\left|\sum_{j=1}^{k}\sin jx(1-(-1)^{k+\mu N})\right|\right).$$

Применив результаты леммы 12, получим:

$$|R^2_{n,N}(f_2,x)| \leqslant \frac{16}{\pi|\sin x|}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{n}{(\mu N)^2-n^2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+1}{(\mu N)^2-(k+1)^2}-\frac{k}{(\mu N)^2-k^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{16}{\pi|\sin x|}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{(\mu N)^2-n^2}-\frac{1}{(\mu N)^2-1}\right) < \frac{32n}{\pi|\sin x|}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu N)^2-n^2} =$$

$$= \frac{32}{\pi|\sin x|N^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2}\frac{1}{1-\left(\frac{n}{\mu N}\right)^2} \leqslant \frac{128n}{3\pi N^2|\sin x|}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2} < \frac{2\pi}{n|\sin x|}.$$

Очевидно, что

$$|R^2_{n,N}(f_2,x)| \leqslant \frac{2\pi}{n|\sin\varepsilon|}, \quad x\in\Delta^I(\varepsilon). \qquad \square$$

Доказательство леммы 10 следует из (24), (25) и (26).

4. ОЦЕНКА ВЕЛИЧИН $|a_n^{(2n)}(f_1)|$ И $|a_n^{(2n)}(f_2)|$

Справедлива лемма

Лемма 13. *Имеют место оценки*

$$|a_n^{(2n)}(f_1)| \leqslant \frac{\pi}{2n^2}, \quad |a_n^{(2n)}(f_2)| \leqslant \frac{1}{2n}.$$

Доказательство. Формула (2) для функции f_1 имеет следующий вид:

$$a_n^{(2n)}(f_1) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} f_1(t_k)\cos nt_k.$$

В силу 2π-периодичности функции f_1 мы имеем

$$a_n^{(2n)}(f_1) = \frac{1}{2n}\sum_{k=-n}^{n-1} f_1(t_k)(-1)^k = \frac{\pi}{2n^2}\sum_{k=-n}^{n-1}|k|\,(-1)^k = \begin{cases}0, & n=2l,\\ \frac{\pi}{2n^2} & n=2l+1.\end{cases} \tag{30}$$

Проведя аналогичные рассуждения для $a_n^{(2n)}(f_2)$, получим:

$$a_n^{(2n)}(f_2) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} f_2(t_k)\cos nt_k = \frac{1}{2n}\left(1-(-1)^n\right)\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k = \begin{cases} 0, & n = 2l, \\ -\frac{1}{2n} & n = 2l+1. \end{cases} \tag{31}$$

Учитывая формулы (30) и (31), приходим к утверждению леммы. □

5. ОЦЕНКИ ДЛЯ $|L_{n,N}(f_1,x) - f_1(x)|$ И $|L_{n,N}(f_2,x) - f_2(x)|$

Для оценки $|L_{n,N}(f_1,x) - f_1(x)|$ при $n < N/2$ мы обратимся к неравенству (4), из которого в силу лемм 2 и 4 мы убеждаемся в справедливости утверждения теоремы 1 для $n < N/2$. Если же $n = N/2$, то мы обратимся к неравенству (5). Величины $|S_{n-1}(f,x) - f(x)|$, $|R_{n-1,2n}(f,x)|$ и $|a_n^{(2n)}(f)|$, фигурирующие в этом неравенстве, были оценены в вышеупомянутых леммах 2, 4, а также лемме 13 соответственно. Из этих оценок и неравенства (5) имеем

$$|L_{n,2n}(f_1,x) - f_1(x)| \leqslant \frac{C}{n-1} + \frac{C}{n-1} + \frac{\pi}{2n^2} \leqslant \frac{C}{n}, \quad x \in [-\pi,\pi],$$

$$|L_{n,2n}(f_1,x) - f_1(x)| \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{(n-1)^2} + \frac{C(\varepsilon)}{(n-1)^2} + \frac{\pi}{2n^2} \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{n^2}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Повторяя почти дословно рассуждения из доказательства теоремы 1 и используя вместо лемм 2 и 4 леммы 3 и 10, имеем

$$|L_{n,N}(f_2,x) - f_2(x)| \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{n} + \frac{C(\varepsilon)}{n} + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{n}, \quad n \leqslant \lfloor N/2 \rfloor, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

Таким образом, теорема 2 также доказана.

Библиографический список

1. *Sharapudinov I. I.* On the best approximation and polynomials of the least quadratic deviation // Analysis Math. 1983. Vol. 9, iss. 3. P. 223–234. DOI: 10.1007/BF01989807.
2. *Бернштейн С. Н.* О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов // Докл. АН СССР. 1934. Т. 4, № 1. С. 1–5.
3. *Erdös P.* Some theorems and remarks on interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged). 1950. Vol. 12. P. 11–17.
4. *Калашников М. Д.* О полиномах наилучшего (квадратического) приближения в заданной системе точек // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105. С. 634–636.
5. *Крылов В. И.* Сходимость алгебраического интерполирования по корням многочлена Чебышева для абсолютно непрерывных фунций и функций с ограниченным изменением // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107. С. 362–365.
6. *Marcinkiewicz J.* Quelques remarques sur l'interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged). 1936. Vol. 8. P. 127–130.
7. *Marcinkiewicz J.* Sur la divergence des polynômes d'interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged). 1936. Vol. 8. P. 131–135.
8. *Natanson I. P.* On the convergence of trigonometrical interpolation at equidistant knots // Ann. of Math. 1944. Vol. 45. P. 457–471.
9. *Никольский С. М.* О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, вып. 6. С. 509–520.
10. *Турецкий А. Х.* Теория интерполирования в задачах. Минск : Высш. шк., 1968. 320 с.
11. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1965. 616 с.

12. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 3. М. : ФИЗМАТЛИТ, 1969. 656 с.
13. *Магомед-Касумов М. Г.* Аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена для кусочно гладких функций // Матем. заметки. Т. 100, вып. 2. С. 229–247. DOI: 10.4213/mzm10588.

Образец для цитирования:

Акниев Г. Г. Аппроксимативные свойства дискретных сумм Фурье для некоторых кусочно-линейных функций // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 4–16. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-4-16.

Approximation Properties of Dicrete Fourier Sums for Some Piecewise Linear Functions

G. G. Akniyev

Gasan G. Akniyev, https://orcid.org/0000-0001-8533-4277, Dagestan Scientific Center RAS, 45, M. Gadzhieva Str., Makhachkala, Russia, 367025, hasan.akniyev@gmail.com

Let N be a natural number greater than 1. We select N uniformly distributed points $t_k = 2\pi k/N$ $(0 \leqslant k \leqslant N-1)$ on $[0, 2\pi]$. Denote by $L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f,x)$ $(1 \leqslant n \leqslant N/2)$ the trigonometric polynomial of order n possessing the least quadratic deviation from f with respect to the system $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$. In other words, the greatest lower bound of the sums $\sum_{k=0}^{N-1} |f(t_k) - T_n(t_k)|^2$ on the set of trigonometric polynomials T_n of order n is attained by $L_{n,N}(f)$. In the present article the problem of function approximation by the polynomials $L_{n,N}(f,x)$ is considered. Using some example functions we show that the polynomials $L_{n,N}(f,x)$ uniformly approximate a piecewise-linear continuous function with a convergence rate $O(1/n)$ with respect to the variables $x \in \mathbb{R}$ and $1 \leqslant n \leqslant N/2$. These polynomials also uniformly approximate the same function with a rate $O(1/n^2)$ outside of some neighborhood of function's „crease“ points. Also we show that the polynomials $L_{n,N}(f,x)$ uniformly approximate a piecewise-linear discontinuous function with a rate $O(1/n)$ with respect to the variables x and $1 \leqslant n \leqslant N/2$ outside some neighborhood of discontinuity points. Special attention is paid to approximation of 2π-periodic functions f_1 and f_2 by the polynomials $L_{n,N}(f,x)$, where $f_1(x) = |x|$ and $f_2(x) = \operatorname{sign} x$ for $x \in [-\pi, \pi]$. For the first function f_1 we show that instead of the estimate $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1,x)| \leqslant c \ln n/n$ which follows from the well-known Lebesgue inequality for the polynomials $L_{n,N}(f,x)$ we found an exact order estimate $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1,x)| \leqslant c/n$ $(x \in \mathbb{R})$ which is uniform relative to $1 \leqslant n \leqslant N/2$. Moreover, we found a local estimate $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1,x)| \leqslant c(\varepsilon)/n^2$ $(|x - \pi k| \geqslant \varepsilon)$ which is also uniform relative to $1 \leqslant n \leqslant N/2$. For the second function f_2 we found only a local estimate $|f_2(x) - L_{n,N}(f_2,x)| \leqslant c(\varepsilon)/n$ $(|x - \pi k| \geqslant \varepsilon)$ which is uniform relative to $1 \leqslant n \leqslant N/2$. The proofs of these estimations are based on comparing of approximating properties of discrete and continuous finite Fourier series.

Key words: function approximation, trigonometric polynomials, Fourier series.

References

1. Sharapudinov I. I. On the best approximation and polynomials of the least quadratic deviation. *Analysis Math.*, 1983, vol. 9, iss. 3, pp. 223–234. DOI: 10.1007/BF01989807.
2. Bernshtein S. N. O trigonometricheskom interpolirovanii po sposobu naimen'shih kvadratov [On trigonometric interpolation by the least squares method]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Soviet Math. Dokl.], 1934, vol. 4, no. 1, pp. 1–5 (in Russian).

3. Erdös P. Some theorems and remarks on interpolation. *Acta Sci. Math.* (Szeged), 1950, vol. 12, pp. 11–17.
4. Kalashnikov M. D. O polinomah nailuchshego (kvadraticheskogo) priblizheniya v zadannoy sisteme tochek [On polynomials of best quadratic approximation in a given system of points]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Soviet Math. Dokl.], 1955, vol. 105, pp. 634–636 (in Russian).
5. Krylov V. I. Shodimost algebraicheskogo interpolirovaniya po kornyam mnogochlena Chebisheva dlya absolutno neprerivnih funkciy i funkciy s ogranichennim izmeneniyem [Convergence of algebraic interpolation with respect to the roots of Chebyshev's polynomial for absolutely continuous functions and functions of bounded variation]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Soviet Math. Dokl.], 1956, vol. 107, pp. 362–365 (in Russian).
6. Marcinkiewicz J. Quelques remarques sur l'interpolation. *Acta Sci. Math.* (Szeged), 1936, vol. 8, pp. 127–130.
7. Marcinkiewicz J. Sur la divergence des polynômes d'interpolation. *Acta Sci. Math.* (Szeged), 1936, vol. 8, pp. 131–135.
8. Natanson I. P. On the convergence of trigonometrical interpolation at equidistant knots. *Ann. Math.*, 1944, vol. 45, pp. 457–471.
9. Nikolski S. Sur certaines méthodes d'approximation au moyen de sommes trigonométriques. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. URSS. Ser. Math.], 1940, vol. 4, iss. 6, pp. 509–520 (in Russian. French summary).
10. Turethkii A. H. *Teoriya interpolirovaniya v zadachakh* [Interpolation theory in problems]. Minsk, Vysheishaya Shkola, 1968. 320 p. (in Russian).
11. Zygmund A. *Trigonometric Series*, vol. 1–2. Cambridge University Press, 2015. 747 p.
12. Fikhtengol'ts G. M. *Course of Differential and Integral Calculus*, in 3 vols., vol. 3. Moscow, FIZMATLIT, 1969. 656 p (in Russian).
13. Magomed-Kasumov M. G. Approximation properties of de la Vallée-Poussin means for piecewise smooth functions. *Math. Notes*, 2016, vol. 100, iss. 2, pp. 229–244. DOI: 10.1134/S000143461607018X.

Cite this article as:

Akniyev G. G. Approximation Properties of Discrete Fourier Sums for Some Piecewise Linear Functions. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 4–16 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-4-16.