УДК 517.51

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИМИСЯ РЯДАМИ ПО $\mathscr{H}$-СИСТЕМАМ

К. А. Навасардян

Навасардян Карен Аршалуйсович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры численного анализа и математического моделирования, Ереванский государственный университет, 0025, Республика Армения, Ереван, Алек Манукяна, 1, knavasard@ysu.am

Рассматриваются вопросы представления абсолютно сходящимися рядами функций в пространствах однородного типа. Во введении приводится определение системы типа Хаара ($\mathscr{H}$-системы), связанной с некоторой диадической системой в пространстве однородного типа X. Доказывается, что для любой, почти всюду (п. в.) конечной, измеримой на X функции f существует абсолютно сходящийся ряд по системе $\mathscr{H}$, который сходится к f п. в. на X. Из этой теоремы, в частности, следует, что если $\mathscr{H} = \{h_n\}$ — обобщенная система Хаара, порожденная ограниченной последовательностью p_k, то для любой п. в. конечной на $[0, 1]$ измеримой функции f существует абсолютно сходящийся ряд по системе $\{h_n\}$, который п. в. сходится к $f(x)$. Доказывается, что если X — ограниченное множество, то любую п. в. конечную, измеримую функцию можно изменить на множестве сколь угодно малой меры так, чтобы ряд Фурье полученной функции по системе $\mathscr{H}$ сходился равномерно. Результаты статьи получены методами метрической теории функций.

Ключевые слова: системы типа Хаара, диадическая система, абсолютная сходимость, равномерная сходимость.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-49-61

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются системы типа Хаара, построенные на диадических системах пространств однородного типа.

Напомним некоторые определения.

Пусть X — некоторое множество. Неотрицательная симметричная функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется квазиметрикой, если $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ и существует постоянная K такая, что

$$\rho(x, y) \leqslant K\left(\rho(x, z) + \rho(z, y)\right) \quad \text{для всех} \quad x, y, z \in X.$$

Обозначим через $B(x, r) := \{y \in X : \ \rho(x, y) < r\}$ шар с центром x и радиусом r. Известно, что если ρ — квазиметрика с коэффициентом $K > 1$, то шар $B(x, r)$ может быть неоткрытым множеством. В работе [1] доказано, что для любой квазиметрики ρ существует такая квазиметрика ρ', которая эквивалентна ρ, и все шары относительно ρ' являются открытыми множествами. В этой работе мы будем предполагать, что все шары — открытые множества.

Напомним, что пространство (X, ρ, μ), где ρ — квазиметрика, а μ — некоторая бореловая σ-конечная мера, определенная на некоторой σ-алгебре подмножеств множества X, называется пространством однородного типа, если существует постоянная A такая, что

$$\mu(B(x, 2r)) \leqslant A\mu(B(x, r)) < +\infty \qquad \text{для всех } x \in X \quad \text{и } r > 0. \tag{1}$$

В этой работе мы будем предпологать, что мера μ регулярная.

Определение 1. Пусть (X, ρ, μ) — некоторое пространство однородного типа. Семейство $\mathscr{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}^j$ называется *диадическим семейством с параметром* $\delta \in (0,1)$ *в пространстве* X, если каждое $\mathscr{D}^j$ является семейством борелевых множеств $Q \subset X$, удовлетворяющим условиям:

d1) для каждого $j \in \mathbb{Z}$ множества в $\mathscr{D}^j$ попарно не пересекаются и $X = \bigcup_{Q\in\mathscr{D}^j} Q$;

d2) если $Q \in \mathscr{D}^j$ и $i < j$, то существует множество $\tilde{Q} \in \mathscr{D}^i$ такое, что $Q \subset \tilde{Q}$;

d3) существует натуральное число N такое, что $1 \leqslant \operatorname{card}\{Q' \in \mathscr{D}^{j+1} : \ Q' \subset Q\} \leqslant N$ для всех $j \in \mathbb{Z}$ и $Q \in \mathscr{D}^j$.

d4) существуют постоянные a_1 и a_2 такие, что для каждого $Q \in \mathscr{D}^j$, $j \in \mathbb{Z}$, существуют шары $B(x_1, r_1)$ и $B(x_2, r_2)$ такие, что

$$B(x_1, r_1) \subset Q \subset B(x_2, r_2), \qquad r_1 \geqslant a_1\delta^j, \quad r_2 \leqslant a_2\delta^j.$$

Первые нетривиальные конструкции диадических семейств были рассмотрены в [2].

В работах [3–5] дано определение системы типа Хаара, соответствующей диадической системе $\mathscr{D}$ и исследованы некоторые свойства этой системы.

Пусть $\mathscr{D}$ — некоторое диадическое семейство с параметром δ в пространстве однородного типа X. Следуя обозначениям работы [5], для $Q \in \mathscr{D}^j$, $j \in \mathbb{Z}$, обозначим

$$\mathscr{L}(Q) := \{Q' \in \mathscr{D}^{j+1} : \ Q' \subset Q\}.$$

Положим

$$\tilde{\mathscr{D}}^j := \{Q \in \mathscr{D}^j : \ \operatorname{card}(\mathscr{L}(Q)) > 1\}, \qquad \tilde{\mathscr{D}} := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{\mathscr{D}}^j.$$

Мы будем предполагать, что в $\mathscr{D}$ не существуют одноточечные множества с положительной мерой. Это означает (см. также d4)), что для каждого $Q \in \mathscr{D}$ существует $n(Q) \in \mathbb{N}$ такое, что $Q \in \tilde{\mathscr{D}}^{n(Q)}$, т. е.

$$\mathscr{D} = \tilde{\mathscr{D}}. \tag{2}$$

Определение 2. Система простых, измеримых функций $\mathscr{H} = \{h\}$, определенных на X, называется *системой типа Хаара* (*$\mathscr{H}$-системой*), *связанной с системой* $\mathscr{D}$, если

(h1) для каждого $h \in \mathscr{H}$ существуют единственное $j = j(h) \in \mathbb{Z}$ и множество $Q = Q(h) \in \tilde{\mathscr{D}}^j$ такие, что $\{x \in X : \ h(x) \neq 0\} \subset Q$, и это свойство не выполняется для множеств из $\mathscr{D}^{j+1}$. Более того, каждая функция h постоянна на каждом множестве $Q' \in \mathscr{L}(Q(h))$;

(h2) для каждого $Q \in \tilde{\mathscr{D}}$ существуют $M_Q := \operatorname{card}(\mathscr{L}(Q)) - 1 \geqslant 1$ функций $h \in \mathscr{H}$, удовлетворяющих 1). Множество этих функций обозначим $\mathscr{H}(Q)$;

(h3) $\int_X h\,d\mu = 0$ для каждого $h \in \mathscr{H}$;

(h4) если для каждого $Q \in \tilde{\mathscr{D}}$ обозначим через V_Q линейное пространство тех функций, определенных на Q, которые постоянны на каждом $Q' \in \mathscr{L}(Q)$, то система $\left\{ \frac{\chi_Q}{\sqrt{\mu(Q)}} \right\} \cup \mathscr{H}(Q)$ является ортонормированным базисом в V_Q, (χ_Q — характеристическая функция множества Q).

Заметим, что система типа Хаара, связанная с данной системой $\mathscr{D}$, может быть не единственной.

Н. К. Бари было установлено, что любая почти всюду (п. в.) конечная на $[0,1]$, измеримая функция представима рядом по системе Хаара, сходящимся к этой функции п. в. [6, с. 527]. Затем Ф. Г. Арутюняном [7] была усилена эта теорема и доказано, что для любой п. в. конечной на $[0,1]$, измеримой функции f существует абсолютно сходящийся п. в. на $[0,1]$ ряд по системе Хаара такой, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) = f(x) \quad \text{п. в. на } [0,1].$$

В работах [8–10] распространен этот результат Арутюняна на другие системы, содержащие в себе систему Хаара.

В настоящей работе доказана следующая

Теорема 1. *Пусть (X, ρ, μ) — некоторое пространство однородного типа, $\mathscr{D}$ — диадическое семейство с параметром δ в пространстве X, удовлетворяющее условию* (2), *а $\mathscr{H} = \{h\}$ — некоторая система типа Хаара, связанная с системой $\mathscr{D}$. Тогда для любой п. в. конечной на X измеримой функции f существует ряд $\sum\limits_{h \in \mathscr{H}} a_h h$ по системе $\mathscr{H}$, который п. в. абсолютно сходится и*

$$\sum_{h \in \mathscr{H}} a_h h(x) = f(x) \quad \textit{п. в. на } X.$$

Для каждого целого числа k_0 обозначим (см. (h1))

$$\mathscr{H}_{k_0} := \{h \in \mathscr{H} : j(h) \geqslant k_0\}.$$

Нетрудно заметить, что теорема 1 следует из следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть (X, ρ, μ) — некоторое пространство однородного типа, $\mathscr{D}$ — диадическое семейство с параметром δ в X, удовлетворяющее условию* (2), *а $\mathscr{H} = \{h\}$ – некоторая система типа Хаара, связанная с системой $\mathscr{D}$. Тогда для любого $k_0 \in \mathbb{Z}$ и любой п. в. конечной на X измеримой функции f существует ряд $\sum\limits_{h \in \mathscr{H}_{k_0}} a_h h$ по системе $\mathscr{H}_{k_0}$, который п. в. абсолютно сходится и*

$$\sum_{h \in \mathscr{H}_{k_0}} a_h h(x) = f(x) \quad \textit{п. в. на } X.$$

Пусть $\{p_k\}$ — некоторая ограниченная последовательность натуральных чисел с условием $p_k \geqslant 2$. Допустим $m_0 = 1$ и $m_k = p_k m_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Пусть j_k —

натуральное число, удовлетворяющее условию $2^{j_k-1} < m_k \leqslant 2^{j_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Положим $\mathscr{D}^0 = \mathscr{D}^1 = \dots = \mathscr{D}^{j_1-1} = [0,1]$ и

$$\mathscr{D}^{j_k} = \mathscr{D}^{j_k+1} = \dots = \mathscr{D}^{j_{k+1}-1} = \left\{ \left[\frac{i-1}{m_k}, \frac{i}{m_k} \right) : \ i = 1, 2, \dots, m_k \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ясно, что если $j_k \leqslant j < j_{k+1}$ и $Q \in \mathscr{D}^j$, то $2^{-j} \leqslant \mu Q \leqslant \dfrac{\max\{p_k\}}{m_{k+1}} \leqslant \dfrac{\max\{p_k\}}{2^{j_{k+1}-1}} \leqslant$ $\leqslant \dfrac{\max\{p_k\}}{2^{-j}}$, откуда следует, что $\mathscr{D} = \cup_{j=0}^{\infty} \mathscr{D}^j$ является диадической системой на $[0,1)$ с параметром $\delta = 2^{-1}$, а обобщенная система Хаара $\mathscr{H} = \{h_n(x)\}$, порожденная последовательностью $\{p_k\}$, является $\mathscr{H}$-системой, связанной с $\mathscr{D}$, (определение обобщенной системы Хаара см. например в [11]). Из теоремы 2 и из высшесказанного, в частности, следует следующая

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{H} = \{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ — обобщенная система Хаара, порожденная ограниченной последовательностью $\{p_k\}$. Тогда для любой п. в. конечной на $[0,1)$ измеримой функции f существует абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n h_n(x)$ такой, что*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(x) = f(x) \quad \textit{п. в. на} \quad [0,1).$$

В работе [7] для классической системы Хаара доказана следующая

Теорема. *Для любой п. в. конечной измеримой на $[0,1]$ функции f и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция g такая, что*

1) $\mu\{x \in [0,1] : \ f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$,

2) ряд Фурье – Хаара функции g п. в. абсолютно сходится.

Для $\mathscr{H}$-систем справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть (X, ρ, μ) — некоторое пространство однородного типа, X — ограниченное множество, $\mathscr{D}$ — диадическое семейство с параметром δ в X, удовлетворяющее условию (2), а $\mathscr{H} = \{h\}$ — некоторая система типа Хаара, связанная с системой $\mathscr{D}$. Тогда для любой п. в. конечной на X измеримой функции f и любого $\varepsilon > 0$ существует функция g такая, что*

1) $\mu\{x \in X : \ f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$,

2) ряд Фурье функции g по системе $\mathscr{H}$ абсолютно равномерно сходится.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $\mathscr{D}$ — некоторая диадическая система с параметром $\delta \in (0,1)$ в пространстве однородного типа X, удовлетворяющая условию (2). Была доказана следующая лемма [5, лемма 3.2]

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{H} = \{h\}$ — некоторая система типа Хаара, связанная с $\mathscr{D}$. Существует постоянная C такая, что для каждой функции $h \in \mathscr{H}$*

$$|h(x)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\mu(Q(h))}} \quad \textit{для всех} \ \ x \in Q(h).$$

Справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть* $\mathscr{H} = \{h\}$ — *некоторая система типа Хаара, связанная с* $\mathscr{D}$. *Тогда для любого числа* $\varepsilon \in (0,1)$ *и для каждого* $Q \in \mathscr{D}$ *существуют множество* $Q' \subset Q$ *и полином* $P_Q = \sum_{i=1}^{k} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q_i)} b_h h$ *по системе* $\mathscr{H}$ *такие, что*

1) $Q' \in \mathscr{D}$ *и* $\mu(Q') < \varepsilon\mu(Q)$;
2) $P_Q(x) = 1$, *если* $x \in Q \setminus Q'$;
3) $\tilde{P}_Q(x) := \sum_{i=1}^{k} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q_i)} |b_h h(x)| \leqslant \dfrac{C}{\varepsilon}$ *для всех* $x \in Q$;
4) $\tilde{P}_Q(x) = 0$, *если* $x \notin Q$.

Доказательство. Для каждого $Q \in \mathscr{D}$ обозначим через Q^* то множество из $\mathscr{L}(Q)$, для которого

$$\mu(Q^*) = \min\{\mu(Q') : \ Q' \in \mathscr{L}(Q)\}$$

(если существует несколько таких множеств, то будем брать одно из них). Из (1) и d4) нетрудно установить, что существует постоянная C_1, удовлетворяющая неравенству

$$\mu(Q^*) \leqslant \mu(Q) \leqslant C_1\mu(Q^*). \tag{3}$$

Обозначим через

$$F_Q(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in Q \setminus Q^*, \\ -\dfrac{\mu(Q \setminus Q^*)}{\mu(Q^*)}, & \text{если} \quad x \in Q^*, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin Q. \end{cases} \tag{4}$$

Ясно, что

$$\int_X F_Q d\mu = \int_Q F_Q d\mu = 0, \tag{5}$$

поэтому из (h4) следует, что функцию F_Q можно представить в следующей форме:

$$F_Q(x) = \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} d_{Q,h} h(x).$$

Из леммы 1 и (4) следует, что для каждого $h \in \mathscr{H}(Q)$

$$|d_{Q,h}| = \left|\int_Q F_Q h d\mu\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\mu(Q)}} \int_Q |F_Q| d\mu \leqslant \frac{2C}{\sqrt{\mu(Q)}}\mu(Q) \leqslant 2C\sqrt{\mu(Q)}.$$

Поэтому, учитывая также d3), получим:

$$\tilde{F}_Q(x) := \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} |d_{Q,h} h(x)| \leqslant 2NC^2 \quad \text{для всех} \ \ x \in Q.$$

Таким образом, существует постоянная C_3 такая, что

$$\tilde{F}_Q(x) \leqslant C_3 \leqslant C_3|F_Q(x)| \quad \text{для всех} \ \ x \in Q. \tag{6}$$

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ и $Q \in \mathscr{D}$. Определим множества $\{Q_m\} \subset \mathscr{D}$ следующим образом:

$$Q_0 = Q, \quad Q_m := Q^*_{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

(т. е. m-й потомок Q с наименьшей мерой), и обозначим

$$k := \min\{m : \ \mu(Q_{m+1}) < \varepsilon\mu(Q)\}. \tag{8}$$

Из (4) и (7) следует, что можно поочередно выбрать положительные числа $l_0, l_1, \ldots, l_k$ так, чтобы $l_0 = 1$ и для каждого $m \leqslant k$

$$\sum_{i=0}^{m} l_i F_{Q_i}(x) = 1, \qquad \text{если} \ \ x \in Q \setminus Q^*_m. \tag{9}$$

Очевидно, что полином

$$P_Q(x) := \sum_{i=0}^{k} \sum_{h\in\mathscr{H}(Q_i)} b_h h(x) \equiv \sum_{i=0}^{k} l_i F_{Q_i}(x) = \sum_{i=0}^{k} l_i \sum_{h\in\mathscr{H}(Q_i)} d_{Q_i,h} h(x)$$

и множество $Q' := Q_{k+1}$ удовлетворяют пунктам 1), 2) и 4) леммы 2.

Пусть x_0 — некоторый элемент из Q, тогда либо $x_0 \in Q_m \setminus Q_{m+1}$ для некоторого $m \in \{0, 1, \ldots, k\}$, либо $x_0 \in Q_{k+1}$. Если $x_0 \in Q_0 \setminus Q_1$, то для всех функций $h \in \mathscr{H}(Q_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, имеем $h(x_0) = 0$. Поэтому из (6) получим: $\tilde{P}_Q(x_0) = \tilde{F}_{Q_0}(x_0) \leqslant C_3 \leqslant \dfrac{C_3}{\varepsilon}$. Если же $x_0 \in Q_m \setminus Q_{m+1}$ и $1 \leqslant m \leqslant k$, то из (4) и (9) следует, что $l_i F_{Q_i}(x_0) < 0$ для всх $i \in 0, 1, \ldots, m-1$, так как $l_i > 0$, а $F_{Q_i}(x_0) < 0$ поэтому, учитывая (5), получим:

$$0 = \int_Q \sum_{i=0}^{m-1} l_i F_{Q_i} d\mu = \mu(Q \setminus Q_m) + \int_{Q_m} \sum_{i=0}^{m-1} l_i F_{Q_i} d\mu \leqslant \mu(Q) - \sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \mu(Q_m).$$

Откуда с учетом (8) получим

$$\sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно (см. также (9)),

$$\sum_{i=0}^{k} |l_i F_{Q_i}(x_0)| = \sum_{i=0}^{m} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| + 1 + \sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \leqslant \frac{3}{\varepsilon}.$$

Пусть теперь $x_0 \in Q_{k+1}$, тогда из (4) и (5) получим

$$0 = \int_Q \sum_{i=0}^{k} l_i F_{Q_i} d\mu = \mu(Q \setminus Q_{k+1}) + \int_{Q_{k+1}} \sum_{i=0}^{k} l_i F_{Q_i} d\mu \leqslant \mu(Q) - \sum_{i=0}^{k} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \mu(Q_{k+1}).$$

Учитывая (3) и (8), получим:

$$\sum_{i=0}^{k} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \leqslant \frac{\mu(Q)}{\mu(Q_{k+1})} \leqslant \frac{C_1 \mu(Q)}{\mu(Q_k)} \leqslant \frac{C_1}{\varepsilon}.$$

Из последних неравенств и (6) следует, что для всех $x \in Q$

$$\tilde{P}_Q(x) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q_i)} |l_i d_{Q_i,h} h(x)| \leqslant C_3 \sum_{i=0}^{k} |l_i||F_{Q_i}(x)| \leqslant \frac{C_4}{\varepsilon}.$$

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть $Q \in \mathscr{D}$ и f — некоторая измеримая п. в. конечная функция на Q. Тогда для любых $N \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ и $\varepsilon \in (0,1)$ существуют множество $R \subset Q$ и полином $P(x) = \sum\limits_{h \in \Omega} d_h h(x)$ по $\mathscr{H}$-системе, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) $j(h) > N$ для всех $h \in \Omega$, (см. (h1));
2) $\mu(R) > (1-\varepsilon)\mu(Q)$;
3) $|P(x) - f(x)| < \delta$ для всех $x \in R$;
4) $\sum\limits_{h \in \Omega} |d_h h(x)| \leqslant \dfrac{C|f(x)|}{\varepsilon}$, если $x \in R$;
5) $\sum\limits_{h \in \Omega} |d_h h(x)| = 0$, если $x \notin Q$.

Доказательство. Из формулировки леммы следует, что, не нарушая общности, можно считать f неотрицательной. Допустим число M выбрано так, чтобы

$$\mu\{x \in Q: \ f(x) > M\} < \frac{\varepsilon}{10}\mu(Q). \tag{10}$$

Выберем числа $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, удовлетворяющие условиям

$$0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_n = M, \qquad \beta_i - \beta_{i-1} < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

и обозначим

$$m := \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \mu(E_i) \quad \text{где } E_i := \{x \in Q: \ \beta_{i-1} \leqslant f(x) < \beta_i\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Без ограничения общности можем считать, что $m > 0$ (в противном случае, будем рассматривать только те множества E_i, для которых $\mu(E_i) > 0$). Поскольку множества E_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ измеримы, а мера μ регулярная, то для каждого i существует открытое множество G_i такое, что

$$E_i \subset G_i \qquad \text{и} \qquad \mu(G_i \setminus E_i) < \frac{\varepsilon}{10n} m. \tag{13}$$

Можно установить (см. например [3, лемма 2.3]), что для каждого i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ существуют попарно непересекающиеся множества $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in I_i}$ такие, что

$$\{Q_\alpha\}_{\alpha \in I_i} \subset \bigcup_{j > N} \mathscr{D}^j, \qquad \bigcup_{\alpha \in I_i} Q_\alpha \subset G_i \qquad \text{и} \qquad \mu\Big(G_i \setminus \Big(\bigcup_{\alpha \in I_i} Q_\alpha\Big)\Big) = 0. \tag{14}$$

Так как множества Q_α, $\alpha \in I_i$, попарно не пересекаются, а $\mu G_i < \infty$ (см. (12) и (13)), то из (14) следует, что существует конечное подмножество $\tilde{I}_i$ множества индексов I_i такое, что

$$\mu\Big(\bigcup_{\alpha \in \tilde{I}_i} Q_\alpha\Big) = \sum_{\alpha \in \tilde{I}_i} \mu Q_\alpha > \mu G_i - \frac{\varepsilon}{10}\mu E_i. \tag{15}$$

Пусть $\alpha \in \tilde{I}_i$. Очевидно, что если $Q_\alpha \cap Q = \varnothing$, то $Q_\alpha \subset \cup_{k=1}^n (G_k \setminus E_k)$. Ясно также, что если $Q_\alpha \subset Q_\beta$ для некоторого $\beta \in \tilde{I}_j$, то $Q_\alpha \subset G_i \cap G_j \subset \cup_{k=1}^n (G_k \setminus E_k)$, так как множества E_i, $i = 1, 2, \dots, n$, попарно не пересекаются. Заметим, что из определения диадической системы следует: если $Q', Q'' \in \mathscr{D}$, то либо $Q' = Q''$, либо одно из них является подмножеством другого. Поэтому, если из $\tilde{I}_i$ исключим те α, для которых $Q_\alpha \cap Q = \varnothing$ или $Q_\alpha \subset Q_\beta$ для некоторого $\beta \in \tilde{I}_j$, $j \neq i$, и обозначим оставшееся подмножество индексов $\tilde{I}_i$ через I'_i, то с учетом (12)–(15) получим, что $Q_\alpha \subset Q$ для всех $\alpha \in I'_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

$$Q_\alpha \cap Q_\beta = \varnothing \qquad \text{для всех} \quad \alpha, \beta \in \cup_{i=1}^n I'_i, \qquad \alpha \neq \beta, \tag{16}$$

$$\mu\Big(E_i \cap \Big(\bigcup_{\alpha \in I'_i} Q_\alpha\Big)\Big) \geqslant \mu(E_i) - \mu\Big(\bigcup_{\alpha \in I_i \setminus I'_i} Q_\alpha\Big) > \mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{10}\mu(E_i) - \sum_{k=1}^n \mu(G_k \setminus E_k) >$$
$$> \mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{10}\mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{10}\mu(E_i) > \Big(1 - \frac{\varepsilon}{4}\Big)\mu(E_i). \tag{17}$$

Для каждого $\alpha \in \bigcup_{i=1}^n I'_i$, применяя лемму 2 для множества Q_α и числа $\dfrac{\varepsilon}{2}$, получим множество $Q'_\alpha \subset Q_\alpha$ и полином $P_{Q_\alpha} = \sum\limits_{h \in \Gamma_\alpha} b_h h$, удовлетворяющие условиям

$$Q'_\alpha \in \mathscr{D} \qquad \text{и} \quad \mu(Q'_\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}\mu(Q_\alpha), \tag{18}$$

$$P_{Q_\alpha}(x) = 1 \qquad \text{для всех} \quad x \in Q_\alpha \setminus Q'_\alpha, \tag{19}$$

$$\tilde{P}_{Q_\alpha}(x) = \sum_{h \in \Gamma_\alpha} |b_h h(x)| \leqslant \frac{C}{\varepsilon} \qquad \text{для всех} \quad x \in Q_\alpha, \tag{20}$$

$$\tilde{P}_{Q_\alpha}(x) = 0, \qquad \text{если} \quad x \notin Q_\alpha. \tag{21}$$

Рассмотрим множество

$$R := \bigcup_{i=1}^n \Big(E_i \bigcap \Big(\bigcup_{\alpha \in I'_i} Q_\alpha \setminus Q'_\alpha\Big)\Big). \tag{22}$$

Из (10), (17) и (18) следует, что

$$\mu(R) \geqslant \sum_{i=1}^n \left(\Big(1 - \frac{\varepsilon}{4}\Big)\mu(E_i) - \sum_{\alpha \in I'_i} \frac{\varepsilon}{2}\mu(Q_\alpha)\right) \geqslant (1 - \varepsilon)\mu(Q).$$

Положим

$$P(x) := \sum_{h \in \Omega} d_h h(x) \equiv \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} \sum_{\alpha \in I'_i} P_{Q_\alpha}(x) = \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} \sum_{\alpha \in I'_i} \sum_{h \in \Gamma_\alpha} b_h h(x). \tag{23}$$

Из (11), (12), (16), (19)–(22) следует, что полином $P(x)$ удовлетворяет всем пунктам леммы 3. Лемма 3 доказана. □

Замечание 1. Если в формулировке леммы 3 функция f удовлетворяет условию $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in Q$, то пункт 4. леммы 3 можно заменить условием

$$\sum_{h \in \Omega} |d_h h(x)| \leqslant \frac{CM}{\varepsilon} \quad \text{для всех} \quad x \in Q,$$

которое следует из (20), (21) и (23).

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 2. Пусть f — некоторая п. в. конечная, измеримая функция, а $k_0 \in \mathbb{Z}$. Для каждого $Q \in \mathscr{D}^{k_0}$ обозначим

$$f_Q(x) := f(x)\chi_Q(x).$$

Поскольку множества Q в $\mathscr{D}^{k_0}$ попарно не пересекаются, то достаточно доказать, что для каждой функции f_Q существует ряд $\sum\limits_{h\in\Gamma_Q} a_h h$, где Γ_Q — множество тех функций из $\mathscr{H}$, для которых $\{x:\ h(x)\neq 0\}\subset Q$, который абсолютно сходится и

$$\sum_{h\in\Gamma_Q} a_h h(x) = f_Q(x) \qquad \text{п. в. на } \ X.$$

Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел с условием

$$1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty. \tag{24}$$

Положим $d_h = 0$ для всех $h \in \mathscr{H}(Q) =: \Omega_0$, (см. (h2)), и $P_0 := \sum\limits_{h\in\Omega_0} d_h h \equiv 0$.

Допустим уже определены полиномы $P_k = \sum\limits_{h\in\Omega_k} d_h h,\ k = 0,1,\ldots,m-1$, и числа $N_k := \max\{j(h):\ h\in\Omega_k\}$. Применяя лемму 3 к функции $f_Q(x) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} P_k(x)$ и числам $N = N_{m-1}$, $\delta = \varepsilon_{m+1}^2$ и $\varepsilon = \varepsilon_m$, получим множество $R_m \subset Q$ и полином $P_m(x) = \sum\limits_{h\in\Omega_m} d_h h(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\min\{j(h):\ h\in\Omega_m\} > N_{m-1}, \tag{25}$$

$$\mu(R_m) > (1-\varepsilon_m)\mu(Q), \tag{26}$$

$$\Big| f_Q(x) - \sum_{k=0}^{m} P_k(x)\Big| < \varepsilon_{m+1}^2 \quad \text{для всех } x\in R_m, \tag{27}$$

$$\sum_{h\in\Omega_m} |d_h h(x)| \leqslant \frac{C}{\varepsilon_m}\Big| f_Q(x) - \sum_{k=0}^{m-1} P_k(x)\Big|, \quad \text{если } x\in R_m, \tag{28}$$

$$\sum_{h\in\Omega_m} |d_h h(x)| = 0, \quad \text{если } x\notin Q. \tag{29}$$

Таким образом, по индукции определяются полиномы P_m и множества R_m $(m = 1,2,\ldots)$, удовлетворяющие условиям (25)–(29). Рассмотрим ряд

$$\sum_{h\in\Gamma_Q} a_h h(x) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{h\in\Omega_m} d_h h(x) \tag{30}$$

и множество $R := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} R_m$. Из (24) и (26) следует, что $\mu(R) = \mu(Q)$.

Учитывая (27) и (28), для всех $x \in R_m \cap R_{m-1}$ получим:

$$\sum_{h\in\Omega_m} |d_h h(x)| \leqslant \frac{C}{\varepsilon_m}\varepsilon_m^2 = C\varepsilon_m,$$

которое вместе с (24) и (29) обеспечивают абсолютная сходимость ряда (30) п. в. на X. Из (24), (27) и (29) получим, что сумма ряда (30) на множестве R является $f_Q(x)$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть X — ограниченное множество, а $\mathscr{D}$ — диадическое семейство с параметром δ, удовлетворяющее условию (2). Из d4) следует, что для любого числа $R > 0$ существует $j \in \mathbb{Z}$ такое, что каждый элемент системы $\mathscr{D}^j$ содержит шар с радиусом R. Следовательно, существует $Q_0 \in \mathscr{D}$ такое, что $X = Q_0$. Допустим, что $\varepsilon \in (0, 1)$ и на множестве X задана п. в. конечная измеримая функция $f(x)$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\varepsilon_k := \frac{\varepsilon}{2^k}, \qquad \delta_k := \varepsilon_{k+1}^2. \tag{31}$$

В силу леммы 3 существуют множество $R_1 \subset X = Q_0$ и полином $P_1(x) = \sum\limits_{h\in\Omega_1} d_h h(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\mu(R_1) > (1-\varepsilon_1)\mu(X),$$
$$|f(x) - P_1(x)| < \delta_1 \qquad \text{для всех} \quad x \in R_1.$$

Допустим уже построены множества $R_1, R_2, \ldots, R_{k-1}$ и полиномы $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$ такие, что

$$\left|f(x) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i(x)\right| < \delta_{k-1} \qquad \text{для всех} \quad x \in \bigcap_{i=1}^{k-1} R_i.$$

Обозначим через g_k следующую функцию:

$$g_k(x) = \begin{cases} f(x) - \sum\limits_{i=1}^{k-1} P_i(x), & \text{если} \quad x \in \bigcap_{i=1}^{k-1} R_i, \\ 0, & \text{если} \quad x \in X \setminus \bigcap_{i=1}^{k-1} R_i. \end{cases}$$

Ясно, что

$$|g_k(x)| < \delta_{k-1} \qquad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{32}$$

Для функции $g_k(x)$, применяя лемму 3 и учитывая (32) и замечание 1, получим, что существуют множество R_k и полином $P_k(x) = \sum\limits_{h\in\Omega_k} d_h h(x)$ такие, что

$$\min\{j(h):\ h \in \Omega_k\} > \max\{j(h):\ h \in \Omega_{k-1}\},$$
$$\mu(R_k) > (1-\varepsilon_k)\mu(X), \tag{33}$$

$$\left|f(x) - \sum_{i=1}^{k} P_i(x)\right| = |g_k(x) - P_k(x)| < \delta_k \qquad \text{для всех} \quad x \in \bigcap_{i=1}^{k} R_i, \tag{34}$$

$$\sum_{h\in\Omega_k} |d_h h(x)| \leqslant \frac{C\delta_{k-1}}{\varepsilon_k} = C\varepsilon_k \qquad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{35}$$

Так по индукции определяются множества R_k и полиномы P_k, удовлетворяющие условиям (33) и (34) для всех $k \in \mathbb{N}$ и условию (35) для всех натуральных $k \geqslant 2$.

Для каждого $h \in \mathscr{H}$ положим $a_h := d_h$, если $h \in \Omega_k,\ k \in \mathbb{N}$, и $a_h := 0$ в противном случае. Рассмотрим ряд

$$\sum_{h\in\mathscr{H}} a_h h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h\in\Omega_k} d_h h(x) \tag{36}$$

и множество $R := \bigcap_{k=1}^{\infty} R_k$. Из (31) и (35) следует, что ряд (36) на множестве X равномерно и абсолютно сходится к некоторой функции g, а из (31) и (33) следует, что $\mu(R) > (1-\varepsilon)\mu(X)$. Ясно также (см. (34)), что для всех $x \in R$ имеем $f(x) = g(x)$.

Теорема 4 доказана.

Библиографический список

1. *Macias R., Segovia C.* Lipschitz functions on spaces of homogeneous type // Adv. in Math. 1979. Vol. 33. P. 271–309.
2. *Christ A.* A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral // Colloquium Math. 1990. Vol. 60/61, iss. 2. P. 601–628.
3. *Aimar H., Bernardis A., Iaffel B.* Multiresolution Approximations and Unconditional Bases on Weighted Lebesgue Spaces on Spaces of Homogeneous Type // J. Approx. Theory. 2007. Vol. 148, iss. 1. P. 12–34. DOI:10.1016/j.jat.2007.02.002.
4. *Aimar H., Bernardis A., Nowak L.* Equivalence of Haar Bases Associated to Different Dyadic Systems // J. of Geometric Analysis. 2011. Vol. 21, iss. 2. P. 288–304. DOI: 10.1007/s12220-010-9148-x.
5. *Aimar H., Bernardis A., Nowak L.* Dyadic Fefferman – Stein Inequalities and the Equivalence of Haar Bases on Weighted Lebesgue Spaces // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Math. 2011. Vol. 141, iss. 1. P. 1–22. DOI: 10.1017/S0308210509001796.
6. *Лузин Н. Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. М. ; Л. : Гостехиздат, 1951. 550 с.
7. *Арутюнян Ф. Г.* О рядах по системе Хаара // Докл. АН АрмССР. 1966. Т. 42, № 3. С. 134–140.
8. *Давтян Р. С.* О представлении функций ортогональными рядами, обладающими мартингальными свойствами // Матем. заметки. 1976. Т. 19, № 5. С. 673–680. DOI: 10.1007/BF01142560.
9. *Gevorkjan G. G.* On the Representation of Measurable Functions by Martingales // Analysis Math. 1982. Vol. 8, № 4. P. 239–256. DOI: 10.1007/BF02201774.
10. *Gevorkian G. G.* Representation of Measurable Functions by Absolutely Convergent Series of Translates and Dilates of One Function // East J. Approx. 1996. Vol. 2, № 4. P. 439–458.
11. *Голубов Б. И.* Об одном классе полных ортогональных систем // Сиб. матем. журн. 1968. Т. 9, № 2. С. 297–314.

Образец для цитирования:

Навасардян К. А. О представлении функций абсолютно сходящимися рядами по $\mathscr{H}$-системам // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 49–61. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-49-61.

On the Representation of Functions by Absolutely Convergent Series by $\mathscr{H}$-system

K. A. Navasardyan

Karen A. Navasardyan, https://orcid.org/0000-0002-8396-6462, Yerevan State University, 1, Alex Manoogian Str., Yerevan, Republic of Armenia, 0025, knavasard@ysu.am

The paper deals with the representation of absolutely convergent series of functions in spaces of homogeneous type. The definition of a system of Haar type ($\mathscr{H}$-system) associated to a dyadic family on a space of homogeneous type X is given in the Introduction. It is proved that for almost everywhere (a.e.) finite and measurable on a set X function f there exists an absolutely convergent series by the system $\mathscr{H}$, which converges to f a.e. on X. From this theorem, in particular, it follows that if $\mathscr{H} = \{h_n\}$ is a generalized Haar system generated by a bounded sequence $\{p_k\}$, then for any a.e. finite on $[0, 1]$ and measurable function f there exists an absolutely convergent series in the system $\{h_n\}$, which converges a.e. to $f(x)$. It is also proved, that if X is a bounded set, then one can change the values of an a.e. finite and measurable function on a set of arbitrary small measure such that the Fourier series of the obtained function with respect to system $\mathscr{H}$ will converge uniformly. The paper results are obtained using the methods of metrical functions theory.

Key words: Haar type system, dyadic family, absolute convergence, uniform convergence.

References

1. Macias R., Segovia C. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type. *Adv. in Math.*, 1979, vol. 33, pp. 271–309.
2. Christ A. A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral. *Colloquium Math.*, 1990, vol. 60/61, iss. 2, pp. 601–628.
3. Aimar H., Bernardis A., Iaffel B. Multiresolution Approximations and Unconditional Bases on Weighted Lebesgue Spaces on Spaces of Homogeneous Type. *J. Approx. Theory*, 2007, vol. 148, iss. 1, pp. 12–34. DOI:10.1016/j.jat.2007.02.002.
4. Aimar H., Bernardis A., Nowak L. Equivalence of Haar Bases Associated to Different Dyadic Systems. *J. of Geometric Analysis*, 2011, vol. 21, iss. 2, pp. 288–304. DOI: 10.1007/s12220-010-9148-x.
5. Aimar H., Bernardis A., Nowak L. Dyadic Fefferman–Stein Inequalities and the Equivalence of Haar Bases on Weighted Lebesgue Spaces. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Math.*, 2011, vol. 141, iss. 1, pp. 1–22. DOI: 10.1017/S0308210509001796.
6. Luzin N. N. *Integral i trigonometricheskij rjad* [Integral and trigonometric series]. Moscow, Leningrad, Gostehizdat, 1951. 550 p. (in Russian).
7. Arutyunyan F. G. On series in the Haar system. *Dokl. Akad. Nauk Armyanskoi SSR*, 1966, vol. 42, no. 3, pp. 134–140 (in Russian).
8. Davtyan R. S. On Representation of Functions by Orthogonal Series Possessing Martingale Properties. *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1976, vol. 19, no. 5, pp. 405–409. DOI: 10.1007/BF01142560.
9. Gevorkjan G. G. On the Representation of Measurable Functions by Martingales. *Analysis Math.*, 1982, vol. 8, iss. 4, pp. 239–256. DOI: 10.1007/BF02201774.

10. Gevorkian G. G. Representation of Measurable Functions by Absolutely Convergent Series of Translates and Dilates of One Function. *East J. Approx.*, 1996, vol. 2, no. 4, pp. 439–458.
11. Golubov B. I. Ob odnom klasse polnyh ortogonal'nyh sistem [On a class of complete orthogonal systems]. *Sibirskij matematiceskij zurnal*, 1968, vol. 9, no. 2, pp. 297–314 (in Russian).

Cite this article as:
Navasardyan K. A. On the Representation of Functions by Absolutely Convergent Series by $\mathscr{H}$-system. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 49–61 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-49-61.