

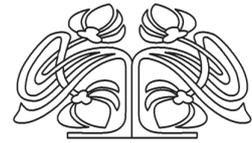


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия
Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 1

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал
2018 Том 18

ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Акниев Г. Г. Аппроксимативные свойства дискретных сумм Фурье для некоторых кусочно-линейных функций 4

Гаджимирзаев Р. М. Рекуррентные соотношения для полиномов, ортонормированных по Соболеву, порожденных полиномами Лагерра 17

Кириллов А. Н., Алькин Р. В. Устойчивость периодических бильярдных траекторий в треугольнике 25

Kuznetsova M. A. Asymptotic Formulae for Weight Numbers of the Sturm – Liouville Boundary Problem on a Star-shaped Graph [Кузнецова М. А. Асимптотические формулы для весовых чисел краевой задачи Штурма – Лиувилля на графе-звезде] 40

Навасардян К. А. О представлении функций абсолютно сходящимися рядами по \mathcal{H} -системам 49

Рацеев С. М., Череватенко О. И. О применении эллиптических кривых в некоторых протоколах электронного голосования 62

Механика

Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of a Sandwich Beam by Local Loads in the Temperature Field [Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Изгиб трехслойной балки локальными нагрузками в температурном поле] 69

Информатика

Соловьев В. М. Конвергентные и гиперконвергентные вычислительные системы 84

Файзлиев А. Р., Хомченко А. А., Сидоров С. П. Эмпирический анализ работы алгоритмов решения задачи репликации индекса 101

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (группы научных специальностей: 01.01.00 – математика; 01.02.00 – механика; 05.13.00 – информатика, вычислительная техника и управление).

Журнал входит в международные базы данных Emerging Sources Citation Index, MathSciNet, zbMATH

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Директор издательства
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Крылова Елена Борисовна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Кочкаева Инна Анатольевна

Верстка
Степанова Наталия Ивановна

Технический редактор
Каргин Игорь Анатольевич

Корректор
Кочкаева Инна Анатольевна

Адрес учредителя, издателя и издательства:
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89
E-mail: izvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 22.02.18.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 14,41(15,5).
Тираж 500 экз. Заказ 15-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.
Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2017



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <http://mmi.sgu.ru/dlya-avtogo>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования в журнале. В случае положительного решения об опубликовании статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <http://mmi.sgu.ru>.

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <http://mmi.sgu.ru/>

Ответственный секретарь серии:

Халова Виктория Анатольевна

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

- Akniyev G. G.** Approximation Properties of Discrete Fourier Sums for Some Piecewise Linear Functions 4
- Gadzhimirzaev R. M.** Recurrence Relations for Polynomials Orthogonal on Sobolev, Generated by Laguerre Polynomials 17
- Kirillov A. N., Alkin R. V.** Stability of Periodic Billiard Trajectories in Triangle 25
- Kuznetsova M. A.** Asymptotic Formulae for Weight Numbers of the Sturm – Liouville Boundary Problem on a Star-shaped Graph 40
- Navasardyan K. A.** On the Representation of Functions by Absolutely Convergent Series by \mathcal{H}^2 -system 49
- Ratseev S. M., Cherevatenko O. I.** On Application of Elliptic Curves in Some Electronic Voting Protocols 62

Mechanics

- Starovoitov E. I., Leonenko D. V.** Bending of a Sandwich Beam by Local Loads in the Temperature Field 69

Computer Sciences

- Solovyev V. M.** Convergent and Hyperconvergent Computing Systems 84
- Faizliev A. R., Khomchenko A. A., Sidorov S. P.** Empirical Analysis of Algorithms for Solving the Index Tracking Problem 101



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ватулян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Республика Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Республика Беларусь)

Субботин Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Екатеринбург, Россия)

Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)

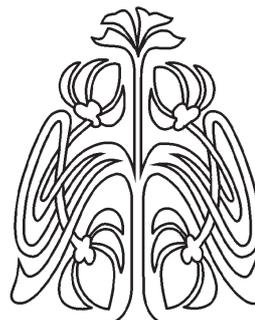
Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Victoriya A. Khalova (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Dmitry A. Indeitsev (St. Petersburg, Russia)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Vyacheslav S. Kharchenko (Kharkiv, Ukraine)

August P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Alexander V. Manzhirrov (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan', Russia)

Pavel P. Parkhomenko (Moscow, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Alexander F. Rezchikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

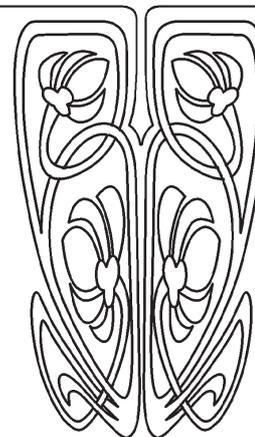
Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Yurii N. Subbotin (Ekaterinburg, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

Vyacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)



МАТЕМАТИКА

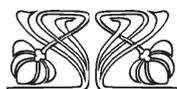
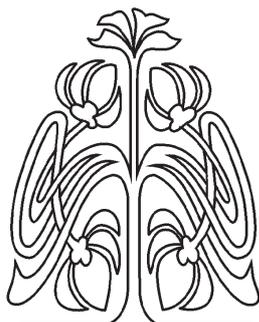
УДК 517.521.2

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

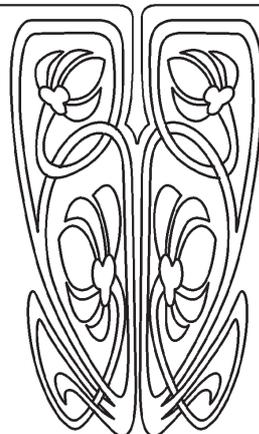
Г. Г. Акниев

Акниев Гасан Гарунович, младший научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, 367025, Россия, Махачкала, М. Гаджиева, 45, hasan.akniyev@gmail.com

Для заданного натурального числа $N \geq 2$ на отрезке $[0, 2\pi]$ выбрано N равноотстоящих узлов $t_k = 2\pi k/N$ ($0 \leq k \leq N-1$). Для каждого натурального числа n , удовлетворяющего неравенству $1 \leq n \leq \lfloor N/2 \rfloor$, обозначим через $L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f, x)$ тригонометрический полином порядка n наименьшего квадратического отклонения от функции f в точках t_k , который доставляет минимум сумме $\sum_{k=0}^{N-1} |f(t_k) - T_n(t_k)|^2$ среди всех тригонометрических полиномов T_n порядка n . Рассмотрена задача о приближении кусочно-линейных периодических функций полиномами $L_{n,N}(f, x)$. На конкретных примерах показано, что полиномы $L_{n,N}(f, x)$ приближают кусочно-линейную непрерывную периодическую функцию со скоростью $O(1/n)$ равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$ и $1 \leq n \leq N/2$, а также приближают такую функцию $f(x)$ со скоростью $O(1/n^2)$ вне сколь угодно малых окрестностей, содержащих точки «излома» рассматриваемой ломаной $f(x)$. Кроме того, на примерах показано, что полиномы $L_{n,N}(f, x)$ приближают кусочно-линейную разрывную функцию со скоростью $O(1/n)$ вне сколь угодно малых окрестностей, содержащих точки разрыва $f(x)$. Особое внимание уделено приближению полиномами $L_{n,N}(f, x)$ 2π -периодических функций f_1 и f_2 , которые на отрезке $[-\pi, \pi]$ совпадают с функциями $|x|$ и $\text{sign } x$ соответственно. Для первой из этих функций показано, что вместо оценки $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1, x)| \leq c \ln n/n$, вытекающей из известного неравенства Лебега для полиномов $L_{n,N}(f, x)$, установлена точная по порядку оценка $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1, x)| \leq c/n$ ($x \in \mathbb{R}$), которая имеет место равномерно относительно $1 \leq n \leq \lfloor N/2 \rfloor$. Кроме того, получена локальная оценка $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1, x)| \leq c(\varepsilon)/n^2$ ($|x - \pi k| \geq \varepsilon$), которая также имеет место равномерно относительно $1 \leq n \leq \lfloor N/2 \rfloor$. Что касается второй из указанных функций $f_2(x)$,



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





то для нее равномерно относительно $1 \leq n \leq \lfloor N/2 \rfloor$ получена оценка $|f_2(x) - L_{n,N}(f_2, x)| \leq c(\varepsilon)/n$ ($|x - \pi k| \geq \varepsilon$). Доказательства полученных оценок базируются на сравнении аппроксимативных свойств дискретных и непрерывных тригонометрических сумм Фурье.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, кусочно-линейные функции, приближение функций, тригонометрические полиномы, ряды Фурье.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-4-16

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $N \geq 2$ — целое положительное число, и $t_k = 2\pi k/N$, $(0 \leq k \leq N-1)$ — система узловых точек. Обозначим через $L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f, x)$, где $1 \leq n \leq \lfloor N/2 \rfloor$, тригонометрический полином порядка n наименьшего квадратического отклонения от функции f на сетке $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$. Другими словами, полином $L_{n,N}(f, x)$ доставляет минимум для суммы $\sum_{k=0}^{N-1} |f(t_k) - T_n(t_k)|^2$ на множестве всех тригонометрических полиномов T_n порядка n . В частности, $L_{\lfloor N/2 \rfloor, N}(f, x)$ — интерполяционный полином, совпадающий с функцией $f(x)$ в точках t_k . Легко показать (см. [1]), что $L_{n,N}(f, x)$ при $n < N/2$ представляется в виде

$$L_{n,N}(f, x) = \sum_{\nu=-n}^n c_{\nu}^{(N)}(f) e^{i\nu x}, \quad \text{где } c_{\nu}^{(N)}(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i\nu t_k},$$

а когда $n = N/2$ (когда N — чётное)

$$L_{N/2, N}(f, x) = L_{N/2-1, N}(f, x) + a_n^{(2n)}(f) \cos nx, \quad (1)$$

где

$$a_n^{(2n)}(f) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(t_k) \cos nt_k. \quad (2)$$

Подробнее о приближении функций тригонометрическими полиномами можно прочитать в работах [2–11]. Целью данной работы является исследование поведения величин $|L_{n,N}(f_1, x) - f_1(x)|$ и $|L_{n,N}(f_2, x) - f_2(x)|$ при $n, N \rightarrow \infty$ для функций $f_1(x) = |x|$ и $f_2(x) = \text{sign } x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Для этого воспользуемся одной леммой, доказанной в [1]. Предварительно введём некоторые обозначения, а именно обозначим через

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

коэффициенты Фурье функции f , а через

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}, \quad S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}$$

— ряд Фурье функции f и его частичную сумму порядка n соответственно. Обозначим

$$\Delta^I(\varepsilon) = [-\pi + \varepsilon, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi - \varepsilon], \quad 0 < \varepsilon < \pi/2.$$

Кроме того, через C и $C(\varepsilon)$ мы будем обозначать некоторые положительные константы, зависящие только от указанных параметров, вообще говоря, разные в разных местах.



Лемма 1 (см. [1]). Если ряд Фурье функции f сходится в точках $t_k = 2\pi k/N$, тогда имеет место представление

$$L_{n,N}(f, x) = S_n(f, x) + R_{n,N}(f, x),$$

где $2n < N$ и

$$R_{n,N}(f, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) \cos \mu N t f(t) dt. \quad (3)$$

Из приведённой леммы следует, что при $n < N/2$

$$|L_{n,N}(f, x) - f(x)| \leq |S_n(f, x) - f(x)| + |R_{n,N}(f, x)|. \quad (4)$$

При чётном N возможен случай, когда $2n = N$, тогда из (1) и (4) можно записать

$$|L_{n,2n}(f, x) - f(x)| \leq |S_{n-1}(f, x) - f(x)| + |R_{n-1,2n}(f, x)| + |a_n^{(2n)}(f)|, \quad n = N/2. \quad (5)$$

В данной работе были получены следующие результаты.

Теорема 1. Для отклонения $L_{n,N}(f)$ от функции f_1 , где $f_1(x) = |x|$ на $[-\pi, \pi]$ и $n \leq [N/2]$, справедливы следующие оценки:

$$|L_{n,N}(f_1, x) - f_1(x)| \leq \frac{C}{n}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$|L_{n,N}(f_1, x) - f_1(x)| \leq \frac{C(\varepsilon)}{n^2}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

Теорема 2. Для отклонения $L_{n,N}(f)$ от функции f_2 , где $f_2(x) = \text{sign } x$ на $[-\pi, \pi]$ и $n \leq [N/2]$, справедлива следующая оценка:

$$|L_{n,N}(f, x) - f(x)| \leq \frac{C(\varepsilon)}{n}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

Прежде чем приступить к доказательству данных теорем, мы докажем несколько вспомогательных утверждений. А именно из (4) и (5) видно, что для исследования поведения $|L_{n,N}(f, x) - f(x)|$ для функций f_1 и f_2 требуется изучить поведение величин $|S_n(f_1, x) - f_1(x)|$, $|S_n(f_2, x) - f_2(x)|$, $|R_{n,N}(f_1, x)|$ и $|R_{n,N}(f_2, x)|$, а также $|a_n^{(2n)}(f_1)|$ и $|a_n^{(2n)}(f_2)|$, что будет сделано в следующих пунктах.

1. ОЦЕНКА ДЛЯ $|S_n(f_i, x) - f_i(x)|$, $i = 0, 1$, $n < N/2$

Лемма 2. Для величины $|S_n(f_1, x) - f_1(x)|$, где $f_1(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, справедливы оценки

$$|S_n(f_1, x) - f_1(x)| \leq \frac{C}{n}, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (6)$$

$$|S_n(f_1, x) - f_1(x)| \leq \frac{C(\varepsilon)}{n^2}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon). \quad (7)$$

Лемма 3. Для величины $|S_n(f_2, x) - f_2(x)|$, где $f_2(x) = \text{sign } x$, $x \in [-\pi, \pi]$, справедлива оценка

$$|S_n(f_2, x) - f_2(x)| \leq \frac{C(\varepsilon)}{n}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$



Перейдем к доказательству данных лемм.

Доказательство (леммы 2). Из [12, с. 690] имеем формулу

$$f_1(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (8)$$

откуда, учитывая, что $|\cos(2k-1)x| \leq 1$, можно легко получить (6). С другой стороны, применив к (8) преобразование Абеля, легко получить (7). \square

Доказательство леммы 3 получено в [13].

2. ОЦЕНКА ОСТАТКА $R_{n,N}(f_1, x)$

Справедлива следующая

Лемма 4. Для $R_{n,N}(f_1, x)$ при $n < N/2$ справедливы оценки

$$|R_{n,N}(f_1, x)| \leq \frac{\pi}{n} \left(4 + \frac{1}{2n}\right) \leq \frac{C}{n}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$|R_{n,N}(f_1, x)| \leq \frac{\pi}{n^2} \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{|\sin \varepsilon|}\right) \leq \frac{C(\varepsilon)}{n^2}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

Для доказательства данной леммы заметим, что остаток (3) для функции f_1 принимает следующий вид:

$$R_{n,N}(f_1, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) \cos \mu N t |t| dt, \quad (9)$$

где

$$D_n(x-t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \quad (10)$$

— ядро Дирихле. Подставив формулу (10) в (9) имеем

$$|R_{n,N}(f_1, x)| \leq |R_{n,N}^1(f_1, x)| + |R_{n,N}^2(f_1, x)|, \quad (11)$$

где

$$R_{n,N}^1(f_1, x) = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos \mu N t dt, \quad (12)$$

$$R_{n,N}^2(f_1, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \cos \mu N t dt. \quad (13)$$

Величины $|R_{n,N}(f_1, x)|$ и $|R_{n,N}(f_2, x)|$ оценены в следующих леммах.

Лемма 5. Выражение (12) имеет следующую оценку при $n < N/2$:

$$|R_{n,N}^1(f_1, x)| \leq \frac{\pi}{6n^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$



Лемма 6. Выражение (13) имеет следующую оценку при $n < N/2$:

$$|R_{n,N}^2(f_1, x)| \leq \frac{4\pi}{3n}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Лемма 7. Выражение (13) имеет также следующую оценку при $n < N/2$:

$$|R_{n,N}^2(f_1, x)| \leq \frac{4\pi}{n^2 |\sin \varepsilon|}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

Перейдем к доказательству данных лемм.

Доказательство (леммы 5). В силу четности подынтегрального выражения можно переписать (12) в следующем виде:

$$R_{n,N}^1(f_1, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^{\pi} t \cos \mu N t dt.$$

Применив метод интегрирования по частям, получим:

$$R_{n,N}^1(f_1, x) = \frac{2}{\pi N^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu N} - 1}{\mu^2}.$$

Очевидно, что когда N — четное, $R_{n,N}^1(f_1, x) = 0$. Когда N — нечетное, сумма принимает следующий вид:

$$R_{n,N}^1(f_1, x) = -\frac{4}{\pi N^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\mu - 1)^2},$$

откуда

$$|R_{n,N}^1(f_1, x)| = \frac{1}{\pi N^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2 (1 - \frac{1}{2\mu})^2} \leq \frac{4}{\pi N^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} = \frac{2\pi}{3N^2} \leq \frac{\pi}{6n^2}. \quad \square$$

Для доказательства лемм 6 и 7 нам понадобится доказать еще две леммы:

Лемма 8. Выражение (13) можно представить в следующем виде:

$$R_{n,N}^2(f_1, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \cos kx \left[\frac{1}{(\mu N - k)^2} + \frac{1}{(\mu N + k)^2} \right] ((-1)^{\mu N+k} - 1). \quad (14)$$

Доказательство. В (13) вынесем сумму из интеграла:

$$R_{n,N}^2(f_1, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos \mu N t \cos k(x - t) dt. \quad (15)$$

Подставив в (15) формулу $\cos k(x - t) = \cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt$, получим:

$$R_{n,N}^2(f_1, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \cos kx \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos \mu N t \cos kt dt. \quad (16)$$



Рассмотрим подробнее интеграл из (16):

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos \mu N t \cos k t dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |t| (\cos(\mu N - k)t + \cos(\mu N + k)t) dt = \\ & = \int_0^{\pi} t \cos(\mu N - k)t dt + \int_0^{\pi} t \cos(\mu N + k)t dt = \frac{(-1)^{\mu N - k} - 1}{(\mu N - k)^2} + \frac{(-1)^{\mu N + k} - 1}{(\mu N + k)^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (16) и (17):

$$R_{n,N}^2(f_1, x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \cos kx \left[\frac{1}{(\mu N - k)^2} + \frac{1}{(\mu N + k)^2} \right] ((-1)^{\mu N + k} - 1). \quad \square$$

Лемма 9. *Справедлива следующая оценка:*

$$\left| \sum_{j=1}^n ((-1)^{M+j} - 1) \cos jx \right| \leq \frac{2}{|\sin x|}, \quad M \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Можно записать

$$\sum_{j=1}^n ((-1)^{M+j} - 1) \cos jx = \begin{cases} -2 \sum_{k=1}^l \cos 2kx, & \text{если } M = 2m, \\ -2 \sum_{k=0}^l \cos(2k+1)x, & \text{если } M = 2m+1. \end{cases} \quad (18)$$

Оценим каждый из случаев отдельно. Для этого проведем некоторые преобразования:

$$\sum_{k=1}^l \cos 2kx = \frac{1}{\sin x} \sum_{k=1}^l \sin x \cos 2kx = \frac{\sin(2l+1)x - \sin x}{2 \sin x}.$$

Отсюда имеем

$$\left| \sum_{k=1}^l \cos 2kx \right| \leq \frac{1}{|\sin x|}. \quad (19)$$

Аналогично получаем формулу

$$\sum_{k=0}^l \cos(2k+1)x = \frac{\sin(2l+2)x}{2 \sin x},$$

откуда получаем оценку

$$\left| \sum_{k=1}^l \cos(2k+1)x \right| \leq \frac{1}{2|\sin x|} \leq \frac{1}{|\sin x|}. \quad (20)$$

Доказательство следует из (18)–(20). □

Доказательство (леммы 6). Из формулы (14)

$$|R_{n,N}^2(f_1, x)| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(\mu N - k)^2} + \frac{1}{(\mu N + k)^2} \right] \leq$$



$$\begin{aligned} &\leq \frac{4}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(\mu N - n)^2} + \frac{1}{(\mu N + 1)^2} \right] = \frac{4n}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\mu N - n)^2} + \frac{1}{(\mu N + 1)^2} \right] < \\ &< \frac{4n}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(\mu N - n)^2} \right] = \frac{8n}{\pi N^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{n}{\mu N}\right)^2} \leq \frac{32n}{\pi N^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} \leq \frac{4\pi}{3n}. \quad \square \end{aligned}$$

Доказательство (леммы 7). Рассмотрим внутреннюю сумму (14):

$$A = \sum_{k=1}^n \cos kx \left[\frac{1}{(\mu N - k)^2} + \frac{1}{(\mu N + k)^2} \right] ((-1)^{\mu N + k} - 1).$$

Применив к ней преобразование Абеля, получим:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^n ((-1)^{\mu N + k} - 1) \cos kx \left(\frac{1}{(\mu N - n)^2} + \frac{1}{(\mu N + n)^2} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(\mu N - k)^2} + \frac{1}{(\mu N + k)^2} - \frac{1}{(\mu N - k - 1)^2} - \frac{1}{(\mu N + k + 1)^2} \right) \times \\ &\quad \times \sum_{j=1}^k ((-1)^{\mu N + j} - 1) \cos kx \end{aligned}$$

Оценим A :

$$\begin{aligned} |A| &\leq \left| \sum_{k=1}^n ((-1)^{\mu N + k} - 1) \cos kx \right| \left(\frac{1}{(\mu N - n)^2} + \frac{1}{(\mu N + n)^2} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(\mu N - k)^2} + \frac{1}{(\mu N + k)^2} - \frac{1}{(\mu N - k - 1)^2} - \frac{1}{(\mu N + k + 1)^2} \right) \times \\ &\quad \times \left| \sum_{j=1}^k ((-1)^{\mu N + j} - 1) \cos kx \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n ((-1)^{\mu N + k} - 1) \cos kx \right| \left(\frac{1}{(\mu N - n)^2} + \frac{1}{(\mu N + n)^2} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(\mu N - k - 1)^2} - \frac{1}{(\mu N - k)^2} + \frac{1}{(\mu N + k)^2} - \frac{1}{(\mu N + k + 1)^2} \right) \times \\ &\quad \times \left| \sum_{j=1}^k ((-1)^{\mu N + j} - 1) \cos kx \right|. \quad (21) \end{aligned}$$

Используя лемму 9, перепишем (21):

$$\begin{aligned} |A| &\leq \frac{2}{|\sin x|} \left[\frac{1}{(\mu N - n)^2} + \frac{1}{(\mu N + n)^2} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(\mu N - k - 1)^2} - \frac{1}{(\mu N - k)^2} + \frac{1}{(\mu N + k)^2} - \frac{1}{(\mu N + k + 1)^2} \right) \right] = \end{aligned}$$



$$= \frac{2}{|\sin x|} \left(\frac{2}{(\mu N - n)^2} - \frac{1}{(\mu N - 1)^2} + \frac{1}{(\mu N + 1)^2} \right) \leq \frac{4}{|\sin x|(\mu N - n)^2}. \quad (22)$$

Из (14) и (22) можно записать оценку $R_{n,N}(f_1, x)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} |R_{n,N}(f_1, x)| &\leq \frac{8}{\pi|\sin x|} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu N - n)^2} = \frac{8}{N^2\pi \sin x} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} \frac{1}{(1 - \frac{n}{\mu N})^2} \leq \\ &\leq \frac{16}{N^2\pi|\sin x|} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} = \frac{16}{N^2\pi|\sin x|} \frac{\pi^2}{6} \leq \frac{4\pi}{n^2|\sin x|}, \quad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi). \end{aligned} \quad (23)$$

При $x \in \Delta^I(\varepsilon)$

$$|R_{n,N}(f_1, x)| \leq \frac{4\pi}{n^2|\sin \varepsilon|}. \quad \square$$

Очевидно, что доказательство леммы 4 следует из формулы (11) и лемм 5–7.

3. ОЦЕНКА ОСТАТКА $R_{n,N}(f_2, x)$

Лемма 10. Для $R_{n,N}(f_2, x)$ при $n < N/2$ справедлива оценка

$$|R_{n,N}(f_2, x)| \leq \frac{2\pi}{n|\sin \varepsilon|} = \frac{C(\varepsilon)}{n}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

Повторяя описанные при доказательстве леммы 4 рассуждения, получим аналогично формуле (11) следующую формулу:

$$|R_{n,N}(f_2, x)| \leq |R_{n,N}^1(f_2, x)| + |R_{n,N}^2(f_2, x)|, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} R_{n,N}^1(f_2, x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign } t \cos \mu N t \, dt, \\ R_{n,N}^2(f_2, x) &= \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign } t \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \cos \mu N t \, dt. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$R_{n,N}^1(f_2, x) = 0, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (25)$$

оценка же для $R_{n,N}^2(f_2, x)$ будет получена в следующей лемме.

Лемма 11. Справедлива оценка

$$|R_{n,N}^2(f_2, x)| \leq \frac{2\pi}{n|\sin \varepsilon|}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon). \quad (26)$$

Перед доказательством данной леммы мы докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма 12. Имеет место следующая оценка:

$$\left| \sum_{j=1}^m \sin jx (1 - (-1)^{j+M}) \right| \leq \frac{2}{|\sin x|},$$

где m и M — произвольные натуральные числа.



Доказательство. Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^m \sin jx(1 - (-1)^{j+M}) = \begin{cases} 2 \sum_{k=1}^l \sin 2kx, & \text{если } M = 2m, \\ 2 \sum_{k=0}^l \sin(2k + 1)x, & \text{если } M = 2m + 1. \end{cases}$$

Из равенств

$$\sum_{k=0}^n \sin(2k + 1)x = \frac{1 - \cos 2(n + 1)x}{2 \sin x}, \quad \sum_{k=0}^n \sin 2kx = \frac{\cos x - \cos(2n + 1)x}{2 \sin x}$$

сразу следуют оценки

$$\left| \sum_{k=0}^n \sin(2k + 1)x \right| \leq \frac{1}{|\sin x|}, \quad \left| \sum_{k=1}^n \sin 2kx \right| \leq \frac{1}{|\sin x|}. \quad \square$$

Теперь перейдем к доказательству леммы 11.

Доказательство (леммы 11). Имеем

$$\begin{aligned} R_{n,N}^2(f_2, x) &= \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign } t \sum_{k=1}^n \cos k(x - t) \cos \mu Nt \, dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos \mu Nt \text{sign } t \, dt = \frac{4}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sin kx \int_0^{\pi} \sin kt \cos \mu Nt \, dt = \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sin kx \int_0^{\pi} (\sin(k - \mu N)t + \sin(k + \mu N)t) \, dt. \end{aligned} \quad (27)$$

Вычислим отдельно интеграл:

$$\int_0^{\pi} (\sin(k - \mu N)t + \sin(k + \mu N)t) \, dt = (1 - (-1)^{k+\mu N}) \frac{2k}{k^2 - (\mu N)^2}. \quad (28)$$

Отсюда и из (27)

$$R_{n,N}^2(f_2, x) = \frac{8}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sin kx(1 - (-1)^{k+\mu N}) \frac{k}{k^2 - (\mu N)^2}.$$

Применим к внутренней сумме преобразование Абеля:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin kx(1 - (-1)^{k+\mu N}) \frac{k}{k^2 - (\mu N)^2} &= \frac{n}{n^2 - (\mu N)^2} \sum_{j=1}^n \sin jx(1 - (-1)^{j+\mu N}) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{k^2 - (\mu N)^2} - \frac{k+1}{(k+1)^2 - (\mu N)^2} \right) \sum_{j=1}^k \sin jx(1 - (-1)^{j+\mu N}). \end{aligned} \quad (29)$$



Из (27)–(29) получим

$$\begin{aligned}
 |R_{n,N}^2(f_2, x)| &\leq \frac{8}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^n \sin kx (1 - (-1)^{k+\mu N}) \frac{k}{k^2 - (\mu N)^2} \right| \leq \\
 &\leq \frac{8}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\left| \frac{n}{n^2 - (\mu N)^2} \sum_{j=1}^n \sin jx (1 - (-1)^{j+\mu N}) \right| + \right. \\
 &+ \left. \left| \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{k^2 - (\mu N)^2} - \frac{k+1}{(k+1)^2 - (\mu N)^2} \right) \sum_{j=1}^k \sin jx (1 - (-1)^{j+\mu N}) \right| \right) \leq \\
 &\leq \frac{8}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{n}{(\mu N)^2 - n^2} \left| \sum_{j=1}^n \sin jx (1 - (-1)^{k+\mu N}) \right| + \right. \\
 &+ \left. \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{k}{(\mu N)^2 - k^2} - \frac{k+1}{(\mu N)^2 - (k+1)^2} \right| \left| \sum_{j=1}^k \sin jx (1 - (-1)^{k+\mu N}) \right| \right).
 \end{aligned}$$

Применив результаты леммы 12, получим:

$$\begin{aligned}
 |R_{n,N}^2(f_2, x)| &\leq \frac{16}{\pi |\sin x|} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{n}{(\mu N)^2 - n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k+1}{(\mu N)^2 - (k+1)^2} - \frac{k}{(\mu N)^2 - k^2} \right) \right) = \\
 &= \frac{16}{\pi |\sin x|} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{(\mu N)^2 - n^2} - \frac{1}{(\mu N)^2 - 1} \right) < \frac{32n}{\pi |\sin x|} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu N)^2 - n^2} = \\
 &= \frac{32}{\pi |\sin x| N^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{n}{\mu N}\right)^2} \leq \frac{128n}{3\pi N^2 |\sin x|} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} < \frac{2\pi}{n |\sin x|}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$|R_{n,N}^2(f_2, x)| \leq \frac{2\pi}{n |\sin \varepsilon|}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon). \quad \square$$

Доказательство леммы 10 следует из (24), (25) и (26).

4. ОЦЕНКА ВЕЛИЧИН $|a_n^{(2n)}(f_1)|$ И $|a_n^{(2n)}(f_2)|$

Справедлива лемма

Лемма 13. *Имеют место оценки*

$$|a_n^{(2n)}(f_1)| \leq \frac{\pi}{2n^2}, \quad |a_n^{(2n)}(f_2)| \leq \frac{1}{2n}.$$

Доказательство. Формула (2) для функции f_1 имеет следующий вид:

$$a_n^{(2n)}(f_1) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f_1(t_k) \cos nt_k.$$

В силу 2π -периодичности функции f_1 мы имеем

$$a_n^{(2n)}(f_1) = \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^{n-1} f_1(t_k) (-1)^k = \frac{\pi}{2n^2} \sum_{k=-n}^{n-1} |k| (-1)^k = \begin{cases} 0, & n = 2l, \\ \frac{\pi}{2n^2} & n = 2l + 1. \end{cases} \quad (30)$$



Проведя аналогичные рассуждения для $a_n^{(2n)}(f_2)$, получим:

$$a_n^{(2n)}(f_2) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f_2(t_k) \cos nt_k = \frac{1}{2n} (1 - (-1)^n) \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k = \begin{cases} 0, & n = 2l, \\ -\frac{1}{2n}, & n = 2l + 1. \end{cases} \quad (31)$$

Учитывая формулы (30) и (31), приходим к утверждению леммы. \square

5. ОЦЕНКИ ДЛЯ $|L_{n,N}(f_1, x) - f_1(x)|$ И $|L_{n,N}(f_2, x) - f_2(x)|$

Для оценки $|L_{n,N}(f_1, x) - f_1(x)|$ при $n < N/2$ мы обратимся к неравенству (4), из которого в силу лемм 2 и 4 мы убеждаемся в справедливости утверждения теоремы 1 для $n < N/2$. Если же $n = N/2$, то мы обратимся к неравенству (5). Величины $|S_{n-1}(f, x) - f(x)|$, $|R_{n-1,2n}(f, x)|$ и $|a_n^{(2n)}(f)|$, фигурирующие в этом неравенстве, были оценены в вышеупомянутых леммах 2, 4, а также лемме 13 соответственно. Из этих оценок и неравенства (5) имеем

$$|L_{n,2n}(f_1, x) - f_1(x)| \leq \frac{C}{n-1} + \frac{C}{n-1} + \frac{\pi}{2n^2} \leq \frac{C}{n}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$|L_{n,2n}(f_1, x) - f_1(x)| \leq \frac{C(\varepsilon)}{(n-1)^2} + \frac{C(\varepsilon)}{(n-1)^2} + \frac{\pi}{2n^2} \leq \frac{C(\varepsilon)}{n^2}, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Повторяя почти дословно рассуждения из доказательства теоремы 1 и используя вместо лемм 2 и 4 леммы 3 и 10, имеем

$$|L_{n,N}(f_2, x) - f_2(x)| \leq \frac{C(\varepsilon)}{n} + \frac{C(\varepsilon)}{n} + \frac{1}{2n} \leq \frac{C(\varepsilon)}{n}, \quad n \leq \lfloor N/2 \rfloor, \quad x \in \Delta^I(\varepsilon).$$

Таким образом, теорема 2 также доказана.

Библиографический список

1. *Sharapudinov I. I.* On the best approximation and polynomials of the least quadratic deviation // *Analysis Math.* 1983. Vol. 9, iss. 3. P. 223–234. DOI: 10.1007/BF01989807.
2. *Бернштейн С. Н.* О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов // *Докл. АН СССР.* 1934. Т. 4, № 1. С. 1–5.
3. *Erdős P.* Some theorems and remarks on interpolation // *Acta Sci. Math. (Szeged).* 1950. Vol. 12. P. 11–17.
4. *Калашников М. Д.* О полиномах наилучшего (квадратического) приближения в заданной системе точек // *Докл. АН СССР.* 1955. Т. 105. С. 634–636.
5. *Крылов В. И.* Сходимость алгебраического интерполирования по корням многочлена Чебышева для абсолютно непрерывных функций и функций с ограниченным изменением // *Докл. АН СССР.* 1956. Т. 107. С. 362–365.
6. *Marcinkiewicz J.* Quelques remarques sur l'interpolation // *Acta Sci. Math. (Szeged).* 1936. Vol. 8. P. 127–130.
7. *Marcinkiewicz J.* Sur la divergence des polynômes d'interpolation // *Acta Sci. Math. (Szeged).* 1936. Vol. 8. P. 131–135.
8. *Natanson I. P.* On the convergence of trigonometrical interpolation at equidistant knots // *Ann. of Math.* 1944. Vol. 45. P. 457–471.
9. *Никольский С. М.* О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1940. Т. 4, вып. 6. С. 509–520.
10. *Турецкий А. Х.* Теория интерполирования в задачах. Минск : Высш. шк., 1968. 320 с.
11. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1965. 616 с.



12. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 3. М. : ФИЗМАТЛИТ, 1969. 656 с.
13. Магомед-Касумов М. Г. Аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена для кусочно гладких функций // Матем. заметки. Т. 100, вып. 2. С. 229–247. DOI: 10.4213/mzm10588.

Образец для цитирования:

Акиев Г. Г. Аппроксимативные свойства дискретных сумм Фурье для некоторых кусочно-линейных функций // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 4–16. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-4-16.

Approximation Properties of Discrete Fourier Sums for Some Piecewise Linear Functions

G. G. Akhiev

Gasan G. Akhiev, <https://orcid.org/0000-0001-8533-4277>, Dagestan Scientific Center RAS, 45, M. Gadzhieva Str., Makhachkala, Russia, 367025, hasan.akhiev@gmail.com

Let N be a natural number greater than 1. We select N uniformly distributed points $t_k = 2\pi k/N$ ($0 \leq k \leq N-1$) on $[0, 2\pi]$. Denote by $L_{n,N}(f) = L_{n,N}(f, x)$ ($1 \leq n \leq N/2$) the trigonometric polynomial of order n possessing the least quadratic deviation from f with respect to the system $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$. In other words, the greatest lower bound of the sums $\sum_{k=0}^{N-1} |f(t_k) - T_n(t_k)|^2$ on the set of trigonometric polynomials T_n of order n is attained by $L_{n,N}(f)$. In the present article the problem of function approximation by the polynomials $L_{n,N}(f, x)$ is considered. Using some example functions we show that the polynomials $L_{n,N}(f, x)$ uniformly approximate a piecewise-linear continuous function with a convergence rate $O(1/n)$ with respect to the variables $x \in \mathbb{R}$ and $1 \leq n \leq N/2$. These polynomials also uniformly approximate the same function with a rate $O(1/n^2)$ outside of some neighborhood of function's „crease“ points. Also we show that the polynomials $L_{n,N}(f, x)$ uniformly approximate a piecewise-linear discontinuous function with a rate $O(1/n)$ with respect to the variables x and $1 \leq n \leq N/2$ outside some neighborhood of discontinuity points. Special attention is paid to approximation of 2π -periodic functions f_1 and f_2 by the polynomials $L_{n,N}(f, x)$, where $f_1(x) = |x|$ and $f_2(x) = \text{sign } x$ for $x \in [-\pi, \pi]$. For the first function f_1 we show that instead of the estimate $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1, x)| \leq c \ln n/n$ which follows from the well-known Lebesgue inequality for the polynomials $L_{n,N}(f, x)$ we found an exact order estimate $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1, x)| \leq c/n$ ($x \in \mathbb{R}$) which is uniform relative to $1 \leq n \leq N/2$. Moreover, we found a local estimate $|f_1(x) - L_{n,N}(f_1, x)| \leq c(\varepsilon)/n^2$ ($|x - \pi k| \geq \varepsilon$) which is also uniform relative to $1 \leq n \leq N/2$. For the second function f_2 we found only a local estimate $|f_2(x) - L_{n,N}(f_2, x)| \leq c(\varepsilon)/n$ ($|x - \pi k| \geq \varepsilon$) which is uniform relative to $1 \leq n \leq N/2$. The proofs of these estimations are based on comparing of approximating properties of discrete and continuous finite Fourier series.

Key words: function approximation, trigonometric polynomials, Fourier series.

References

1. Sharapudinov I. I. On the best approximation and polynomials of the least quadratic deviation. *Analysis Math.*, 1983, vol. 9, iss. 3, pp. 223–234. DOI: 10.1007/BF01989807.
2. Bernshtein S. N. O trigonometricheskom interpolirovanii po sposobu naimen'shih kvadratov [On trigonometric interpolation by the least squares method]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Soviet Math. Dokl.], 1934, vol. 4, no. 1, pp. 1–5 (in Russian).



3. Erdős P. Some theorems and remarks on interpolation. *Acta Sci. Math.* (Szeged), 1950, vol. 12, pp. 11–17.
4. Kalashnikov M. D. O polinomah nailuchshego (kvadrateskogo) priblizheniya v zadannoy sisteme toчек [On polynomials of best quadratic approximation in a given system of points]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Soviet Math. Dokl.], 1955, vol. 105, pp. 634–636 (in Russian).
5. Krylov V. I. Shodimost algebraicheskogo interpolirovaniya po kornyam mnogochlena Chebisheva dlya absolutno neprerivnih funkciy i funkciy s ogranichennim izmeneniyem [Convergence of algebraic interpolation with respect to the roots of Chebyshev's polynomial for absolutely continuous functions and functions of bounded variation]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Soviet Math. Dokl.], 1956, vol. 107, pp. 362–365 (in Russian).
6. Marcinkiewicz J. Quelques remarques sur l'interpolation. *Acta Sci. Math.* (Szeged), 1936, vol. 8, pp. 127–130.
7. Marcinkiewicz J. Sur la divergence des polynômes d'interpolation. *Acta Sci. Math.* (Szeged), 1936, vol. 8, pp. 131–135.
8. Natanson I. P. On the convergence of trigonometrical interpolation at equidistant knots. *Ann. Math.*, 1944, vol. 45, pp. 457–471.
9. Nikolski S. Sur certaines méthodes d'approximation au moyen de sommes trigonométriques. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. URSS. Ser. Math.], 1940, vol. 4, iss. 6, pp. 509–520 (in Russian. French summary).
10. Turethkii A. H. *Teoriya interpolirovaniya v zadachakh* [Interpolation theory in problems]. Minsk, Vysheishaya Shkola, 1968. 320 p. (in Russian).
11. Zygmund A. *Trigonometric Series*, vol. 1–2. Cambridge University Press, 2015. 747 p.
12. Fikhtengol'ts G. M. *Course of Differential and Integral Calculus*, in 3 vols., vol. 3. Moscow, FIZMATLIT, 1969. 656 p (in Russian).
13. Magomed-Kasumov M. G. Approximation properties of de la Vallée-Poussin means for piecewise smooth functions. *Math. Notes*, 2016, vol. 100, iss. 2, pp. 229–244. DOI: 10.1134/S000143461607018X.

Cite this article as:

Akniyev G. G. Approximation Properties of Discrete Fourier Sums for Some Piecewise Linear Functions. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 4–16 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-4-16.



УДК 517.15

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ, ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫХ ПОЛИНОМАМИ ЛАГЕРРА

Р. М. Гаджимирзаев

Гаджимирзаев Рамис Махмудович, младший научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, 367025, Россия, Махачкала, М. Гаджиева, 45, ramis3004@gmail.com

В настоящей работе рассматривается система полиномов $l_{r,n}^\alpha(x)$ (r — натуральное число, $n = 0, 1, \dots$), ортонормированная относительно скалярного произведения типа Соболева (полиномы, ортонормированные по Соболеву) следующего вида: $\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^\infty f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x) dx$ и порожденная классическими ортонормированными полиномами Лагерра. Для системы полиномов $l_{r,n}^\alpha(x)$, ортонормированной по Соболеву, получены рекуррентные соотношения, которые могут быть использованы для изучения различных свойств этих полиномов и вычисления их значений при любых x и n . Кроме того, рассматривается система функций Лагерра $\mu_n^\alpha(x) = \sqrt{\rho(x)}l_n^\alpha(x)$, которая порождает систему функций $\mu_{r,n}^\alpha(x)$, ортонормированную относительно скалярного произведения следующего вида $\langle \mu_{r,n}^\alpha, \mu_{r,k}^\alpha \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} (\mu_{r,n}^\alpha(x))^{(\nu)}|_{x=0} (\mu_{r,k}^\alpha(x))^{(\nu)}|_{x=0} + \int_0^\infty (\mu_{r,n}^\alpha(x))^{(r)} (\mu_{r,k}^\alpha(x))^{(r)} dx$. Для порожденной системы функций $\mu_{r,n}^\alpha(x)$ также получены рекуррентные соотношения при $\alpha = 0$.

Ключевые слова: полиномы Лагерра, скалярное произведение типа Соболева, полиномы, ортонормированные по Соболеву, функции Лагерра.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-17-24

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы существенное развитие получила (см. работы [1–9] и приведённую в них библиографию) теория полиномов, ортогональных относительно скалярных произведений соболевского типа (полиномы, ортогональные по Соболеву). Скалярные произведения соболевского типа характеризуются тем, что они включают в себя слагаемые, которые «контролируют» поведение соответствующих ортогональных полиномов в заданной системе точек. В некоторых случаях полиномы, ортогональные по Соболеву на отрезке $[a, b]$, могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого отрезка. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпадали в концах отрезка $[a, b]$ с её значениями $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на промежутке (a, b) весом полиномы этим свойством не обладают.

В настоящей работе рассматривается система полиномов $l_{r,n}^\alpha(x)$ (r — натуральное число, $n = 0, 1, \dots$), введенная в [1, 2], ортонормированная при $\alpha > -1$ относительно скалярного произведения Соболева следующего вида:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^\infty f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x) dx, \quad (1)$$



где $\rho(x)$ — весовая функция, определенная равенством

$$\rho(x) = x^\alpha e^{-x}.$$

Полиномы $l_{r,n}^\alpha(x)$, порожденные классическими ортонормированными полиномами Лагерра $l_n^\alpha(x)$ ($n = 0, 1, \dots$), определяются [1, 2] с помощью равенств (11) и (12). В настоящей статье для полиномов $l_{r,n}^\alpha(x)$ получены рекуррентные соотношения, которые могут быть использованы для изучения различных свойств этих полиномов и вычисления их значений при любых x и n .

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ ЛАГЕРРА

При получении рекуррентных формул для полиномов, ортонормированных по Соболеву, порождённых полиномами Лагерра, нам понадобится некоторые свойства самих полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$, которые приведём в этом пункте.

Пусть α — произвольное действительное число. Тогда для полиномов Лагерра имеют место [10]:

формула Родрига

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \{x^{n+\alpha} e^{-x}\}^{(n)};$$

явный вид

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}; \quad (2)$$

соотношение ортогональности

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = \delta_{nm} h_n^\alpha \quad (\alpha > -1), \quad (3)$$

где δ_{nm} — символ Кронекера,

$$h_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} \Gamma(\alpha+1);$$

равенства

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x); \quad (4)$$

$$L_n^\alpha(x) = L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n-1}^{\alpha+1}(x); \quad (5)$$

рекуррентная формула

$$\left. \begin{aligned} L_0^\alpha(x) &= 1, & L_1^\alpha(x) &= -x + \alpha + 1, \\ nL_n^\alpha(x) &= (-x + 2n + \alpha - 1)L_{n-1}^\alpha(x) - (n + \alpha - 1)L_{n-2}^\alpha(x), & n &= 2, 3, \dots \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Из (3) следует, что соответствующая ортонормированная система полиномов Лагерра имеет вид

$$l_n^\alpha(x) = (h_n^\alpha)^{-\frac{1}{2}} L_n^\alpha(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

т.е.

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} l_n^\alpha(x) l_m^\alpha(x) dx = \delta_{nm} \quad (\alpha > -1).$$



Равенства (2) и (7) дают следующий явный вид для $l_n^\alpha(x)$:

$$l_n^\alpha(x) = \frac{1}{(h_n^\alpha)^{\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}. \quad (8)$$

Из (6) и (7) легко можно получить рекуррентную формулу для ортонормированных полиномов Лагерра $l_n^\alpha(x)$:

$$\left. \begin{aligned} l_0^\alpha(x) &= \frac{1}{(\Gamma(\alpha+1))^{\frac{1}{2}}}, & l_1^\alpha(x) &= \frac{-x+\alpha+1}{(\Gamma(\alpha+2))^{\frac{1}{2}}}, \\ l_n^\alpha(x) &= (a_n^\alpha - b_n^\alpha x)l_{n-1}^\alpha(x) - c_n^\alpha l_{n-2}^\alpha(x), & n &= 2, 3, \dots \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

где

$$a_n^\alpha = \frac{2n+\alpha-1}{[n(n+\alpha)]^{\frac{1}{2}}}, \quad b_n^\alpha = \frac{1}{[n(n+\alpha)]^{\frac{1}{2}}}, \quad c_n^\alpha = \left[\frac{(n-1)(n+\alpha-1)}{n(n+\alpha)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, через $\mu_n^\alpha(x)$ обозначим функции Лагерра, которые задаются следующим образом:

$$\mu_n^\alpha(x) = (\rho(x))^{\frac{1}{2}} l_n^\alpha(x) \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (10)$$

Они ортонормированы на множестве $[0, \infty)$ с единичным весом, т.е.

$$\langle \mu_n^\alpha, \mu_k^\alpha \rangle = \int_0^\infty \mu_n^\alpha(x) \mu_k^\alpha(x) dx = \delta_{nk} \quad (\alpha > -1).$$

Так как функции $\mu_n^\alpha(x)$ отличаются от полиномов $l_n^\alpha(x)$ множителем, не зависящим от номера функции, следовательно, аналогичная рекуррентная формула справедлива и для функций $\mu_n^\alpha(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \mu_0^\alpha(x) &= \frac{(\rho(x))^{\frac{1}{2}}}{(\Gamma(\alpha+1))^{\frac{1}{2}}}, & \mu_1^\alpha(x) &= \frac{(\rho(x))^{\frac{1}{2}}(-x+\alpha+1)}{(\Gamma(\alpha+2))^{\frac{1}{2}}}, \\ \mu_n^\alpha(x) &= (a_n^\alpha - b_n^\alpha x)\mu_{n-1}^\alpha(x) - c_n^\alpha \mu_{n-2}^\alpha(x), & n &= 2, 3, \dots \end{aligned} \right\}.$$

2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ, ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫХ ПОЛИНОМАМИ ЛАГЕРРА

Пусть $\alpha > -1$, $\rho = \rho(x) = e^{-x}x^\alpha$, L_ρ^2 — пространство измеримых функций f , определенных на полуоси $[0, \infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{L_\rho^2} = \left(\int_0^\infty f^2(x) \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Через $W_{L_\rho^2}^r$ обозначим подкласс функций f , непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a, b] \subset [0, \infty)$, а $f^{(r)} \in L_\rho^2$. В пространстве $W_{L_\rho^2}^r$ мы введем скалярное произведение (1).



Ортонормированная система полиномов Лагерра $l_n^\alpha(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) порождает [1, 2] на $[0, \infty)$ систему полиномов $l_{r,n}^\alpha(x)$ (r — натуральное число, $n = 0, 1, \dots$), определенных равенствами

$$l_{r,r+n}^\alpha(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} l_n^\alpha(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots \quad (11)$$

$$l_{r,n}^\alpha(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, r-1. \quad (12)$$

В работе [2] доказана следующая теорема

Теорема А. Если $\alpha > -1$, то система полиномов $l_{r,n}^\alpha(x)$ ($n = 0, 1, \dots$), порожденная полиномами Лагерра $l_n^\alpha(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) посредством равенств (11) и (12), полна в $W_{L^2}^r$ и ортонормирована относительно скалярного произведения (1).

Кроме того, в [1, 2] получены следующие представления для полиномов $l_{r,r+n}^\alpha(x)$:

$$l_{r,n+r}^\alpha(x) = \frac{1}{(h_n^\alpha)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{x^{\nu+r}}{\nu!(\nu+r)^{[r]}}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

$$l_{r,r+n}^\alpha(x) = \frac{(-1)^r}{(h_n^\alpha)^{\frac{1}{2}}} \left[L_{n+r}^{\alpha-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{B_{n,\nu}^\alpha x^\nu}{\nu!} \right],$$

где

$$B_{n,\nu}^\alpha = \{L_{n+r}^{\alpha-r}(x)\}_{x=0}^{(\nu)} = \frac{(-1)^\nu \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(n+r-\nu)!}.$$

Сравнивая равенства (8) и (13) замечаем, что порожденные полиномы $l_{r,r+n}^\alpha(x)$ при $r = 0$ совпадают с классическими полиномами Лагерра $l_n^\alpha(x)$.

В свою очередь, система функций Лагерра $\mu_n^\alpha(x)$, определенная равенством (10), порождает на $[0, \infty)$ систему функций $\mu_{r,n}^\alpha(x)$ (r — натуральное число, $n = 0, 1, \dots$) посредством равенств

$$\mu_{r,r+n}^\alpha(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} \mu_n^\alpha(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

$$\mu_{r,n}^\alpha(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, r-1. \quad (15)$$

В качестве следствия теоремы 1 из работы [1] можно сформулировать следующее

Следствие 1. Если $\alpha > -1$, то система функций $\mu_{r,n}^\alpha(x)$ ($n = 0, 1, \dots$), порожденная функциями Лагерра $\mu_n^\alpha(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) посредством равенств (14) и (15), полна в $W_{L^1}^r$ и ортонормирована относительно скалярного произведения

$$\langle \mu_{r,n}^\alpha, \mu_{r,k}^\alpha \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} (\mu_{r,n}^\alpha(x))^{(\nu)}|_{x=0} (\mu_{r,k}^\alpha(x))^{(\nu)}|_{x=0} + \int_0^\infty (\mu_{r,n}^\alpha(x))^{(r)} (\mu_{r,k}^\alpha(x))^{(r)} dx.$$



3. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ $l_{r,r+n}^\alpha(x)$

Хорошо известно, что в исследовании систем ортогональных полиномов важную роль играют рекуррентные соотношения, которые являются одним из способов задания систем ортогональных полиномов. Здесь будут получены рекуррентные соотношения для полиномов $l_{r,n}^\alpha(x)$, которые могут быть использованы для изучения различных свойств этих полиномов и вычисления их значений при любых x и n .

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

$$l_{r,n}^\alpha(x) = \frac{x}{n} l_{r,n-1}^\alpha(x), \quad 1 \leq n \leq r-1; \quad (16)$$

$$l_{r,r}^\alpha(x) = \frac{x}{r} l_{r-1,r-1}^\alpha(x), \quad r \geq 1; \quad (17)$$

$$l_{1,n+1}^\alpha(x) = -\sqrt{\frac{n+\alpha+1}{n+1}} l_{n+1}^\alpha(x) + l_n^\alpha(x) + \sqrt{\frac{n+\alpha+1}{n+1}} l_{n+1}^\alpha(0) - l_n^\alpha(0), \quad n \geq 1; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & b_n^\alpha r l_{r+1,r+n}^\alpha(x) = \\ & = l_{r,r+n}^\alpha(x) + [b_n^\alpha x - a_n^\alpha] l_{r,r+n-1}^\alpha(x) + c_n^\alpha l_{r,r+n-2}^\alpha(x), \quad r \geq 1, \quad n = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$a_n^\alpha = \frac{2n+\alpha-1}{[n(n+\alpha)]^{\frac{1}{2}}}, \quad b_n^\alpha = \frac{1}{[n(n+\alpha)]^{\frac{1}{2}}}, \quad c_n^\alpha = \left[\frac{(n-1)(n+\alpha-1)}{n(n+\alpha)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Равенство (16) очевидно, а (17) следует из (11) при $n=0$. Докажем соотношение (18). Из определения полиномов $l_{r,r+n}^\alpha(x)$ и равенств (4), (5) следует, что

$$\begin{aligned} l_{1,n+1}^\alpha(x) &= \int_0^x l_n^\alpha(t) dt = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} \int_0^x (l_{n+1}^{\alpha-1}(t))' dt = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} (l_{n+1}^{\alpha-1}(x) - l_{n+1}^{\alpha-1}(0)) = \\ &= -\sqrt{\frac{n+\alpha+1}{n+1}} l_{n+1}^\alpha(x) + l_n^\alpha(x) + \sqrt{\frac{n+\alpha+1}{n+1}} l_{n+1}^\alpha(0) - l_n^\alpha(0). \end{aligned}$$

Теперь докажем справедливость равенства (19). По определению

$$l_{r,r+n}^\alpha(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} l_n^\alpha(t) dt.$$

Подставляя в последнее равенство вместо $l_n^\alpha(t)$ правую часть соотношения (9), получим:

$$\begin{aligned} l_{r,r+n}^\alpha(x) &= \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} [(a_n^\alpha - b_n^\alpha t) l_{n-1}^\alpha(t) - c_n^\alpha l_{n-2}^\alpha(t)] dt = \\ &= a_n^\alpha l_{r,r+n-1}^\alpha(x) - \frac{b_n^\alpha}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} t l_{n-1}^\alpha(t) dt - c_n^\alpha l_{r,r+n-2}^\alpha(x). \end{aligned} \quad (20)$$



Отдельно рассмотрим второе слагаемое правой части равенства (20):

$$\begin{aligned} \frac{b_n^\alpha}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} t l_{n-1}^\alpha(t) dt &= -\frac{b_n^\alpha}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} (x-t-x) l_{n-1}^\alpha(t) dt = \\ &= b_n^\alpha x l_{r,r+n-1}^\alpha(x) - \frac{b_n^\alpha r}{r!} \int_0^x (x-t)^r l_{n-1}^\alpha(t) dt = b_n^\alpha x l_{r,r+n-1}^\alpha(x) - b_n^\alpha r l_{r+1,r+n}^\alpha(x). \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20) и приводя подобные слагаемые, получим (19). \square

Для функций $\mu_{r,r+n}^\alpha(x)$ мы приведем аналогичные рекуррентные соотношения при $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} \mu_{r,r}^0(x) &= \frac{2x^{r-1}}{(r-1)!} - 2\mu_{r-1,r-1}^0(x), \quad r \geq 1; \\ \mu_{1,n+2}^0(x) &= -\mu_{1,n+1}^0(x) - 2(\mu_{n+1}^0(x) - \mu_n^0(x)) \quad n \geq 0; \\ \mu_{r+1,r+n}^0(x) &= \frac{n}{r} \mu_{r,r+n}^0(x) + \\ &+ \left[\frac{x}{r} - \frac{2n-1}{r} \right] \mu_{r,r+n-1}^0(x) + \frac{n-1}{r} \mu_{r,r+n-2}^0(x), \quad r \geq 1, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Библиографический список

1. Шарпудинов И. И., Гаджиева З. Д., Гаджимирзаев Р. М. Системы функций, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева с дискретными массами, порожденных классическими ортогональными системами // Дагестанские электронные математические известия. 2016. Вып. 6. С. 31–60.
2. Шарпудинов И. И., Магомед-Касумов М. Г. О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 1. С. 51–68.
3. Marcellán F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Math. 2015. Vol. 33, iss. 3. P. 308–352. DOI: 10.1016/j.exmath.2014.10.002.
4. Pérez T. E., Piñar M. A., Xu Y. Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball // J. Approx. Theory. 2013. Vol. 171. P. 84–104. DOI: 10.1016/j.jat.2013.03.004.
5. Delgado A. M., Fernández L., Lubinsky D. S., Pérez T. E., Piñar M. A. Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball via outward normal derivatives // J. Math. Anal. and Appl. 2016. Vol. 440, iss. 2. P. 716–740. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.03.041.
6. Fernández L., Marcellán F., Pérez T. E., Piñar M. A., Xu Y. Sobolev orthogonal polynomials on product domains // J. Comput. and Appl. Math. 2015. Vol. 284. P. 202–215. DOI: 10.1016/j.cam.2014.09.015.
7. Lopez G., Marcellán F., Van Assche W. Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product // Constr. Approx. 1995. Vol. 11, iss. 1. P. 107–137. DOI: 10.1007/BF01294341.
8. Шарпудинов И. И., Шарпудинов Т. И. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Матем. 2017. № 8. С. 67–79.
9. Гаджимирзаев Р. М. Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 388–395. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-388-395.
10. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М. : Физматгиз, 1962. 500 с.

**Образец для цитирования:**

Гаджимирзаев Р. М. Рекуррентные соотношения для полиномов, ортонормированных по Соболеву, порожденных полиномами Лагерра // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 17–24. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-17-24.

Recurrence Relations for Polynomials Orthonormal on Sobolev, Generated by Laguerre Polynomials

R. M. Gadzhimirzaev

Ramis M. Gadzhimirzaev, <https://orcid.org/0000-0002-6686-881X>, Dagestan Scientific Center, Russian Academy of Sciences, 45, Gadjeva Str., Makhachkala, Russia, 367025, ramis3004@gmail.com

In this paper we consider the system of polynomials $l_{r,n}^\alpha(x)$ (r — natural number, $n = 0, 1, \dots$), orthonormal with respect to the Sobolev inner product (Sobolev orthonormal polynomials) of the following type $\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^\infty f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t) dt$ and generated by the classical orthonormal Laguerre polynomials. Recurrence relations are obtained for the system of Sobolev orthonormal polynomials, which can be used for studying various properties of these polynomials and calculate their values for any x and n . Moreover, we consider the system of the Laguerre functions $\mu_n^\alpha(x) = \sqrt{\rho(x)}l_n^\alpha(x)$, which generates a system of functions $\mu_{r,n}^\alpha(x)$ orthonormal with respect to the inner product of the following form $\langle \mu_{r,n}^\alpha, \mu_{r,k}^\alpha \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} (\mu_{r,n}^\alpha(x))^{(\nu)}|_{x=0} (\mu_{r,k}^\alpha(x))^{(\nu)}|_{x=0} + \int_0^\infty (\mu_{r,n}^\alpha(x))^{(r)} (\mu_{r,k}^\alpha(x))^{(r)} dx$. For the generated system of functions $\mu_{r,n}^\alpha(x)$, recurrence relations for $\alpha = 0$ are also obtained.

Key words: Laguerre polynomials, Sobolev-type inner product, Sobolev orthonormal polynomials, Laguerre functions.

References

1. Sharapudinov I. I., Gadzhieva Z. D., Gadzhimirzaev R. M. Systems of functions orthogonal with respect to scalar products of Sobolev type with discrete masses generated by classical orthogonal systems. *Daghestan Electronic Mathematical Reports*, 2016, iss. 6, pp. 31–60 (in Russian).
2. Sharapudinov I. I., Magomed-Kasumov M. G. Cauchy problem solution representation by Fourier series of polynomials, orthogonal on Sobolev, generated by Laguerre polynomials. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 51–68.
3. Marcellán F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials. *Expositiones Math.*, 2015, vol. 33, iss. 3, pp. 308–352. DOI: 10.1016/j.exmath.2014.10.002.
4. Pérez T. E., Piñar M. A., Xu Y. Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball. *J. Approx. Theory*, 2013, vol. 171, pp. 84–104. DOI: 10.1016/j.jat.2013.03.004.
5. Delgado A. M., Fernández L., Lubinsky D. S., Pérez T. E., Piñar M. A. Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball via outward normal derivatives. *J. Math. Anal. and Appl.*, 2016, vol. 440, iss. 2, pp. 716–740. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.03.041.
6. Fernández L., Marcellán F., Pérez T. E., Piñar M. A., Xu Y. Sobolev orthogonal polynomials on product domains. *J. Comput. and Appl. Math.*, 2015, vol. 284, pp. 202–215. DOI: 10.1016/j.cam.2014.09.015.
7. Lopez G., Marcellán F., Van Assche W. Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product. *Constr. Approx.*, 1995, vol. 11, iss. 1, pp. 107–137. DOI: 10.1007/BF01294341.



8. Sharapudinov I. I., Sharapudinov T. I. Polynomials orthogonal in the Sobolev sense, generated by Chebyshev polynomials orthogonal on a mesh. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2017, vol. 61, no. 8, 59–70. DOI: 10.3103/S1066369X17080072.
9. Gadzhimirzaev R. M. The Fourier series of the Meixner polynomials orthogonal with respect to the Sobolev-type inner product. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 388–395 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-388-395.
10. Szegő G. *Orthogonal Polynomials*. AMS Colloq. Publ., 1939, vol. 23. 440 p.

Cite this article as:

Gadzhimirzaev R. M. Recurrence Relations for Polynomials Orthonormal on Sobolev, Generated by Laguerre Polynomials. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 17–24 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-17-24.



УДК 517.938

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ БИЛЬЯРДНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

А. Н. Кириллов, Р. В. Алькин

Кириллов Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, ФИЦ Карельский научный центр РАН, Институт прикладных математических исследований Карельского НЦ РАН (Петрозаводск), 185910, Россия, Республика Карелия, Петрозаводск, Пушкинская, 11; Петрозаводский государственный университет, 185910, Россия, Республика Карелия, Петрозаводск, пр. Ленина, 33, kirillov@krc.karelia.ru

Алькин Руслан Валерьевич, студент 5-го курса Петрозаводского государственного университета, 185910, Россия, Республика Карелия, Петрозаводск, Ленина, 33, ruslan5.ru@yandex.ru

Рассматривается проблема устойчивости периодических бильярдных траекторий в треугольниках. Под устойчивостью понимается сохранение периода и качественной структуры траектории (её комбинаторного типа) при достаточно малых изменениях треугольника. Для описания устойчивых траекторий вводятся различные виды развёрток: геометрические, алгебраические, веерные. На основе введённых развёрток предложен новый метод веерного кодирования, упрощающий исследование устойчивости периодических траекторий. Для классификации траекторий введены понятия эквивалентности кодов и комбинаторного типа траектории. Дано строгое определение устойчивой периодической траектории в треугольнике. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости веерного кода (теорема 1). С целью упрощения систематизации устойчивых периодических траекторий введено понятие «паттерн», позволяющее генерировать устойчивые коды (теорема 2). Предложен конструктивный метод построения устойчивых периодических траекторий (теорема 3). Приведены примеры применения введённых понятий к периодическим бильярдным траекториям, в частности в тупоугольном треугольнике. Предложенный аппарат применим как к остроугольным, так и тупоугольным треугольникам, что открывает возможность его использования для решения проблемы существования периодической бильярдной траектории в произвольном тупоугольном треугольнике. Введено новое понятие условной устойчивости периодической бильярдной траектории при специальном изменении треугольника.

Ключевые слова: математический бильярд, кодирование траекторий, устойчивость, паттерн, веерный код.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-25-39

ВВЕДЕНИЕ

Нестрогое определение математического бильярда можно сформулировать следующим образом: бильярд в области $Q \subset \mathbb{R}^2$ — это динамическая система, порождённая прямолинейным движением точки в Q с постоянной по модулю скоростью (например, единичной). При попадании на кусочно-гладкую границу ∂Q точка отражается согласно закону: «угол падения равен углу отражения». Строгое, формальное, определение не просто [1], но для наших целей достаточно вышеприведённого определения.

Траектория движения — ломаная линия. Начальная точка $P_0 \in \partial Q$ и вектор начальной скорости \vec{V}_0 определяют траекторию. В настоящей работе Q — это треугольник. Полагаем, что при попадании траектории в вершину движение прекращается. Пусть \vec{V}_k — скорость частицы после k -го отражения в точке $P_k \in \partial Q$. Введём ориентацию границы ∂Q , в соответствии с которой выбирается начальное направление



траектории и угол, образованный вектором \vec{V}_0 со стороной. Отметим, что фазовым пространством бильярдной динамической системы является цилиндр $W = \partial Q \times [0, \pi]$. Здесь имеется в виду, что направление вектора скорости характеризуется углом, образуемым им со стороной треугольника и принимающим значение из отрезка $[0, \pi]$.

Определение 1. *Периодическая бильярдная траектория* — это бильярдная траектория, для которой существует $t \in \mathbb{N}$ такое, что $P_t = P_0$, $\vec{V}_t = \vec{V}_0$. Минимальное положительное t , удовлетворяющее определению, будем называть *периодом траектории с начальными данными* (P_0, \vec{V}_0) . При этом точка (P_0, \vec{V}_0) также будет называться периодической.

Для построения бильярдных траекторий в выпуклых многоугольниках используется метод отражений (или метод К. Г. Шварца [2]), состоящий в выпрямлении траектории в результате отражений многоугольника Q относительно сторон. В любом остроугольном треугольнике существуют периодические траектории, например, 3-звенная траектория, задаваемая высотным треугольником (результат Фаньяно [3]). Для тупоугольных треугольников вопрос о существовании периодических траекторий остаётся открытым. В [4] получены некоторые достаточные условия существования периодических траекторий, а в [5] показано, что в тупоугольных треугольниках с углом, меньшим 100° , существуют периодические траектории. В настоящей работе исследуется проблема устойчивости бильярдных траекторий в произвольном треугольнике.

Устойчивая периодическая бильярдная траектория — это такая траектория, которая при малом «шевелении» треугольника останется периодической с тем же периодом и порождённой ею развёрткой, полученной методом К. Г. Шварца [4]. В настоящей статье не рассматривается устойчивость по отношению к малым изменениям начальных данных, чему посвящены, например, работы [6, 7]. В работе [4] для исследования устойчивости траекторий (по отношению к изменению треугольника) вводится специальное кодирование. Оно заключается в присвоении определённых символов отражениям относительно разных сторон. Таким образом, развёртке однозначно соответствует слово из этих символов. Там же даётся критерий устойчивости траектории на языке этого кода. Кроме того, в работе [4] поставлена задача описания всех устойчивых периодических траекторий в произвольном треугольнике и представлены частные случаи решения этой задачи. Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию данной задачи. С этой целью вводится новый способ кодирования на основе понятия «веер развёртки».

1. КОДИРОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ

Введём ряд понятий, которые будут использоваться в дальнейшем.

Определение 2. *Геометрическая развёртка* для треугольника $\triangle ABC$ — это последовательность треугольников $\{\Delta_i\}$, полученных из $\triangle ABC$ в результате последовательных отражений относительно любых его сторон (AB, AC, BC) . При этом для любого i $\{\Delta_i \neq \Delta_{i+1}\}$.

Замечание 1. В геометрической развёртке треугольники могут накладываться друг на друга.

Обозначим отражения $\triangle ABC$ относительно его сторон AB, AC, BC через r_1, r_2, r_3 соответственно.



Определение 3. Алгебраическая развёртка, соответствующая геометрической, — это последовательность $\{r_{n_i}\}$, $n_i \in \{1, 2, 3\}$, $n_i \neq n_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$.

Алгебраическую развёртку можно рассматривать как код траектории, которая используется в работе [4].

Определение 4. Геометрический C -веер — это такая максимальная подпоследовательность подряд идущих треугольников геометрической развёртки, что вершина C у всех треугольников общая. Назовём C центром веера.

Определение 5. Алгебраический C -веер — это максимальная подпоследовательность подряд идущих символов алгебраической развёртки вида $\{r_{n_i}\}$, где $n_i \in \{2, 3\}$, $n_i \neq n_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$.

Алгебраический C -веер — это код геометрического C -веера.

Замечание 2. Аналогично можно ввести A - и B -вееры. Не умаляя общности, в дальнейшем считаем, что первое отражение есть r_1 . Кроме того, вееры будем нумеровать последовательными натуральными числами, начиная с 1.

Пример 1. Рассмотрим развёртку 12-звенной траектории (рис. 1, 2) $r_1 r_2 r_3 r_2 r_1 r_3 r_2 r_1 r_3 r_1 r_2 r_3$. Здесь присутствуют C -вееры: $\{r_2 r_3 r_2\}$, $\{r_3 r_2\}$, $\{r_3\}$, $\{r_2 r_3\}$.

Введём понятие знака алгебраического C -веера, $\text{sign } C$, в развёртке $\{r_{n_i}\}$, $i \in \mathbb{N}$. Припишем символу r_{n_i} какой-либо знак, «+» или «-», что для дальнейшего неважно, например, «+». Далее, знаки, приписываемые символам $r_{n_2}, r_{n_3}, \dots, r_{n_k}, \dots$ будем чередовать. Если в C -веере есть хотя бы один символ $r_{n_i} = r_2$, то $\text{sign } C = \text{sign } r_{n_i}$, если это не так, то обязательно есть единственный символ $r_{n_j} = r_3$, из которого состоит веер, и тогда $\text{sign } C = -\text{sign } r_{n_j}$. Отметим, что внутри одного веера знаки всех $r_{n_i} = r_2$ одинаковые.

Для пояснения смысла проделанной процедуры определения знака C -веера дадим геометрическую интерпретацию знака C -веера. При отражении относительно CB или CA высота CH , опущенная из вершины C на сторону AB , поворачивается, по или против часовой стрелки.

Будем считать, что при получении C -веера (при соответствующих отражениях) высота CH поворачивается в одном направлении. При этом угол поворота может оказаться больше, чем π . Знак этого направления можно ввести таким образом, что он будет совпадать со знаком C -веера, введённым выше формально. Покажем это.

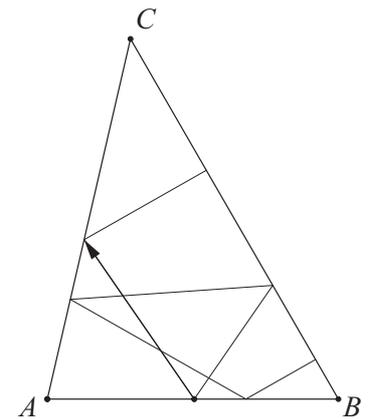


Рис. 1. 12-звенная траектория
Fig. 1. 12-linked trajectory

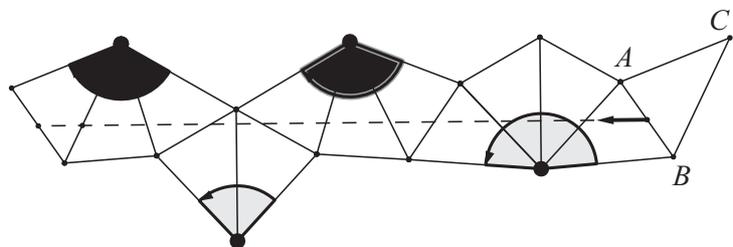


Рис. 2. Развёртка 12-звенной траектории. Разной заливкой выделены повороты в разном направлении
Fig. 2. The fan unfolding of a 12-linked trajectory. Turns in different directions are marked by different fillings



Рассмотрим некоторую геометрическую развёртку $\{\Delta_i\}$, где $\Delta_i = \Delta A_i B_i C_i$. Припишем треугольникам знаки согласно направлению поворота высоты $C_i H_i$, опущенной из C_i на $A_i B_i$ при отражении Δ_i относительно стороны $C_i A_i$. Противоположному направлению такого поворота припишем противоположный знак. Покажем, что эти знаки будут чередоваться.

Лемма 1. Пусть ΔABC имеет некоторый знак, например $+$ ($-$), тогда треугольники, полученные из ΔABC его отражением относительно AB , AC , BC , имеют противоположный знак, $+$ ($-$).

Доказательство. Рассмотрим отражение r_2 (относительно A). При таком отражении получим $\Delta AB'C$ и высоту CH' (образы ΔABC и CH). Если теперь отразить $\Delta AB'C$ относительно AC (обратное отражение), то высота CH' совершит поворот в направлении, противоположном направлению поворота высоты CH при первом отражении. Тогда, естественно, повороту CH' приписать знак « $-$ » (поворот CH имеет знак « $+$ »). Припишем в этом случае знак « $-$ » также и $\Delta AB'C$ (ΔABC имеет знак « $+$ »).

Случаи отражений r_1 , r_3 рассматриваются аналогично. \square

Пусть в алгебраической развёртке C -веер содержит символ r_2 . Тогда, как описано выше, припишем такому вееру знак этого символа. Так как знаки символов в алгебраической развёртке по определению чередуются и знаки треугольников в геометрической развёртке также чередуются, то знак перед r_{n_1} можно выбрать так, чтобы знак перед i -м символом совпадал со знаком Δ_i . Теперь знак веера, с одной стороны, есть знак поворота высоты внутри веера, а с другой, это знак поворота высоты при отражении r_2 внутри веера, что, очевидно, одно и то же.

Определение 6. C -код алгебраической развёртки — это последовательность $\{s_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, $s_i \in \mathbb{Z}$, такая, что $|s_i| + 1$ — количество треугольников в i -м веере данной развёртки, а знак s_i — это знак i -го веера.

Аналогично можно ввести A - и B -коды.

Определение 7. Алгебраическая развёртка $\{r_{n_i}\}$, $n_i \in \{1, 2, 3\}$, называется *периодической*, если существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $r_{n_i+N} = r_{n_i}$ и $\text{sign}(r_{n_i+N}) = \text{sign}(r_{n_i})$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Наименьшее N , удовлетворяющее этому условию, называется периодом развёртки.

Замечание 3. Очевидно, если траектория периодична, то её алгебраическая развёртка также периодична. Заметим, что не любая последовательность $\{r_{n_i}\}$ является алгебраической развёрткой траектории. Это будет показано ниже с помощью понятия коридора.

Определение 8. C -код $\{s_i\}$ алгебраической развёртки называется *периодическим*, если существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $s_{i+k} = s_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Наименьшее k , удовлетворяющее этому условию, будем называть периодом кода.

Замечание 4. Поскольку k -периодический C -код определяется любым своим отрезком длины k , то в дальнейшем, говоря о C -коде, будем иметь в виду некоторый



такой отрезок. При этом выбор отрезка не существенен для дальнейших выводов. В связи с этим C -код — это последовательность $\{s_i\}$, $i = 1, \dots, k$. Заметим, что период кода и период траектории могут отличаться.

Пример 2. На рис. 2 представлена развёртка 12-звенной периодической траектории, чей код имеет вид: $-3 + 2 - 1 + 2$. При получении кодировки развёртки надо выбрать вершину, образы которой при отражении будут являться центрами вееров. Будем кодировать так, чтобы первое отражение происходило по стороне, лежащей напротив этой вершины (этого можно добиться за счёт бесконечности и периодичности развёртки). Кроме того, эту развёртку можно закодировать и другими способами, взяв в качестве центра веера вершину A или B , тем самым получая A - или B -кодирование. Например так: $+2 - 2 - 2 + 2$.

Замечание 5. Легко заметить, что если $\{s_i\}_1^k$ есть C -код n -периодической бильярдной траектории, то $n = \sum_{i=1}^{i=k} |s_i| + k$.

Пусть $\Delta(\alpha, \beta)$ — треугольник с углами α при вершине A и β при вершине B .

Замечание 6. Если треугольник задан, то код бильярдной траектории позволяет найти конкретное направление \vec{V}_0 и множество $\{P_0\}$ периодической траектории, которая соответствует этому коду. Для характеристики того, что A -, B -, C -коды соответствуют одной периодической развёртке, введём понятие их эквивалентности. Для краткости будем A -, B -, C -коды называть кодами.

Определение 9. Коды эквивалентны, если соответствующие алгебраические развёртки могут быть получены одна из другой сдвигом на некоторое число символов r_{n_i} .

Определение 10. Комбинаторный тип траектории — это класс эквивалентности всех кодов этой траектории.

Определение 11. Периодическая бильярдная траектория Γ в треугольнике $\Delta(\alpha, \beta)$ называется устойчивой, если существуют $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ такие, что для всех α' , β' таких, что $|\alpha - \alpha'| < \varepsilon_1$, $|\beta - \beta'| < \varepsilon_2$ в $\Delta(\alpha', \beta')$, существует периодическая траектория, имеющая комбинаторный тип траектории Γ .

Сформулируем необходимые и достаточные условия существования n -периодической траектории данного комбинаторного типа, представленного C -кодом. Пусть $\Delta(\alpha, \beta) = \Delta ABC$ — исходный, $\Delta A'B'C'$ — полученный из ΔABC в результате n отражений. Назовём $\Delta A'B'C'$ параллельным ΔABC , если $\Delta A'B'C'$ является результатом параллельного сдвига ΔABC . Из метода развёртки Шварца легко получить необходимые и достаточные условия существования периодических бильярдных траекторий:

- 1) $\Delta A'B'C'$ параллелен ΔABC ;
- 2) существует непустой коридор, т. е. часть плоскости, ограниченная двумя прямыми, параллельными прямым BB' и AA' , принадлежащая геометрической развёртке.

При изменении параметров α , β треугольника, но при сохранении комбинаторного типа траектории, условия 1 и 2 могут нарушаться.



На рис. 3 приведён пример 6-звенной 6-периодической устойчивой траектории в остроугольном треугольнике: при малом изменении углов треугольника (рис. 4) условие 1 и 2 существования периодической траектории не нарушаются. C -код этой траектории имеет вид $+2 - 2$.

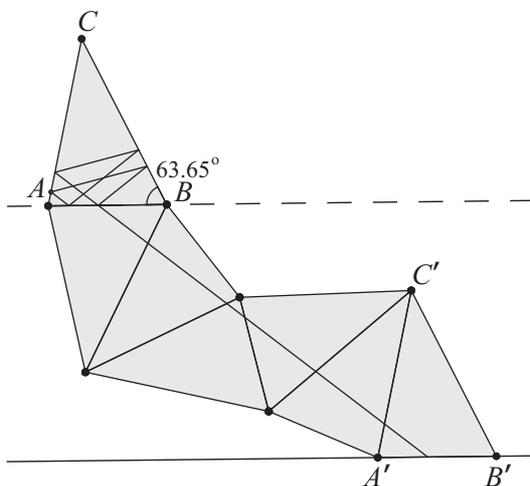


Рис. 3. Исходный треугольник, $\alpha = 78.12^\circ$,
 $\beta = 63.65^\circ$
Fig. 3. Original triangle, $\alpha = 78.12^\circ$, $\beta =$
 $= 63.65^\circ$

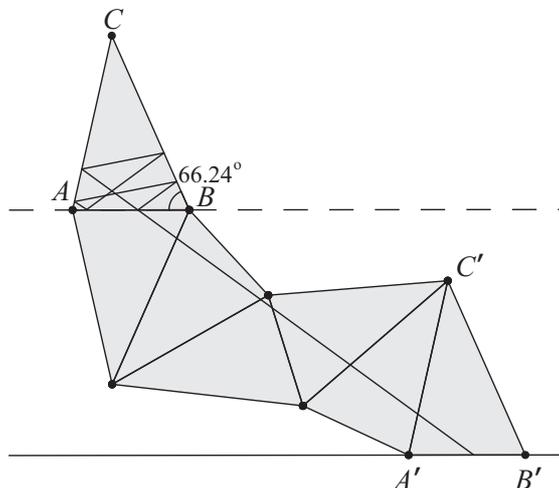


Рис. 4. Возмущённый треугольник, $\alpha =$
 $= 73.19^\circ$, $\beta = 66.24^\circ$
Fig. 4. The perturbed triangle, $\alpha = 73.19^\circ$,
 $\beta = 66.24^\circ$

На рис. 5 приведён пример 3-звенной (геометрически) 6-периодической неустойчивой траектории в прямоугольном треугольнике: при малом изменении углов треугольника (рис. 6) условие 1(см. выше) существования периодической траектории нарушается. C -код этой траектории имеет вид $+3 - 1$.

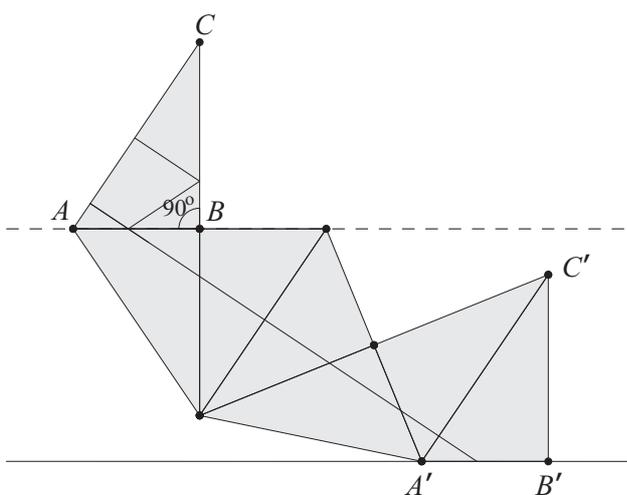


Рис. 5. Исходный прямоугольный треугольник,
 $\alpha = 56.08^\circ$, $\beta = 90.00^\circ$
Fig. 5. Original rectangle triangle, $\alpha = 56.08^\circ$,
 $\beta = 90.00^\circ$

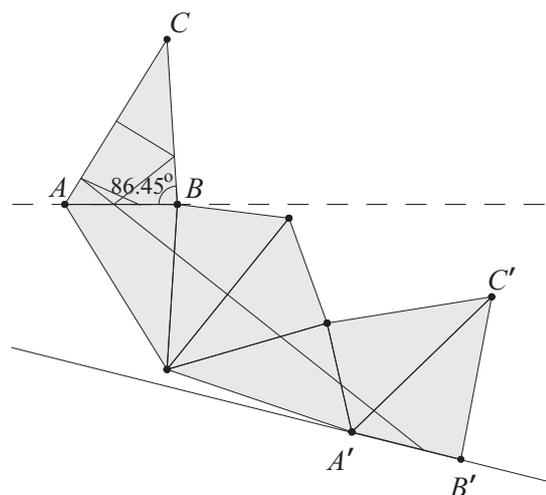


Рис. 6. Возмущённый треугольник, $\alpha =$
 $= 58.45^\circ$, $\beta = 86.45^\circ$
Fig. 6. The perturbed triangle, $\alpha = 58.45^\circ$
 $\beta = 86.45^\circ$



Для изучения устойчивости траектории введём следующие определения.

Определение 12. Назовём код *устойчивым*, если произвольный треугольник переходит в параллельный себе согласно отражениям определяемым кодом.

Замечание 7. Заметим, что устойчивость кода влечёт за собой параллельность финального треугольника исходному, что в свою очередь влечёт устойчивость периодической траектории, поскольку малое шевеление треугольника сохранит непустоту коридора.

Сформулируем критерий устойчивости кода «на языке s_i ».

Пусть $s = \{s_i\}_{i=1}^k$ есть C -код n -периодической траектории с k веерами. Рассмотрим геометрическую развёртку $\{\Delta A_i B_i C_i\}_0^n$. Выше говорилось, что высота, опущенная из центра веера, в данном случае $C_i H_i$, поворачивается в веере в одном направлении. Нетрудно заметить, что углы её поворота чередуются и равны $\widehat{ca} = 2 \cdot (\frac{\pi}{2} - \alpha)$ и $\widehat{cb} = 2 \cdot (\frac{\pi}{2} - \beta)$, т. е. это удвоенные углы, которые составляет высота H , опущенная из вершины C , со сторонами CA и CB соответственно. Не умаляя общности, будем считать, что первый поворот в первом веере происходит на угол \widehat{ca} . Для вычисления суммарного поворота вектора \vec{H} введём следующие величины. Вместо вектора \vec{H} будем рассматривать коллинеарный ему вектор $C_1 \vec{C}_0$.

1. $s' = \{s'_i\}_{i=1}^k$, $s'_i = \text{sign}(s_i) \cdot [\frac{|s_i|}{2}]$, где $[x]$ — целая часть x , т. е. s'_i — количество поворотов вектора $C_1 \vec{C}_0$ на угол $\widehat{ca} + \widehat{cb}$ в i -м веере, снабжённое знаком, указывающим направление поворота.
2. $s'' = \{s''_i\}_{i=1}^k$, $s''_i = \text{sign}(s_i) \cdot (|s_i| \bmod 2)$, т. е. $s''_i = +0(-0)$, если количество поворотов в веере i чётно (т. е. поворот вектора $C_1 \vec{C}_0$ представим в виде $t \cdot (\widehat{ca} + \widehat{cb})$, $t \in \mathbb{N}$), и $s''_i = +1(-1)$, если количество поворотов в веере i нечётно (т. е. поворот вектора $C_1 \vec{C}_0$ представим в виде $t \cdot (\widehat{ca} + \widehat{cb}) + \gamma$, $t \in \mathbb{N}$). Поворот на угол γ будем называть «дополнительным». Знак s''_i показывает направление «дополнительного» поворота.
3. «Дополнительный» угол есть угол \widehat{ca} или \widehat{cb} . Для определения угла нужно знать начальный угол поворота вектора $C_1 \vec{C}_0$ в данном веере (так как число поворотов нечётно, то можно считать, что первый поворот и есть «дополнительный»). Если в предыдущем, $(i - 1)$ -м веере, был поворот на угол \widehat{cb} , тогда в этом веере первый поворот — поворот на угол \widehat{ca} при условии, что в $(i - 1)$ -м веере число поворотов чётное. Угол также изменится, если в текущем веере поворот высоты происходит в противоположную (относительно поворотов в $(i - 1)$ -м веере) сторону. Если выполнены оба этих условия, то угол дважды изменится (т. е. в результате не изменится). Формально эти условия можно записать в виде

$$w_i = \begin{cases} w_{i-1} + (|s_{i-1} + 1| \bmod 2) + \max(-\text{sign}(s_i \cdot s_{i-1}), 0), & i > 0, \\ 1, & i = 0, \end{cases}$$

w_i — сумма двух величин: количества изменений знаков в наборе s_1, \dots, s_i и количества чётных чисел в наборе s_1, \dots, s_{i-1} .

4. $m_i = w_i \bmod 2$, т. е. $m_i = 1$, если «дополнительный» поворот в i -м веере (см. п.3) есть поворот на угол \widehat{ca} , $m_i = 1$.
5. $l_i = (w_i + 1) \bmod 2$, то есть $l_i = 1$, если «дополнительный» поворот в i веере (см. п.3) есть поворот на угол \widehat{cb} .
6. $m, l \in \mathbb{R}^k$ — векторы с компонентами m_i и l_i соответственно, $i = 1, \dots, k$.

Теорема 1. Код $s = \{s_i\}_{i=1}^k$ является устойчивым тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) $\sum s'_i + m \cdot s'' = 0$ (суммарный поворот $C_1\vec{C}_0$ на угол \widehat{ca} равен нулю);
- 2) $\sum s'_i + l \cdot s'' = 0$ (суммарный поворот $C_1\vec{C}_0$ на угол \widehat{cb} равен нулю);
- 3) $k \bmod 2 = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть s — устойчивый код. Тогда согласно определению любой треугольник переводится в параллельный себе в соответствии с отражениями, заданными кодом. Поскольку Δ_n получен из Δ_0 параллельным сдвигом, то вектор $C_1\vec{C}_0$ переходит в сонаправленный (рис. 7). Следовательно, в силу устойчивости кода суммарный поворот вектора $C_1\vec{C}_0$ на угол \widehat{ca} должен быть равен 0 и суммарный поворот вектора $C_1\vec{C}_0$ на угол \widehat{cb} также должен быть равен 0, что проверяется условиями 1 – 2. Если s_i чётное, то количество поворотов на угол \widehat{ca} равно количеству поворотов на угол \widehat{cb} в веере i или эти величины отличаются на 1 (см. величины m_i и l_i в 4, 5). Для обоснования 3) следует заметить, что на веерах с нечётными номерами конец вектора $C_1\vec{C}_0$ лежит вне веера.

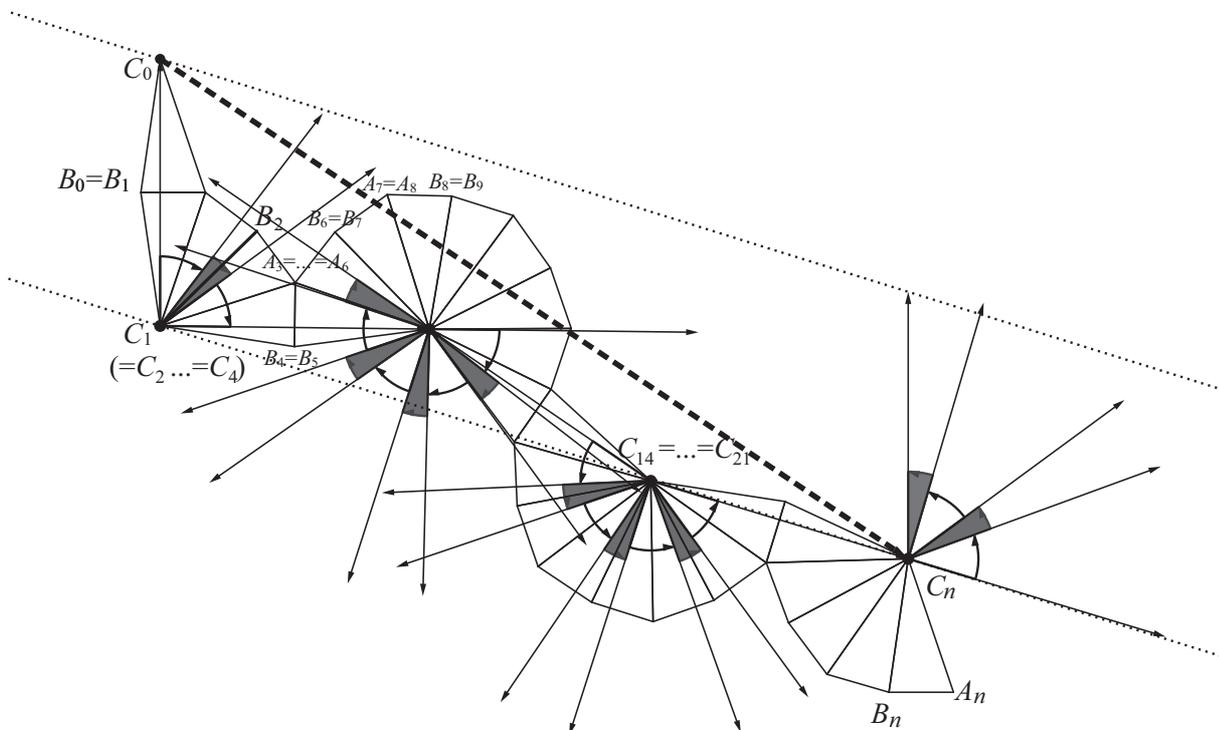


Рис. 7. Повороты вектора $C_1\vec{C}_0$ на углы \widehat{ca} (светлые углы) и на углы \widehat{cb} (тёмные углы). $C_0\vec{C}_n$ — направляющий вектор траектории(пунктир)

Fig. 7. Rotations of the vector $C_1\vec{C}_0$ to the angles \widehat{ca} (light angles) and to the angles \widehat{cb} (dark angles). $C_0\vec{C}_n$ is the direction vector of the trajectory (dotted line)



Достаточность. Пусть дан некоторый код s , обладающий свойствами 1)–3). Тогда аналогично доказанному выше Δ_n получен из Δ_0 параллельным сдвигом, а так как это верно для любых углов \widehat{ca} и \widehat{cb} , то код устойчивый. \square

2. ПАТТЕРНЫ

Введём средство классификации устойчивых кодов. Пусть $p = \{p_i\}_{i=1}^k$ есть последовательность целых чисел. Введём следующие величины, аналогичные введённым ранее (см. парагр. 1):

- 1) $p' = \{p'_i\}_{i=1}^k$, $p'_i = \text{sign}(p_i) \cdot \left\lfloor \frac{|p_i|}{2} \right\rfloor$, где $[x]$ — целая часть x ;
- 2) $p'' = \{p''_i\}_{i=1}^k$, $p''_i = \text{sign}(p_i) \cdot (|p_i| \bmod 2)$;
- 3) $w_i = \begin{cases} w_{i-1} + (|p_{i-1}| + 1 \bmod 2) + \max(-\text{sign}(p_i \cdot p_{i-1}), 0), & \text{если } i > 0, \\ 1 & i = 0; \end{cases}$
- 4) $m_i = w_i \bmod 2$;
- 5) $l_i = (w_i + 1) \bmod 2$;
- 6) $m, l \in \mathbb{R}^k$ — векторы с компонентами m_i и l_i соответственно, $i = 1, \dots, k$.

Определение 13. Паттерн устойчивой периодической бильярдной траектории — это упорядоченный набор $\{p_i\}_{i=1}^k$, где

- 1) $p_i \in \{+0, -0, +1, -1\}$;
- 2) $\sum_{i=1}^k m_i \cdot p'_i = \sum_{i=1}^k l_i \cdot p''_i$;
- 3) k — чётное натуральное число.

Введём две операции над элементом p_i паттерна:

- 1) $p_i \rightarrow p_i + 2 \cdot v$, если $p_i = +0$ или $p_i = +1$;
- 2) $p_i \rightarrow p_i - 2 \cdot v$, если $p_i = -0$ или $p_i = -1$, где $v \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. Пусть $\{p_i\}_{i=1}^k$ — паттерн. Если после применения конечного числа операций 1 и 2 получится последовательность $p^* = \{p^*_i\}_{i=1}^k$ такая, что $\sum_{i=1}^k p^*_i = 0$ и для всех i $p^*_i \neq 0$, то p^* — устойчивый код, который будем называть кодом, порождённым паттерном p .

Доказательство. Полученная последовательность p^* удовлетворяет теореме 1 в силу определения паттерна. \square

Замечание 8. Очевидно, что для любого устойчивого кода, существует паттерн, его порождающий.

С помощью операций, введённых выше, можно перебрать все устойчивые коды, которые порождены фиксированным паттерном. Также отметим, что количество операций, необходимых для получения всех таких кодов, пропорционально количеству кодов.

Пример 3. Несложно показать перебором, что существует один паттерн длины 2, а именно $-0 + 0$, следовательно, для получения устойчивого кода бильярдной траектории можно взять любое чётное число d и получить код $-d, d$.

Паттерны — один из способов классификации кодов периодических траекторий. Можно ввести также другие дополнительные средства для разбиения кодов на классы, обладающие определёнными свойствами.



3. КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТОЙЧИВОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ

Представим способ построения периодической n -звенной траектории в треугольнике $\triangle ABC = \triangle(\alpha, \beta)$ по её C -коду $\{s_i\}_{i=1}^k$, порождённому паттерном p . По коду можно построить ломаную, звенья которой есть отрезки, соединяющие центры вееров (рис. 8). Для этой ломаной известны углы между соседними звеньями. Для нахождения \vec{V}_0 , т. е. начального угла, образованного этим вектором со стороной AB , введём ортогональную систему координат, начало которой совпадает с основанием высоты H , ось OX сонаправлена с \vec{HB} , а ось OY с \vec{HC} . Пусть точка C имеет координаты $(0, 0.5)$. Обозначим через $\tilde{C}_i = (x_i, y_i)$ центр i -го веера, $i = 0, \dots, k$. При $i = 0$ под точкой C_0 понимаем точку C исходного треугольника (см. рис. 8 и 9).

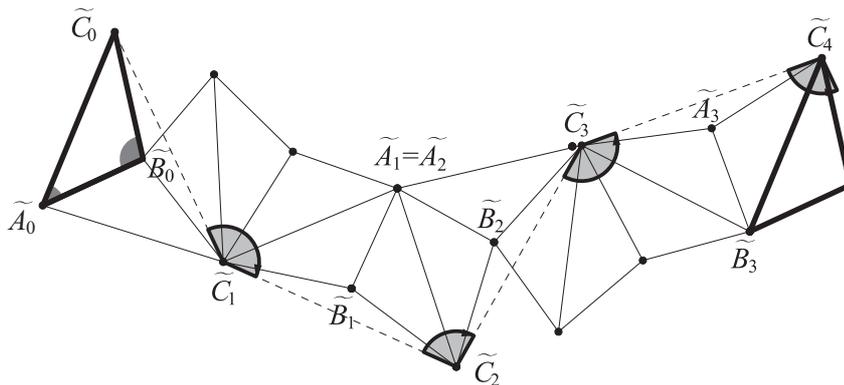


Рис. 8. Веерная развёртка для кода $\{+4, +1, -4, -1\}$ и треугольника $\triangle(42^\circ, 102^\circ)$
 Fig. 8. A fan unfolding for the code $\{+4, +1, -4, -1\}$ and the triangle $\triangle(42^\circ, 102^\circ)$

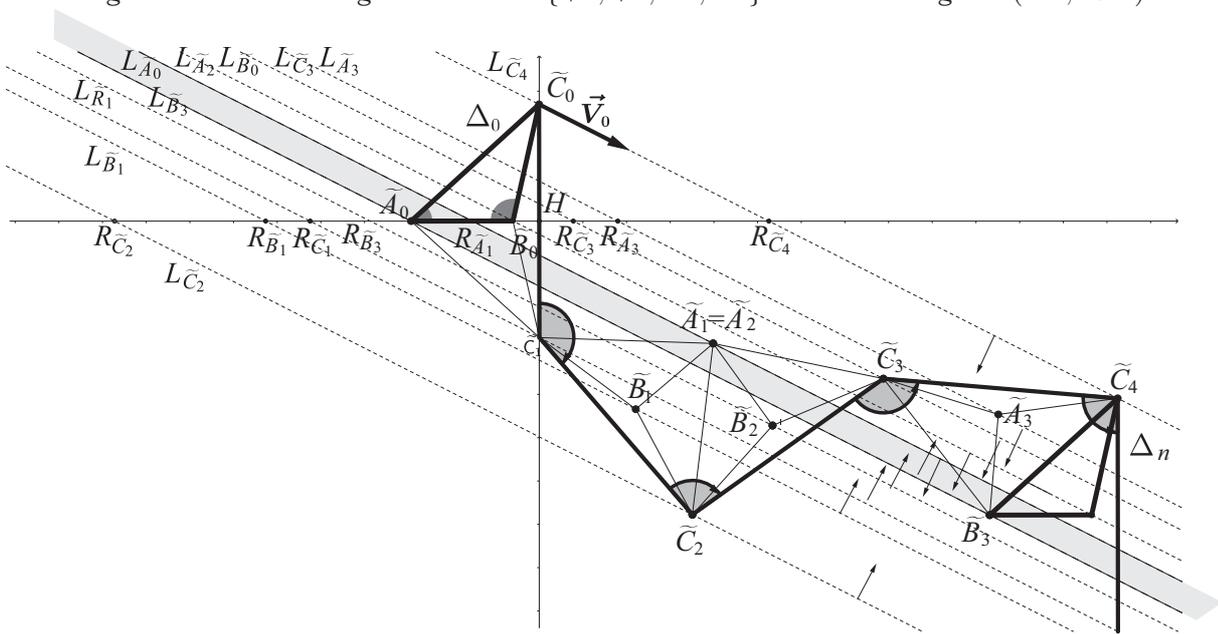


Рис. 9. Направляющий вектор \vec{V}_0 траектории и допустимый коридор для кода $\{+4, +1, -4, -1\}$ для треугольника $\triangle(42^\circ, 102^\circ)$. Жирными линиями выделена ломаная, соединяющая центры вееров, а также Δ_0 и Δ_n . Стрелками указаны полуплоскости, содержащие коридор

Fig. 9. The direction vector \vec{V}_0 of the trajectory and the admissible corridor for the code $\{+4, +1, -4, -1\}$ for the triangle $\triangle(42^\circ, 102^\circ)$. Bold lines indicate a broken line connecting the centers of fans, as well as Δ_0 and Δ_n . The arrows indicate the half-planes containing the corridor



Составим уравнения, описывающие зависимость положения центра вееров от кода и треугольника:

$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (0, 0.5), \\ (x_1, y_1) = (0, -0.5), \\ (x_i - x_{i+1}, y_i - y_{i+1}) = (x_{i-1} - x_i, y_{i-1} - y_i) \cdot W_i, \end{cases}$$

где W_i — матрица поворота:

$$W_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix},$$

$$\alpha_i = \begin{cases} s_i \cdot (\pi - \alpha - \beta), & p_i \in \{+0, -0\}, \\ (s_i - 1) \cdot (\pi - \alpha - \beta) + s'_i \cdot (m_i \cdot (\frac{\pi}{2} - \alpha) + l_i \cdot (\frac{\pi}{2} - \beta)), & p_i \in \{+1, -1\}. \end{cases}$$

В результате получаем однородную систему разностных уравнений второго порядка:

$$\tilde{C}_{i+1} + (W_i - E) \cdot \tilde{C}_i - W_i \cdot \tilde{C}_{i-1} = 0, \quad (1)$$

где E — единичная матрица. Направляющий вектор \vec{V}_0 сонаправлен с вектором $\tilde{C}_0 \tilde{C}_n$. Таким образом, для нахождения направления траектории достаточно найти \tilde{C}_n из (1). Теперь найдём начальную точку P_0 при фиксированном векторе \vec{V}_0 и начальный отрезок $LR \subset AB$ такой, что любая точка на этом отрезке может быть использована как P_0 для \vec{V}_0 . Отрезок LR является пересечением допустимого коридора с отрезком AB , который расположен на оси OX . Для нахождения LR будем строить коридор и пересекать его с осью OX . Из определения допустимого коридора следует, что это подмножество прямых t , направляющим вектором которых является вектор \vec{V}_0 . Определим условия, согласно которым некоторая прямая t принадлежит допустимому коридору.

Первое условие заключается в том, чтобы запретить «слишком» большие повороты в веере, для чего необходимо выполнение неравенства $\alpha_i - (\pi - \alpha - \beta) < \pi$.

Сформулируем *второе* условие. Пусть $\tilde{A}_i \tilde{B}_i$ — образ стороны AB в геометрической развёртке, принадлежащий одновременно i -му и $(i + 1)$ -му веерам (см. рис. 9). Для того чтобы выразить координаты точек $\{\tilde{A}_i\}_{i=1}^k$ и $\{\tilde{B}_i\}_{i=1}^k$ через $\{\tilde{C}_i\}_{i=0}^k$ и $\{p_i\}_{i=1}^k$ необходимо найти, по какую сторону от прямой $\tilde{C}_i \tilde{C}_{i+1}$ лежит $\tilde{A}_i \tilde{B}_i$, а также найти координаты концов этого отрезка, используя серединный перпендикуляр к $\tilde{C}_i \tilde{C}_{i+1}$ и углы α, β (см. рис. 9). Проведём прямые с направляющим вектором \vec{V}_0 через точки \tilde{A}_i и \tilde{B}_i , точки пересечения этих прямых с осью OX обозначим $R_{\tilde{A}_i}$ и $R_{\tilde{B}_i}$ соответственно. Введём величину $I_{\tilde{A}_i, \tilde{B}_i}$. Пусть $I_{\tilde{A}_i, \tilde{B}_i} = 1$, если абсцисса точки $R_{\tilde{A}_i}$ меньше абсциссы точки $R_{\tilde{B}_i}$, и $I_{\tilde{A}_i, \tilde{B}_i} = 0$ в противном случае. Второе условие, которому должна удовлетворять прямая t , заключается в том, что t должна пересекать все отрезки $\tilde{A}_i \tilde{B}_i$. Ниже это условие будет формализовано.

Сформулируем *третье* условие. Проведём прямые $L_{\tilde{C}_i}$ с направляющим вектором \vec{V}_0 через точки \tilde{C}_i , точки пересечения этих прямых с осью OX обозначим $R_{\tilde{C}_i}$. Введём величину $I_{\tilde{C}_i}$, которая будет определять, по какую сторону от прямой $L_{\tilde{C}_i}$



находится коридор или прямая t , принадлежащая коридору. Заметим, что это имеет смысл только в том случае, если $\alpha_i > \pi$. Обозначим через $L'_{\tilde{C}_i}$ прямую с направляющим вектором \vec{V}_0 , проходящую через середину отрезка $(\tilde{C}_{i-1}\tilde{C}_{i+1})$. Пусть $I_{\tilde{C}_i} = 1$, если абсцисса точки пересечения прямой $L'_{\tilde{C}_i}$ с осью OX меньше абсциссы точки $R_{\tilde{C}_i}$, и $I_{\tilde{C}_i} = 0$ в противном случае. Третье условие, которому должна удовлетворять прямая t , заключается в том, что прямые t и $L'_{\tilde{C}_i}$ лежат по разные стороны от прямой $L_{\tilde{C}_i}$.

Запишем указанные выше условия для отрезка LR формально. Для краткости под точками будем понимать абсциссы этих точек. Несложно видеть, что

$$L = \max \begin{cases} \max\{R_{\tilde{A}_i} | I_{\tilde{A}_i}, \tilde{B}_i = 1\}, \\ \max\{R_{\tilde{B}_i} | I_{\tilde{A}_i}, \tilde{B}_i = 0\}, \\ \max\{R_{\tilde{C}_i} | I_{\tilde{C}_i} = 1, \alpha_i > \pi\}, \\ A, \end{cases} \quad R = \min \begin{cases} \min\{R_{\tilde{A}_i} | I_{\tilde{A}_i}, \tilde{B}_i = 0\}, \\ \min\{R_{\tilde{B}_i} | I_{\tilde{A}_i}, \tilde{B}_i = 1\}, \\ \min\{R_{\tilde{C}_i} | I_{\tilde{C}_i} = 0, \alpha_i > \pi\}, \\ B. \end{cases}$$

Условие непустоты коридора запишется в виде

$$L < R. \tag{2}$$

Таким образом, совместность систем (1), (2) является необходимым и достаточным условием существования устойчивой периодической траектории в $\Delta(\alpha, \beta)$ с кодом, порождённым паттерном p . Сформулируем это условие в виде теоремы.

Теорема 3. *В треугольнике $\Delta(\alpha, \beta)$ существует периодическая устойчивая бильярдная траектория тогда и только тогда, когда найдётся паттерн p , для которого существует порождаемый им код, удовлетворяющий условию (2).*

Доказательство. Очевидно, по построению соответствующих величин. □

4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Вспомним пример из предыдущего параграфа, а именно паттерн $-0 + 0$. Тогда при любом чётном d получаем код устойчивой $(2 + 2 \cdot d)$ -периодической бильярдной траектории. Вычислим начальный угол, который составляет начальный вектор со стороной AB . Проведём указанные выше операции и найдём, что для того чтобы построить n -звенную периодическую устойчивую траекторию, чей код имеет длину 2, начальный угол должен быть равен $(\pi - \alpha - \beta) \cdot (n - 2)/4$. В [8] это периодические траектории в треугольниках с малым углом. Применяя описанный выше метод, можно найти коридор. При этом интересно, что для нахождения L и R необходимо отразить вершины A и B относительно основания высоты H .

Рассмотрим код 12-звенной траектории $-2 + 2 + 2 - 2$. Можно показать, что начальный вектор перпендикулярен некоторому образу стороны B . Кроме того, для любого кода вида $(x \cdot (-2), x \cdot (+2), x \cdot (+2), x \cdot (-2))$ для всех $x \in \mathbb{Z}$ этот факт остаётся верным.

Приведём здесь пример интересного паттерна, который реализуется и в тупоугольных треугольниках: $-0 - 1 + 0 + 1$ (рис. 10).

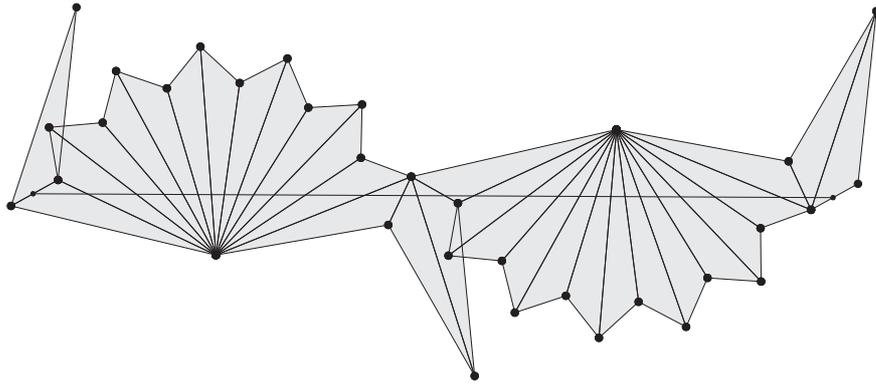


Рис. 10. Пример реализации паттерна $+0 + 1 - 0 - 1$ кодом $+12 + 1 - 12 - 1$

Fig. 10. An example of implementing the pattern $+0 + 1 - 0 - 1$ with the code $+12 + 1 - 12 - 1$

5. УСЛОВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Введём понятие условной устойчивости периодических бильярдных траекторий.

Определение 14. Условно устойчивой периодической бильярдной траекторией Γ в треугольнике с углами α и β называется периодическая бильярдная траектория такая, что существует отрезок $[D, F] \in \mathbb{R}^2$ такой, что точка $(\alpha, \beta) \in [D, F]$, и для любой точки $(\alpha', \beta') \in [D, F]$ в треугольнике с углами α', β' существует периодическая траектория, имеющая комбинаторный тип траектории Γ .

Теорема 4. Все периодические траектории условно устойчивы.

Доказательство. Рассмотрим код периодической траектории $\{s\}$. Разобьём доказательство на 2 пункта (параллельность треугольника и коридор).

Пусть $\sum s'_i + m \cdot s'' = q_1$, $\sum s'_i + l \cdot s'' = q_2$. В силу периодичности траектории существует $z \in \mathbb{Z}$ такое, что $q_1 \cdot \widehat{ca} + q_2 \cdot \widehat{cb} = 2 \cdot z \cdot \pi$. Выражая \widehat{ca} и \widehat{cb} через α и β , получаем уравнение прямой в плоскости $\{(\alpha, \beta)\}$.

Так как траектория для некоторого треугольника периодична, то поскольку ширина коридора непрерывно зависит от (α, β) , найдётся отрезок $[D, F]$, принадлежащий полученной выше прямой. \square

Замечание 9. Несложно показать, что из условия $q_1 \cdot \widehat{ca} + q_2 \cdot \widehat{cb} = 2 \cdot z \cdot \pi$ следует рациональная зависимость углов \widehat{ca} , \widehat{cb} , а значит, и углов треугольника. Это наблюдение позволяет дать короткое доказательство частного случая (для треугольника) следующей теоремы из работы [4]: любая периодическая траектория в n -угольнике, углы которого рационально независимы, устойчива.

Теорема показывает, что в отличие от условной устойчивости решений дифференциальных уравнений для бильярдных траекторий нет неустойчивости без условной устойчивости.

Приведём примеры бильярдных траекторий, не являющихся устойчивыми, но являющихся условно устойчивыми. Рассмотрим C -код $+3 - 3$. Составив уравнение прямой из доказательства предыдущей теоремы, получаем, что $\alpha = \beta$. Таким образом,



только в равнобедренных треугольниках может быть такая траектория. В качестве другого примера возьмём код $+3 - 5$. Этот код возможен только для прямоугольных треугольников.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введён новый математический аппарат, который позволяет существенно облегчить поиск устойчивых периодических траекторий в треугольниках и тем самым приблизиться к решению задачи нахождения всех периодических траекторий в треугольнике, поставленной в работе [4]. Предложена веерная кодировка, упрощающая исследование устойчивости траекторий (по сравнению с кодировкой в [4]), особенно для больших периодов. При этом геометрия траектории представляется более наглядно. Кодирование траекторий с помощью вееров позволяет объединять коды в классы, что обеспечивается понятием паттерна. Показано, что с помощью паттерна можно построить систему уравнений и неравенств для нахождения коридора. Сформулировано понятие условной устойчивости, позволяющее расширить класс устойчивых траекторий. При исследовании возникли следующие задачи:

- разработать алгоритм решения построенной системы неравенств и уравнений, имеющий полиномиальную сложность;
- определить количество паттернов длины k .

Библиографический список

1. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М. : Наука, 1980. 384 с.
2. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. М. : Физматгиз, 1962. 263 с.
3. Рубинштейн А. И., Теляковский Д. С. Замечания о задаче Фаньяно // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 1. С. 382–387.
4. Воробец Я. Б., Гальперин Г. А., Степин А. М. Периодические бильярдные траектории в многоугольниках : механизмы рождения // УМН. 1992. Т. 47, № 3. С. 9–74.
5. Schwartz R. E. Obtuse Triangular Billiards II : One Hundred Degrees Worth of Periodic Trajectories // Experimental Math. 2008. Vol. 18, iss. 2. P. 137–171. DOI: 10.1080/10586458.2009.10128891.
6. Козлов В. В. Задача об устойчивости двухзвенных траекторий многомерного бильярда Биркгофа // Тр. МИАН. 2011. Т. 273. С. 212–230.
7. Маркеев А. П. Об устойчивости двухзвенной траектории параболоидного бильярда Биркгофа // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 1. С. 75–90. DOI: 10.20537/nd1601005.
8. Кравцов В. М., Калакова Г. К. Геометрия бильярдных траекторий в многоугольниках. СПб. : ЕВРАЗИЯ, 2013. 304 с.

Образец для цитирования:

Кириллов А. Н., Алькин Р. В. Устойчивость периодических бильярдных траекторий в треугольнике // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 25–39. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-25-39.



Stability of Periodic Billiard Trajectories in Triangle

A. N. Kirillov, R. V. Alkin

Aleksandr N. Kirillov, <https://orcid.org/0000-0002-3356-1846>, Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research of the Russian Academy of Science, 11, Pushkinskaya Str., Petrozavodsk, Republic of Karelia, Russia, 185910; Petrozavodsk State University, 33, Lenin Str., Petrozavodsk, Republic of Karelia, Russia, 185910, kirillov@krc.karelia.ru

Ruslan V. Alkin, <https://orcid.org/0000-0002-8257-4520>, Petrozavodsk State University, 33, Lenina Str., Petrozavodsk, Republic of Karelia, Russia, 185910, ruslan5.ru@yandex.ru

The problem of stability of periodic billiard trajectories in triangles is considered. The notion of stability means the preservation of a period and qualitative structure of a trajectory (its combinatorial type) for sufficiently small variations of a triangle. The geometric, algebraic and fan unfoldings are introduced for stable trajectories description. The new method of fan coding, using these unfoldings, is proposed. This method permits to simplify the stability analysis. The notion of code equivalence and combinatorial type of a trajectory is proposed for trajectories classification. The rigorous definition of stable periodic trajectory in a triangle is formulated. The necessary and sufficient conditions of a fan code stability are obtained (Theorem 1). In order to simplify the stable periodic trajectories classification the notion of pattern, is introduced which permits us to generate the stable codes (Theorem 2). The method of stable periodic trajectories construction is proposed (Theorem 3). The introduced notions are illustrated by several examples, particularly for trajectories in obtuse triangles. The possibility of application of the developed instrument to obtuse triangles offers opportunities of its using to solve the problem of the existence of periodic billiard trajectories in obtuse triangles. A new notion of periodic billiard trajectory conditional stability, relating to some special variations, is introduced.

Key words: mathematical billiard, coding of trajectories, stability, pattern, fan code.

References

1. Cornfeld I. P., Fomin S. V., Sinai Y. G. *Ergodic Theory*. New York, Springer-Verlag, 1982. 491 p. DOI: 10.1007/978-1-4615-6927-5. (Russ. ed.: Moscow, Nauka. 384 p.)
2. Rademacher H., Toeplitz O. *Von Zahlen und Figuren*. Berlin, Springer-Verlag, 1933. 173 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatgiz, 1962. 263 p.)
3. Rubinstein A. I., Telyakovskii D. S. Zamechania o zadache Faniano *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 4, pt. 1, pp. 382–387 (in Russian).
4. Vorobets Ya. B., Gal'perin G. A., Stepin A. M. Periodic billiard trajectories in polygons : generating mechanisms *Russian Math. Surveys*, 1992, vol. 47, no. 3, pp. 5–80. DOI: 10.1070/RM1992v047n03ABEH000893.
5. Schwartz R. E. Obtuse Triangular Billiards II: One Hundred Degrees Worth of Periodic Trajectories *Experimental Math.*, 2009, vol. 18, iss. 2, pp. 137–171. DOI: 10.1080/10586458.2009.10128891.
6. Kozlov V. V. Problem of stability of two-link trajectories in a multidimensional Birkhoff billiard. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 273, pp. 196–213. DOI: 10.1134/S0081543811040092.
7. Markeev A. P. On the stability of the two-link trajectory of the parabolic Birkhoff billiards *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no 1, pp. 75–90. DOI: 10.20537/nd1601005.
8. Kravsov V. M., Kalakova G. K. *Geometrija billiardnih traektorij v mnogougolnikah* [Geometry of billiard trajectories in polygons]. Saint-Petersburg, EVRASIA, 2013. 304 p. (in Russian).

Cite this article as:

Kirillov A. N., Alkin R. V. Stability of Periodic Billiard Trajectories in Triangle. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 25–39 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-25-39.



Asymptotic Formulae for Weight Numbers of the Sturm – Liouville Boundary Problem on a Star-shaped Graph

M. A. Kuznetsova

Maria A. Kuznetsova, Saratov State University, <https://orcid.org/0000-0003-1083-0799>, 83, Astrakhanskaya Str., 410012, Saratov, Russia, mk680970@gmail.com

In this article the Sturm – Liouville boundary value problem on the graph Γ of a special structure is considered. The graph Γ has m edges, joined at one common vertex, and m vertices of degree 1. The boundary value problem is set by the Sturm – Liouville differential expression with real-valued potentials, the Dirichlet boundary conditions, and the standard matching conditions. This problem has a countable set of eigenvalues. We consider the so-called weight numbers, being the residues of the diagonal elements of the Weyl matrix in the eigenvalues. These elements are meromorphic functions with simple poles which can be only the eigenvalues. We note that the considered weight numbers generalize the weight numbers of Sturm – Liouville operators on a finite interval, equal to the reciprocals to the squared norms of eigenfunctions. These numbers together with the eigenvalues play a role of spectral data for unique reconstruction of operators. We obtain asymptotic formulae for the weight numbers using the contour integration, and in the case of the asymptotically close eigenvalues the formulae are got for the sums. The formulae can be used for the analysis of inverse spectral problems on the graphs.

Key words: Sturm – Liouville boundary problem, asymptotic formulae, weight numbers, star-shaped graph.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-40-48

INTRODUCTION

Consider the graph Γ which consists of m edges e_j , $m \geq 2$, $j = \overline{1, m}$, joined at a common vertex. Let the graph Γ be parametrized so that $x_j \in [0, \pi]$ where the parameter x_j corresponds to the edge e_j , the parameter $x_j = 0$ in the boundary vertex and $x_j = \pi$ in the common vertex, $j = \overline{1, m}$. We call Γ a star-shaped graph.

A function on the graph is a vector function

$$y = [y_j(x_j)]_{j=1}^m,$$

where the components y_j are functions on the edges e_j correspondingly, $y_j(x_j) \in W_2^2[0, \pi]$, $j = \overline{1, m}$.

We denote by g' differentiation of the function g with respect to the first argument. Consider the differential expression

$$ly := [-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j)]_{j=1}^m. \tag{1}$$

Then the Sturm – Liouville boundary value problem on the graph can be written as follows:

$$ly = \lambda y, \tag{2}$$

$$y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^m y_j'(\pi) = 0, \tag{4}$$

$$y_1(\pi) = y_2(\pi) = \dots = y_m(\pi), \tag{5}$$



where λ is the spectral parameter, the equalities (3) are Dirichlet conditions, and (4)–(5) are the standard matching conditions. In (1) the functions $q_j(x_j)$ are called potentials, $q_j(x_j) \in L_2[0, \pi]$, $q_j(x_j) \in \mathbb{R}$.

The differential operator L , given by the differential expression (1) and the conditions (3)–(5), is self-adjoint in the corresponding Hilbert space (see [1] for details).

Since the differential operators on the graphs have applications in physics, chemistry, nano-technology, they are studied actively (see [2, 3]). In the article we obtain asymptotic formulae for weight numbers of the problem (2)–(5) which generalize the weight numbers on a finite interval [4, Chapter 1]. Those asymptotic formulae can be applied for studying of inverse spectral problems for differential operators on graphs. Weight numbers together with eigenvalues have been used for reconstruction of the potentials of the Sturm – Liouville operators on graphs, e.g., in [5, 6].

The difficult case is when the eigenvalues are asymptotically close though not multiple. The asymptotic formulae are got by using the integration over the contours, containing the asymptotically close eigenvalues, in the plain of the spectral parameter. Thus, the asymptotic formulae are obtained for the sums of the weight numbers, as it has been done in [7] for the weight matrices for the matrix Sturm – Liouville operator.

1. PRELIMINARIES

In this section we introduce a characteristic function of the operator L , the zeros of which coincide with the eigenvalues. We also provide auxiliary results from [8, 9], related to the eigenvalues of L .

The conditions (4)–(5) can be written as follows:

$$V(y) := Hy'(\pi) + hy(\pi) = 0,$$

where H and h are $m \times m$ matrices :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

For each fixed $j = \overline{1, m}$ let $S_j(x, \lambda)$ and $C_j(x, \lambda)$ be the solutions of the Cauchy problems

$$\begin{aligned} -S_j''(x, \lambda) + q_j(x)S_j(x, \lambda) &= \lambda S_j(x, \lambda), & S_j(0, \lambda) &= S_j'(0, \lambda) - 1 = 0, \\ -C_j''(x, \lambda) + q_j(x)C_j(x, \lambda) &= \lambda C_j(x, \lambda), & C_j(0, \lambda) - 1 &= C_j'(0, \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Let the number ρ be such that

$$\lambda = \rho^2, \quad \arg \rho \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{6}$$



The functions $S_j(x, \lambda)$, $C_j(x, \lambda)$ satisfy the Volterra integral equations

$$S_j(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q_j(t) S_j(t, \lambda) dt, \tag{7}$$

$$C_j(x, \lambda) = \cos \rho x + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q_j(t) C_j(t, \lambda) dt. \tag{8}$$

Put $\tau := \text{Im } \rho$. One can obtain the following asymptotic formulae from (7),(8) as $\rho \rightarrow \infty$:

$$S_j(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho^2} \sin \rho t q_j(t) dt + \int_0^x \int_0^t \frac{\sin \rho(x-t) q_j(t)}{\rho^3} \sin \rho(t-\xi) q_j(\xi) \sin \rho \xi d\xi dt + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho^4}\right), \tag{9}$$

$$S'_j(x, \rho) = \cos \rho x + \int_0^x \frac{\cos \rho(x-t)}{\rho} \sin \rho t q_j(t) dt + \int_0^x \int_0^t \frac{\cos \rho(x-t) q_j(t)}{\rho^2} \sin \rho(t-\xi) q_j(\xi) \sin \rho \xi d\xi dt + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho^3}\right), \tag{10}$$

$$C_j(x, \rho) = \cos \rho x + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} \cos \rho t q_j(t) dt + \int_0^x \int_0^t \frac{\sin \rho(x-t) q_j(t)}{\rho^2} \sin \rho(t-\xi) q_j(\xi) \cos \rho \xi d\xi dt + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho^3}\right), \tag{11}$$

$$C'_j(x, \rho) = -\rho \sin \rho x + \int_0^x \cos \rho(x-t) \cos \rho t q_j(t) dt + \int_0^x \int_0^t \frac{\cos \rho(x-t) q_j(t)}{\rho} \sin \rho(t-\xi) q_j(\xi) \cos \rho \xi d\xi dt + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho^2}\right). \tag{12}$$

We introduce matrix solutions of equation (2): $S(\lambda) = \text{diag} \{S_j(x_j, \lambda)\}_{j=1}^m$ and $C(\lambda) = \text{diag} \{C_j(x_j, \lambda)\}_{j=1}^m$.

Every eigenvalue of problem (2)–(5) corresponds to the zero of the following characteristic function $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda) := \det V(S(\lambda)). \tag{13}$$

As $S_j(\pi, \lambda)$, $S'_j(\pi, \lambda)$ are entire functions of λ , the function $\Delta(\lambda)$ is also entire. Reconstructing the determinant in (13), we obtain

$$\Delta(\lambda) = \sum_{k=1}^m \left(S'_k(\pi, \lambda) \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^m S_j(\pi, \lambda) \right). \tag{14}$$

Lemma 1. *The number λ_0 is an eigenvalue of problem (2)–(5) of multiplicity k if and only if λ_0 is a zero of characteristic function of multiplicity k .*

The statement of the Lemma 1 results from the self-adjointness of L and is proved with the same technique as in [7, Lemma 3]. From the self-adjointness of L it also follows that the eigenvalues of the boundary problem (2)–(5) are real.

Denote $\omega_j = \frac{1}{2} \int_0^\pi q_j(t) dt$, $f(z) = \prod_{j=1}^m (z - \omega_j)$. Let $z^{(j)}$, $j = \overline{1, m-1}$ be the zeros of $f'(z)$, $z^{(m)} = \sum_{j=1}^m \omega_j / m$. We will mean by $\{\kappa_n\}_{n=1}^\infty$ different sequences from l^2 . Considering these designations, the following theorem can be formulated:



Theorem 1. *The operator L has a countable set of the eigenvalues. The eigenvalues can be enumerated in such way that the further formulae are satisfied:*

$$\sqrt{\lambda_n^{(j)}} = n + \frac{z^{(j)} + \kappa_n}{n\pi}, \quad j = \overline{1, m-1}, \tag{15}$$

$$\sqrt{\lambda_n^{(m)}} = n - \frac{1}{2} + \frac{z^{(m)} + \kappa_n}{n\pi}, \tag{16}$$

where the square root is taken according the same rule as in (6).

The formulae (15), (16) with the remainders $o(1)$ are obtained in [1]; Theorem 1 is proved for real-valued potentials by V. Pivovarchick [8] (see also [9]).

Remark 1. The statement of the Theorem 1 is also correct under the conditions $q_j(x) \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, m}$, all $\{z^{(k)}\}_{k=1}^{m-1}$ are distinct.

2. MAIN RESULTS

In that chapter we define and study weight numbers based on the Weyl matrix.

Let $\Phi(\lambda) = \{\phi_{jk}(x_j, \lambda)\}_{j,k=1}^m$ be the matrix solution of (2) under the conditions $\{\phi_{jk}(0, \lambda)\}_{j,k=1}^m = I$, $V(\Phi) = 0$. The matrix $M(\lambda) = \{-\phi'_{jk}(0, \lambda)\}_{j,k=1}^m$ is called the Weyl matrix and generalize the notion of the Weyl function for differential operators on intervals (see [4]). Weyl functions and their generalizations are natural spectral characteristics, often used for reconstruction of operators. A system of $2m$ columns of the matrix solutions $C(\lambda), S(\lambda)$ is fundamental, and one can show, that

$$M(\lambda) = (V(S(\lambda)))^{-1}V(C(\lambda)). \tag{17}$$

In view of (17) the elements of the matrix $M(\lambda) = \{M_{kl}(\lambda)\}_{k,l=1}^m$ can be calculated as

$$M_{kl}(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left(\prod_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^m S_j(x, \lambda) C_l(x, \lambda) \right) \Big|_{x=\pi}. \tag{18}$$

The elements of the matrix $M(\lambda)$ are meromorphic functions, and their poles may be only zeros of the characteristic function $\Delta(\lambda)$. Moreover, analogously to [7, Lemma 3], we prove the following lemma.

Lemma 2. *If the number λ_0 is a pole of $M_{kl}(\lambda)$, this pole is simple.*

Proof. Let λ_0 be a zero of $\Delta(\lambda)$ of multiplicity b . By virtue of Theorem 1 there are exactly b linearly independent eigenfunctions $\{y_j\}_{j=1}^b$ corresponding to λ_0 . Denote by K such invertible matrix that first b columns of $S(\lambda_0)K$ are equal to $\{y_j\}_{j=1}^b$.

If $Y(\lambda) = S(\lambda)K$, then $S(\lambda) = Y(\lambda)K^{-1}$, and

$$M(\lambda) = K[V(Y(\lambda))]^{-1}V(C(\lambda)).$$



It is sufficient to prove that for any element of $A(\lambda)$ the number λ_0 can not be a pole of order greater than 1, where $A(\lambda) = [V(Y(\lambda))]^{-1}V(C(\lambda))$. If $A(\lambda) = \{A_{sl}(\lambda)\}_{s,l=1}^m$, then

$$A_{sl}(\lambda) = \frac{\det[V(Y_1(\lambda)), \dots, V(Y_{s-1}(\lambda)), V(C_l(\lambda)), V(Y_{s+1}(\lambda)), \dots, V(Y_m(\lambda))]}{\det V(Y(\lambda))}.$$

The number λ_0 is zero of the numerator of multiplicity not less than $b - 1$. From that the statement of the theorem follows. \square

We introduce the constants $\alpha_{jn}^k = \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_n^{(j)}} M_{kk}(\lambda)$ which are called weight numbers.

We also mean by $\{\kappa_n(z)\}_{n=1}^\infty$ different sequences of continuous functions such that

$$\sum_{n=1}^\infty \max_{|z| \leq R} |\kappa_n(z)|^2 < \infty,$$

where

$$R = 2 + \max_{s=1, m} |z^{(s)}|.$$

The main results of the paper are stated in the following two theorems.

Theorem 2. *Let the eigenvalues of L be enumerated as in Theorem 1, $k = \overline{1, m}$. Then*

$$\sum_{j \in I(n)} \alpha_{jn}^k = \frac{2n^2}{m\pi} \left(m - 1 + \frac{\kappa_n}{n} \right), \tag{19}$$

$$\alpha_{ms}^k = \frac{(n - \frac{1}{2})^2}{m\pi} \left(2 + \frac{\kappa_n}{n} \right), \tag{20}$$

where

$$I(n) = \bigcup_{j=1}^{m-1} \left\{ \min \{s : \lambda_n^{(s)} = \lambda_n^{(j)}\} \right\}.$$

Proof. To prove the theorem, consider $\rho_n(z) = n + \frac{z}{n\pi}$, $|z| \leq R$. Substituting $\rho = \rho_n(z)$ into (9)–(12), we obtain

$$S_j(\pi, \rho_n^2(z)) = \frac{(-1)^n}{n\rho_n(z)} \left(z - \tilde{\omega}_{jn} + \frac{\kappa_n(z)}{n} \right), \quad \tilde{\omega}_{jn} = \omega_j - \hat{q}_j(2n), \tag{21}$$

$$S'_j(\pi, \rho_n^2(z)) = (-1)^n \left(1 + \frac{\kappa_n(z)}{n} \right), \tag{22}$$

$$C_j(\pi, \rho_n^2(z)) = (-1)^n \left(1 + \frac{\kappa_n(z)}{n} \right), \tag{23}$$

$$C'_j(\pi, \rho_n^2(z)) = \frac{(-1)^n \rho_n(z)}{n} \left(z - \check{\omega}_{jn} + \frac{\kappa_n(z)}{n} \right), \quad \check{\omega}_{jn} = \omega_j + \hat{q}_j(2n), \tag{24}$$

where $\hat{q}_j(l) = \frac{1}{2} \int_0^\pi q_j(t) \cos lt \, dt$. We substitute (21)–(24) into (14), (18) and get

$$\Delta(\rho_n^2(z)) = \frac{(-1)^{nm}}{n^{m-1} \rho_n^{m-1}(z)} \left(\sum_{s=1}^m \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq s}}^m \left(z - \tilde{\omega}_{jn} + \frac{\kappa_n(z)}{n} \right) \right), \tag{25}$$



$$M_{kk}(\rho_n^2(z))\Delta(\rho_n^2(z)) = \frac{(-1)^{nm}}{n^{m-2}\rho_n^{m-2}(z)} \left(\sum_{\substack{s=1, \\ s \neq k}}^m \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq s, j \neq k}}^m (z - \tilde{\omega}_{jn}) + \frac{\kappa_n(z)}{n} \right). \quad (26)$$

Let us denote $f_n(z) = \prod_{j=1}^m (z - \tilde{\omega}_{jn})$, $\delta(r)$ is the circle of center 0 and radius $r > 0$. It can be proved that $\tilde{z}_n^{(j)} = z^{(j)} + o(1)$, $n \rightarrow \infty$, where $\{\tilde{z}_n^{(j)}\}_{j=1}^{m-1}$ are the zeros of $f'_n(z)$. If $z \in \delta(R)$, then for sufficiently large n , $\rho_n^2(z)$ runs across the simple closed contour, which surrounds $\{\lambda_n^{(j)}\}_{j=1}^{m-1}$. Integrating $M_{kk}(\lambda)$, after the substitution $\lambda = \rho_n^2(z)$ we have

$$\sum_{l \in I(n)} \alpha_{ln}^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \delta(R)} \frac{2\rho_n(z)}{n\pi} M_{kk}(\rho_n^2(z)) dz.$$

The following formula is obtained from the previous one and (25), (26):

$$\sum_{l \in I(n)} \alpha_{ln}^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \delta(R)} \frac{2\rho_n^2(z)}{m\pi} \frac{\sum_{\substack{s=1, \\ s \neq k}}^m \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq s, j \neq k}}^m (z - \tilde{\omega}_{jn}) + \frac{\kappa_n(z)}{n}}{\prod_{j=1}^{m-1} (z - \tilde{z}_n^{(j)}) + \frac{\kappa_n(z)}{n}} dz. \quad (27)$$

The remainder $\frac{\kappa_n(z)}{n}$ can be excluded from the denominator of (27) with Taylor expansion as $\min_{|z|=R} \prod_{j=1}^{m-1} |z - \tilde{z}_n^{(j)}| > 1$ if n is large enough. Besides, $\rho_n^2(z) = n^2 \left(1 + \frac{\kappa_n(z)}{n} \right)$, $|z| \leq R$. After the designation

$$g_{kn}(z) = \frac{\sum_{\substack{s=1, \\ s \neq k}}^m \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq s, j \neq k}}^m (z - \tilde{\omega}_{jn})}{\prod_{j=1}^{m-1} (z - \tilde{z}_n^{(j)})}$$

we get

$$\sum_{l \in I(n)} \alpha_{ln}^k = \frac{2n^2}{2m\pi^2 i} \left(\int_{z \in \delta(R)} g_{kn}(z) dz + \frac{\kappa_n}{n} \right). \quad (28)$$

We note that $\delta(r)$ contains all $\{\tilde{z}_n^{(j)}\}_{j=1}^{m-1}$ for $r \geq R$ and large n . Thus,

$$\int_{z \in \delta(R)} g_{kn}(z) dz = \int_{z \in \delta(r)} g_{kn}(z) dz.$$

The numerator of the fraction $g_{kn}(z)$ is a polynomial of degree $m - 2$ with leading coefficient $m - 1$, and its denominator is a polynomial of degree $m - 1$ with leading coefficient 1. For $z \in \delta(r)$ there is the equality $g_{kn}(z) = \frac{m-1}{z} + O(r^{-2})$, and

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{z \in \delta(r)} g_{kn}(z) dz = m - 1 + O(r^{-1}).$$

As $r \rightarrow \infty$ we obtain (19).

Formula (20) is proved analogously. □



Theorem 3. Let $z^{(s)}$ be a zero of $f'(z)$ of multiplicity $b(s) > 0$, $1 \leq p \leq m$. Denote $N(s) = \{1 \leq j < m : z^{(s)} \neq z^{(j)}\}$, $N'(s) = \{1 \leq j < m : z^{(s)} = z^{(j)}\}$, and $W(s) = \{1 \leq j \leq m : z^{(s)} \neq \omega_j\}$. If $p \in W(s)$, then

$$\sum_{l \in N'(s)} \alpha_{ln}^p = \frac{2n^2}{m\pi} (\Omega_{ps} + \kappa_n), \tag{29}$$

else

$$\sum_{l \in N'(s)} \alpha_{ln}^p = \frac{2n^2}{m\pi} (\Theta_s + \kappa_n), \tag{30}$$

where

$$\Omega_{ps} = -\frac{\prod_{j=1}^m (z^{(s)} - \omega_j)}{(z^{(s)} - \omega_p)^2 \prod_{j \in N(s)} (z^{(s)} - z^{(j)})}, \quad \Theta_s = b(s) \frac{\prod_{j \in W(s)} (z^{(s)} - \omega_j)}{\prod_{j \in N(s)} (z^{(s)} - z^{(j)})},$$

and the product over empty set is understood as 1.

Proof. Denote by r such positive number that the circle $|z - z^{(s)}| \leq r$ does not contain $z^{(j)}$, $j \in N(s)$ and $|z^{(s)}| + r < R$, $r \geq C > 0$. We call the circumference of that circle $\gamma(s)$. The following analogue of the formulae (28) can be proved:

$$\sum_{l \in N'(s)} \alpha_{ln}^p = \frac{2n^2}{2m\pi^2 i} \left(\int_{\gamma(s)} \frac{\sum_{k=1, k \neq p}^m \prod_{j=1, j \neq k, j \neq p}^m (z - \tilde{\omega}_{jn})}{\prod_{j=1}^{m-1} (z - \tilde{z}_n^{(j)})} dz + \frac{\kappa_n}{n} \right). \tag{31}$$

We designate

$$F_p(z) = \frac{\sum_{k=1, k \neq p}^m \prod_{j=1, j \neq k, j \neq p}^m (z - \omega_n)}{\prod_{j=1}^{m-1} (z - z^{(j)})}.$$

As $\omega_j - \tilde{\omega}_{jn} = \kappa_n$ and the coefficients of $f'(z)$, $f'_n(z)$ depend on $\{\omega_j\}_{j=1}^m$, $\{\tilde{\omega}_{jn}\}_{j=1}^m$ polynomially, we have

$$\frac{\sum_{k=1, k \neq p}^m \prod_{j=1, j \neq k, j \neq p}^m (z - \tilde{\omega}_{jn})}{\prod_{j=1}^{m-1} (z - \tilde{z}_n^{(j)})} - F_p(z) = \kappa_n(z), \tag{32}$$

where $z \in \gamma(s)$. We integrate the fraction $F_p(z)$.

First we consider $b(s) > 1$. Then $z^{(s)}$ is a zero of $f(z)$ of multiplicity $b(s) + 1$ (see [10, section 4.3]), and cardinality of $W(s)$ is $m - b(s) - 1$. In the case when $p \in W(s)$ the function $F_p(z)$ has no pole inside $\gamma(s)$, and $\alpha_{sn}^p = \frac{2n^2}{m\pi} \kappa_n$, what is the same as (29). If $p \notin W(s)$, then

$$F_p(z) = \frac{b(s)(z - z^{(s)})^{b(s)-1} \prod_{j \in W(s)} (z - \omega_j) + (z - z^{(s)})^{b(s)} \sum_{k \in W(s)} \prod_{j \in W(s), j \neq k} (z - \omega_j)}{(z - z^{(s)})^{b(s)} \prod_{j \in N(s)} (z - z^{(j)})},$$

and

$$\int_{\gamma(s)} F_p(z) dz = b(s) \frac{\prod_{j \in W(s)} (z^{(s)} - \omega_j)}{\prod_{j \in N(s)} (z^{(s)} - z^{(j)})}. \tag{33}$$

Formula (30) follows from (31)–(33).



Further, let $b(s) = 1$. When $z^{(s)}$ is a zero of $f(z)$, computations are the same as in the case $b(s) > 1$. So we assume $f(z^{(s)}) \neq 0$, and consequently $p \in W(s)$. Rewriting $F_p(z)$ as

$$F_p(z) = \left(\frac{f(z)}{z - \omega_p} \right)' (f'(z))^{-1} = \frac{1}{z - \omega_p} - \frac{f(z)}{(z - \omega_p)^2 f'(z)}$$

and integrating over $\gamma(s)$, we obtain (30). □

Acknowledgements: This work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 15-01-04864, 17-51-53180) and by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.1660.2017/PCh).

References

1. Yang C.-F., Huang Z.-Y., Yang X.-P. Trace formulas for Schrödinger systems on graphs. *Turkish J. Math.*, 2010, vol. 34, no. 2, pp. 181–196. DOI: 10.3906/mat-0811-7.
2. Berkolaiko G., Kuchment P. *Introduction to Quantum Graphs*. AMS, Providence, RI, 2013. 270 p.
3. Pokornyy Yu. V., Penkin O. M., Borovskikh A. V., Pryadiev V. L., Lazarev K. P., Shabrov S. A. *Differentsial'nye uravneniia na geometricheskikh grafakh* [Differential Equations on Geometrical Graphs]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 272 p. (in Russian).
4. Freiling G., Yurko V. A. *Inverse Sturm–Liouville problems and their applications*. New York, Nova Science, 2001. 305 p.
5. Yurko V. A. On recovering Sturm–Liouville operators on graphs. *Math. Notes*, 2006, vol. 79, iss. 3–4, pp. 572–582. DOI: 10.4213/mzm2732.
6. Yurko V. A. Inverse spectral problems for differential operators on spatial networks. *Russian Math. Surveys*, 2016, vol. 71, no. 3, pp. 539–584. DOI: 10.4213/rm9709.
7. Bondarenko N. Spectral analysis for the matrix Sturm–Liouville operator on a finite interval. *Tamkang J. Math.*, 2011, vol. 42, no. 3, pp. 305–327. DOI: 10.5556/j.tkjm.42.2011.305-327.
8. Pivovarchik V. Inverse problem for the Sturm–Liouville equation on a star-shaped graph. *Math. Nachr.*, 2007, vol. 280, no. 1314, pp. 1595–1619. DOI: 10.1002/mana.200410567.
9. Möller M., Pivovarchik V. *Spectral theory of operator pencils, Hermite–Biehler functions, and their applications*. Cham, Birkhäuser, 2015. 412 p. DOI: 10.1007/978-3-319-17070-1.
10. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. *Inequalities*. London, Cambridge University Press, 1934. 456 p.

Cite this article as:

Kuznetsova M. A. Asymptotic Formulae for Weight Numbers of the Sturm–Liouville Boundary Problem on a Star-shaped Graph. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 40–48. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-40-48.



УДК 517.984

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ЧИСЕЛ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ

М. А. Кузнецова

Кузнецова Мария Андреевна, студент, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, mk680970@gmail.com

В статье исследована краевая задача Штурма – Лиувилля на графе Γ определенного вида. Граф Γ имеет m ребер, смежных с одной внутренней вершиной, а остальные m вершин являются вершинами степени 1. Краевая задача на данном графе задается дифференциальными выражениями Штурма – Лиувилля с вещественными потенциалами, краевыми условиями Дирихле и стандартными условиями склейки. Определенная таким образом краевая задача имеет счетное множество собственных значений. Мы рассмотрим вычеты диагональных элементов матрицы Вейля в собственных значениях, которые назовем весовыми числами. Элементы матрицы Вейля являются мероморфными функциями с простыми полюсами в собственных значениях. Отметим, что весовые числа в данном случае являются обобщением весовых чисел оператора Штурма – Лиувилля на конечном интервале, которые определяются как обратные величины квадратов норм собственных функций. Эти числа вместе с собственными значениями играют роль спектральных данных для однозначного восстановления оператора. С помощью интегрирования по контурам будут получены асимптотические формулы для весовых чисел, в случае асимптотически близких собственных значений будем иметь формулы для сумм. Результаты могут быть использованы для анализа обратных спектральных задач на графах.

Ключевые слова: краевая задача Штурма – Лиувилля, асимптотические формулы, весовые числа, граф-звезда.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-04864, 17-51-53180) и Минобрнауки РФ (проект № 1.1660.2017/ПЧ).

Образец для цитирования:

Кузнецова М. А. Asymptotic Formulae for Weight Numbers of the Sturm – Liouville Boundary Problem on a Star-shaped Graph [Асимптотические формулы для весовых чисел краевой задачи Штурма – Лиувилля на графе-звезде] // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 40–48. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-40-48.



УДК 517.51

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИМИСЯ РЯДАМИ ПО \mathcal{H} -СИСТЕМАМ

К. А. Навасардян

Навасардян Карен Аршалуйсович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры численного анализа и математического моделирования, Ереванский государственный университет, 0025, Республика Армения, Ереван, Алек Манукяна, 1, knavasard@ysu.am

Рассматриваются вопросы представления абсолютно сходящимися рядами функций в пространствах однородного типа. Во введении приводится определение системы типа Хаара (\mathcal{H} -системы), связанной с некоторой диадической системой в пространстве однородного типа X . Доказывается, что для любой, почти всюду (п. в.) конечной, измеримой на X функции f существует абсолютно сходящийся ряд по системе \mathcal{H} , который сходится к f п. в. на X . Из этой теоремы, в частности, следует, что если $\mathcal{H} = \{h_n\}$ — обобщенная система Хаара, порожденная ограниченной последовательностью p_k , то для любой п. в. конечной на $[0, 1]$ измеримой функции f существует абсолютно сходящийся ряд по системе $\{h_n\}$, который п. в. сходится к $f(x)$. Доказывается, что если X — ограниченное множество, то любую п. в. конечную, измеримую функцию можно изменить на множестве сколь угодно малой меры так, чтобы ряд Фурье полученной функции по системе \mathcal{H} сходилась равномерно. Результаты статьи получены методами метрической теории функций.

Ключевые слова: системы типа Хаара, диадическая система, абсолютная сходимость, равномерная сходимость.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-49-61

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются системы типа Хаара, построенные на диадических системах пространств однородного типа.

Напомним некоторые определения.

Пусть X — некоторое множество. Неотрицательная симметричная функция $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ называется квазиметрикой, если $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ и существует постоянная K такая, что

$$\rho(x, y) \leq K (\rho(x, z) + \rho(z, y)) \quad \text{для всех } x, y, z \in X.$$

Обозначим через $B(x, r) := \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ шар с центром x и радиусом r . Известно, что если ρ — квазиметрика с коэффициентом $K > 1$, то шар $B(x, r)$ может быть неоткрытым множеством. В работе [1] доказано, что для любой квазиметрики ρ существует такая квазиметрика ρ' , которая эквивалентна ρ , и все шары относительно ρ' являются открытыми множествами. В этой работе мы будем предполагать, что все шары — открытые множества.

Напомним, что пространство (X, ρ, μ) , где ρ — квазиметрика, а μ — некоторая бореловая σ -конечная мера, определенная на некоторой σ -алгебре подмножеств множества X , называется пространством однородного типа, если существует постоянная A такая, что

$$\mu(B(x, 2r)) \leq A\mu(B(x, r)) < +\infty \quad \text{для всех } x \in X \text{ и } r > 0. \quad (1)$$

В этой работе мы будем предполагать, что мера μ регулярная.



Определение 1. Пусть (X, ρ, μ) — некоторое пространство однородного типа. Семейство $\mathcal{D} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ называется *диадическим семейством с параметром* $\delta \in (0, 1)$ в пространстве X , если каждое \mathcal{D}^j является семейством борелевых множеств $Q \subset X$, удовлетворяющим условиям:

- d1) для каждого $j \in \mathbb{Z}$ множества в \mathcal{D}^j попарно не пересекаются и $X = \bigcup_{Q \in \mathcal{D}^j} Q$;
- d2) если $Q \in \mathcal{D}^j$ и $i < j$, то существует множество $\tilde{Q} \in \mathcal{D}^i$ такое, что $Q \subset \tilde{Q}$;
- d3) существует натуральное число N такое, что $1 \leq \text{card}\{Q' \in \mathcal{D}^{j+1} : Q' \subset Q\} \leq N$ для всех $j \in \mathbb{Z}$ и $Q \in \mathcal{D}^j$.
- d4) существуют постоянные a_1 и a_2 такие, что для каждого $Q \in \mathcal{D}^j$, $j \in \mathbb{Z}$, существуют шары $B(x_1, r_1)$ и $B(x_2, r_2)$ такие, что

$$B(x_1, r_1) \subset Q \subset B(x_2, r_2), \quad r_1 \geq a_1 \delta^j, \quad r_2 \leq a_2 \delta^j.$$

Первые нетривиальные конструкции диадических семейств были рассмотрены в [2].

В работах [3–5] дано определение системы типа Хаара, соответствующей диадической системе \mathcal{D} и исследованы некоторые свойства этой системы.

Пусть \mathcal{D} — некоторое диадическое семейство с параметром δ в пространстве однородного типа X . Следуя обозначениям работы [5], для $Q \in \mathcal{D}^j$, $j \in \mathbb{Z}$, обозначим

$$\mathcal{L}(Q) := \{Q' \in \mathcal{D}^{j+1} : Q' \subset Q\}.$$

Положим

$$\tilde{\mathcal{D}}^j := \{Q \in \mathcal{D}^j : \text{card}(\mathcal{L}(Q)) > 1\}, \quad \tilde{\mathcal{D}} := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{D}}^j.$$

Мы будем предполагать, что в \mathcal{D} не существуют одноточечные множества с положительной мерой. Это означает (см. также d4)), что для каждого $Q \in \mathcal{D}$ существует $n(Q) \in \mathbb{N}$ такое, что $Q \in \tilde{\mathcal{D}}^{n(Q)}$, т. е.

$$\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}. \tag{2}$$

Определение 2. Система простых, измеримых функций $\mathcal{H} = \{h\}$, определенных на X , называется *системой типа Хаара (\mathcal{H} -системой)*, связанной с системой \mathcal{D} , если

- (h1) для каждого $h \in \mathcal{H}$ существуют единственное $j = j(h) \in \mathbb{Z}$ и множество $Q = Q(h) \in \tilde{\mathcal{D}}^j$ такие, что $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subset Q$, и это свойство не выполняется для множеств из \mathcal{D}^{j+1} . Более того, каждая функция h постоянна на каждом множестве $Q' \in \mathcal{L}(Q(h))$;
- (h2) для каждого $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ существуют $M_Q := \text{card}(\mathcal{L}(Q)) - 1 \geq 1$ функций $h \in \mathcal{H}$, удовлетворяющих 1). Множество этих функций обозначим $\mathcal{H}(Q)$;
- (h3) $\int_X h d\mu = 0$ для каждого $h \in \mathcal{H}$;



(h4) если для каждого $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ обозначим через V_Q линейное пространство тех функций, определенных на Q , которые постоянны на каждом $Q' \in \mathcal{L}(Q)$, то система $\left\{ \frac{\chi_Q}{\sqrt{\mu(Q)}} \right\} \cup \mathcal{H}(Q)$ является ортонормированным базисом в V_Q , (χ_Q — характеристическая функция множества Q).

Заметим, что система типа Хаара, связанная с данной системой \mathcal{D} , может быть не единственной.

Н. К. Бари было установлено, что любая почти всюду (п. в.) конечная на $[0, 1]$, измеримая функция представима рядом по системе Хаара, сходящимся к этой функции п. в. [6, с. 527]. Затем Ф. Г. Арутюняном [7] была усилена эта теорема и доказано, что для любой п. в. конечной на $[0, 1]$, измеримой функции f существует абсолютно сходящийся п. в. на $[0, 1]$ ряд по системе Хаара такой, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) = f(x) \quad \text{п. в. на } [0, 1].$$

В работах [8–10] распространен этот результат Арутюняна на другие системы, содержащие в себе систему Хаара.

В настоящей работе доказана следующая

Теорема 1. Пусть (X, ρ, μ) — некоторое пространство однородного типа, \mathcal{D} — диадическое семейство с параметром δ в пространстве X , удовлетворяющее условию (2), а $\mathcal{H} = \{h\}$ — некоторая система типа Хаара, связанная с системой \mathcal{D} . Тогда для любой п. в. конечной на X измеримой функции f существует ряд $\sum_{h \in \mathcal{H}} a_h h$ по системе \mathcal{H} , который п. в. абсолютно сходится и

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} a_h h(x) = f(x) \quad \text{п. в. на } X.$$

Для каждого целого числа k_0 обозначим (см. (h1))

$$\mathcal{H}_{k_0} := \{h \in \mathcal{H} : j(h) \geq k_0\}.$$

Нетрудно заметить, что теорема 1 следует из следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть (X, ρ, μ) — некоторое пространство однородного типа, \mathcal{D} — диадическое семейство с параметром δ в X , удовлетворяющее условию (2), а $\mathcal{H} = \{h\}$ — некоторая система типа Хаара, связанная с системой \mathcal{D} . Тогда для любого $k_0 \in \mathbb{Z}$ и любой п. в. конечной на X измеримой функции f существует ряд $\sum_{h \in \mathcal{H}_{k_0}} a_h h$ по системе \mathcal{H}_{k_0} , который п. в. абсолютно сходится и

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_{k_0}} a_h h(x) = f(x) \quad \text{п. в. на } X.$$

Пусть $\{p_k\}$ — некоторая ограниченная последовательность натуральных чисел с условием $p_k \geq 2$. Допустим $m_0 = 1$ и $m_k = p_k m_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть j_k —



натуральное число, удовлетворяющее условию $2^{j_k-1} < m_k \leq 2^{j_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Положим $\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}^1 = \dots = \mathcal{D}^{j_1-1} = [0, 1]$ и

$$\mathcal{D}^{j_k} = \mathcal{D}^{j_k+1} = \dots = \mathcal{D}^{j_{k+1}-1} = \left\{ \left[\frac{i-1}{m_k}, \frac{i}{m_k} \right) : i = 1, 2, \dots, m_k \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ясно, что если $j_k \leq j < j_{k+1}$ и $Q \in \mathcal{D}^j$, то $2^{-j} \leq \mu Q \leq \frac{\max\{p_k\}}{m_{k+1}} \leq \frac{\max\{p_k\}}{2^{j_{k+1}-1}} \leq \frac{\max\{p_k\}}{2^{-j}}$, откуда следует, что $\mathcal{D} = \cup_{j=0}^{\infty} \mathcal{D}^j$ является диадической системой на $[0, 1]$ с параметром $\delta = 2^{-1}$, а обобщенная система Хаара $\mathcal{H} = \{h_n(x)\}$, порожденная последовательностью $\{p_k\}$, является \mathcal{H} -системой, связанной с \mathcal{D} , (определение обобщенной системы Хаара см. например в [11]). Из теоремы 2 и из вышесказанного, в частности, следует следующая

Теорема 3. Пусть $\mathcal{H} = \{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ — обобщенная система Хаара, порожденная ограниченной последовательностью $\{p_k\}$. Тогда для любой п. в. конечной на $[0, 1]$ измеримой функции f существует абсолютно сходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(x)$ такой, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(x) = f(x) \quad \text{п. в. на} \quad [0, 1].$$

В работе [7] для классической системы Хаара доказана следующая

Теорема. Для любой п. в. конечной измеримой на $[0, 1]$ функции f и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция g такая, что

- 1) $\mu\{x \in [0, 1] : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$,
- 2) ряд Фурье – Хаара функции g п. в. абсолютно сходится.

Для \mathcal{H} -систем справедлива следующая

Теорема 4. Пусть (X, ρ, μ) — некоторое пространство однородного типа, X — ограниченное множество, \mathcal{D} — диадическое семейство с параметром δ в X , удовлетворяющее условию (2), а $\mathcal{H} = \{h\}$ — некоторая система типа Хаара, связанная с системой \mathcal{D} . Тогда для любой п. в. конечной на X измеримой функции f и любого $\varepsilon > 0$ существует функция g такая, что

- 1) $\mu\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$,
- 2) ряд Фурье функции g по системе \mathcal{H} абсолютно равномерно сходится.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть \mathcal{D} — некоторая диадическая система с параметром $\delta \in (0, 1)$ в пространстве однородного типа X , удовлетворяющая условию (2). Была доказана следующая лемма [5, лемма 3.2]

Лемма 1. Пусть $\mathcal{H} = \{h\}$ — некоторая система типа Хаара, связанная с \mathcal{D} . Существует постоянная C такая, что для каждой функции $h \in \mathcal{H}$

$$|h(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{\mu(Q(h))}} \quad \text{для всех} \quad x \in Q(h).$$



Справедлива следующая

Лемма 2. Пусть $\mathcal{H} = \{h\}$ — некоторая система типа Хаара, связанная с \mathcal{D} . Тогда для любого числа $\varepsilon \in (0, 1)$ и для каждого $Q \in \mathcal{D}$ существуют множество

$Q' \subset Q$ и полином $P_Q = \sum_{i=1}^k \sum_{h \in \mathcal{H}(Q_i)} b_h h$ по системе \mathcal{H} такие, что

- 1) $Q' \in \mathcal{D}$ и $\mu(Q') < \varepsilon \mu(Q)$;
- 2) $P_Q(x) = 1$, если $x \in Q \setminus Q'$;
- 3) $\tilde{P}_Q(x) := \sum_{i=1}^k \sum_{h \in \mathcal{H}(Q_i)} |b_h h(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon}$ для всех $x \in Q$;
- 4) $\tilde{P}_Q(x) = 0$, если $x \notin Q$.

Доказательство. Для каждого $Q \in \mathcal{D}$ обозначим через Q^* то множество из $\mathcal{L}(Q)$, для которого

$$\mu(Q^*) = \min\{\mu(Q') : Q' \in \mathcal{L}(Q)\}$$

(если существует несколько таких множеств, то будем брать одно из них). Из (1) и d4) нетрудно установить, что существует постоянная C_1 , удовлетворяющая неравенству

$$\mu(Q^*) \leq \mu(Q) \leq C_1 \mu(Q^*). \quad (3)$$

Обозначим через

$$F_Q(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in Q \setminus Q^*, \\ \frac{\mu(Q \setminus Q^*)}{\mu(Q^*)}, & \text{если } x \in Q^*, \\ 0, & \text{если } x \notin Q. \end{cases} \quad (4)$$

Ясно, что

$$\int_X F_Q d\mu = \int_Q F_Q d\mu = 0, \quad (5)$$

поэтому из (h4) следует, что функцию F_Q можно представить в следующей форме:

$$F_Q(x) = \sum_{h \in \mathcal{H}(Q)} d_{Q,h} h(x).$$

Из леммы 1 и (4) следует, что для каждого $h \in \mathcal{H}(Q)$

$$|d_{Q,h}| = \left| \int_Q F_Q h d\mu \right| \leq \frac{C}{\sqrt{\mu(Q)}} \int_Q |F_Q| d\mu \leq \frac{2C}{\sqrt{\mu(Q)}} \mu(Q) \leq 2C \sqrt{\mu(Q)}.$$

Поэтому, учитывая также d3), получим:

$$\tilde{F}_Q(x) := \sum_{h \in \mathcal{H}(Q)} |d_{Q,h} h(x)| \leq 2NC^2 \quad \text{для всех } x \in Q.$$

Таким образом, существует постоянная C_3 такая, что

$$\tilde{F}_Q(x) \leq C_3 \leq C_3 |F_Q(x)| \quad \text{для всех } x \in Q. \quad (6)$$



Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ и $Q \in \mathcal{D}$. Определим множества $\{Q_m\} \subset \mathcal{D}$ следующим образом:

$$Q_0 = Q, \quad Q_m := Q_{m-1}^*, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7)$$

(т. е. m -й потомок Q с наименьшей мерой), и обозначим

$$k := \min\{m : \mu(Q_{m+1}) < \varepsilon\mu(Q)\}. \quad (8)$$

Из (4) и (7) следует, что можно поочередно выбрать положительные числа l_0, l_1, \dots, l_k так, чтобы $l_0 = 1$ и для каждого $m \leq k$

$$\sum_{i=0}^m l_i F_{Q_i}(x) = 1, \quad \text{если } x \in Q \setminus Q_m^*. \quad (9)$$

Очевидно, что полином

$$P_Q(x) := \sum_{i=0}^k \sum_{h \in \mathcal{H}(Q_i)} b_h h(x) \equiv \sum_{i=0}^k l_i F_{Q_i}(x) = \sum_{i=0}^k l_i \sum_{h \in \mathcal{H}(Q_i)} d_{Q_i, h} h(x)$$

и множество $Q' := Q_{k+1}$ удовлетворяют пунктам 1), 2) и 4) леммы 2.

Пусть x_0 — некоторый элемент из Q , тогда либо $x_0 \in Q_m \setminus Q_{m+1}$ для некоторого $m \in \{0, 1, \dots, k\}$, либо $x_0 \in Q_{k+1}$. Если $x_0 \in Q_0 \setminus Q_1$, то для всех функций $h \in \mathcal{H}(Q_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, имеем $h(x_0) = 0$. Поэтому из (6) получим: $\tilde{F}_Q(x_0) = \tilde{F}_{Q_0}(x_0) \leq C_3 \leq \frac{C_3}{\varepsilon}$. Если же $x_0 \in Q_m \setminus Q_{m+1}$ и $1 \leq m \leq k$, то из (4) и (9) следует, что $l_i F_{Q_i}(x_0) < 0$ для всех $i \in 0, 1, \dots, m-1$, так как $l_i > 0$, а $F_{Q_i}(x_0) < 0$ поэтому, учитывая (5), получим:

$$0 = \int_Q \sum_{i=0}^{m-1} l_i F_{Q_i} d\mu = \mu(Q \setminus Q_m) + \int_{Q_m} \sum_{i=0}^{m-1} l_i F_{Q_i} d\mu \leq \mu(Q) - \sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \mu(Q_m).$$

Откуда с учетом (8) получим

$$\sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно (см. также (9)),

$$\sum_{i=0}^k |l_i F_{Q_i}(x_0)| = \sum_{i=0}^m |l_i F_{Q_i}(x_0)| \leq \sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| + 1 + \sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \leq \frac{3}{\varepsilon}.$$

Пусть теперь $x_0 \in Q_{k+1}$, тогда из (4) и (5) получим

$$0 = \int_Q \sum_{i=0}^k l_i F_{Q_i} d\mu = \mu(Q \setminus Q_{k+1}) + \int_{Q_{k+1}} \sum_{i=0}^k l_i F_{Q_i} d\mu \leq \mu(Q) - \sum_{i=0}^k |l_i F_{Q_i}(x_0)| \mu(Q_{k+1}).$$

Учитывая (3) и (8), получим:

$$\sum_{i=0}^k |l_i F_{Q_i}(x_0)| \leq \frac{\mu(Q)}{\mu(Q_{k+1})} \leq \frac{C_1 \mu(Q)}{\mu(Q_k)} \leq \frac{C_1}{\varepsilon}.$$



Из последних неравенств и (6) следует, что для всех $x \in Q$

$$\tilde{P}_Q(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{h \in \mathcal{H}(Q_i)} |l_i d_{Q_i, h} h(x)| \leq C_3 \sum_{i=0}^k |l_i| F_{Q_i}(x) \leq \frac{C_4}{\varepsilon}.$$

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. Пусть $Q \in \mathcal{D}$ и f — некоторая измеримая п. в. конечная функция на Q . Тогда для любых $N \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ существуют множество $R \subset Q$ и полином $P(x) = \sum_{h \in \Omega} d_h h(x)$ по \mathcal{H} -системе, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $j(h) > N$ для всех $h \in \Omega$, (см. (h1));
- 2) $\mu(R) > (1 - \varepsilon)\mu(Q)$;
- 3) $|P(x) - f(x)| < \delta$ для всех $x \in R$;
- 4) $\sum_{h \in \Omega} |d_h h(x)| \leq \frac{C|f(x)|}{\varepsilon}$, если $x \in R$;
- 5) $\sum_{h \in \Omega} |d_h h(x)| = 0$, если $x \notin Q$.

Доказательство. Из формулировки леммы следует, что, не нарушая общности, можно считать f неотрицательной. Допустим число M выбрано так, чтобы

$$\mu\{x \in Q : f(x) > M\} < \frac{\varepsilon}{10}\mu(Q). \quad (10)$$

Выберем числа $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$, удовлетворяющие условиям

$$0 = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n = M, \quad \beta_i - \beta_{i-1} < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

и обозначим

$$m := \min_{1 \leq i \leq n} \mu(E_i) \quad \text{где } E_i := \{x \in Q : \beta_{i-1} \leq f(x) < \beta_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Без ограничения общности можем считать, что $m > 0$ (в противном случае, будем рассматривать только те множества E_i , для которых $\mu(E_i) > 0$). Поскольку множества E_i ($i = 1, 2, \dots, n$) измеримы, а мера μ регулярная, то для каждого i существует открытое множество G_i такое, что

$$E_i \subset G_i \quad \text{и} \quad \mu(G_i \setminus E_i) < \frac{\varepsilon}{10n}m. \quad (13)$$

Можно установить (см. например [3, лемма 2.3]), что для каждого i ($i = 1, 2, \dots, n$) существуют попарно непересекающиеся множества $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in I_i}$ такие, что

$$\{Q_\alpha\}_{\alpha \in I_i} \subset \bigcup_{j > N} \mathcal{D}^j, \quad \bigcup_{\alpha \in I_i} Q_\alpha \subset G_i \quad \text{и} \quad \mu\left(G_i \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I_i} Q_\alpha\right)\right) = 0. \quad (14)$$

Так как множества Q_α , $\alpha \in I_i$, попарно не пересекаются, а $\mu G_i < \infty$ (см. (12) и (13)), то из (14) следует, что существует конечное подмножество \tilde{I}_i множества индексов I_i такое, что

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha \in \tilde{I}_i} Q_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in \tilde{I}_i} \mu Q_\alpha > \mu G_i - \frac{\varepsilon}{10}\mu E_i. \quad (15)$$



Пусть $\alpha \in \tilde{I}_i$. Очевидно, что если $Q_\alpha \cap Q = \emptyset$, то $Q_\alpha \subset \bigcup_{k=1}^n (G_k \setminus E_k)$. Ясно также, что если $Q_\alpha \subset Q_\beta$ для некоторого $\beta \in \tilde{I}_j$, то $Q_\alpha \subset G_i \cap G_j \subset \bigcup_{k=1}^n (G_k \setminus E_k)$, так как множества $E_i, i = 1, 2, \dots, n$, попарно не пересекаются. Заметим, что из определения диадической системы следует: если $Q', Q'' \in \mathcal{D}$, то либо $Q' = Q''$, либо одно из них является подмножеством другого. Поэтому, если из \tilde{I}_i исключим те α , для которых $Q_\alpha \cap Q = \emptyset$ или $Q_\alpha \subset Q_\beta$ для некоторого $\beta \in \tilde{I}_j, j \neq i$, и обозначим оставшееся подмножество индексов \tilde{I}_i через I'_i , то с учетом (12)–(15) получим, что $Q_\alpha \subset Q$ для всех $\alpha \in I'_i (i = 1, 2, \dots, n)$

$$Q_\alpha \cap Q_\beta = \emptyset \quad \text{для всех } \alpha, \beta \in \bigcup_{i=1}^n I'_i, \quad \alpha \neq \beta, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mu\left(E_i \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I'_i} Q_\alpha\right)\right) &\geq \mu(E_i) - \mu\left(\bigcup_{\alpha \in I_i \setminus I'_i} Q_\alpha\right) > \mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{10} \mu(E_i) - \sum_{k=1}^n \mu(G_k \setminus E_k) > \\ &> \mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{10} \mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{10} \mu(E_i) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \mu(E_i). \end{aligned} \quad (17)$$

Для каждого $\alpha \in \bigcup_{i=1}^n I'_i$, применяя лемму 2 для множества Q_α и числа $\frac{\varepsilon}{2}$, получим множество $Q'_\alpha \subset Q_\alpha$ и полином $P_{Q_\alpha} = \sum_{h \in \Gamma_\alpha} b_h h$, удовлетворяющие условиям

$$Q'_\alpha \in \mathcal{D} \quad \text{и} \quad \mu(Q'_\alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \mu(Q_\alpha), \quad (18)$$

$$P_{Q_\alpha}(x) = 1 \quad \text{для всех } x \in Q_\alpha \setminus Q'_\alpha, \quad (19)$$

$$\tilde{P}_{Q_\alpha}(x) = \sum_{h \in \Gamma_\alpha} |b_h h(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \quad \text{для всех } x \in Q_\alpha, \quad (20)$$

$$\tilde{P}_{Q_\alpha}(x) = 0, \quad \text{если } x \notin Q_\alpha. \quad (21)$$

Рассмотрим множество

$$R := \bigcup_{i=1}^n \left(E_i \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I'_i} Q_\alpha \setminus Q'_\alpha\right)\right). \quad (22)$$

Из (10), (17) и (18) следует, что

$$\mu(R) \geq \sum_{i=1}^n \left(\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \mu(E_i) - \sum_{\alpha \in I'_i} \frac{\varepsilon}{2} \mu(Q_\alpha) \right) \geq (1 - \varepsilon) \mu(Q).$$

Положим

$$P(x) := \sum_{h \in \Omega} d_h h(x) \equiv \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} \sum_{\alpha \in I'_i} P_{Q_\alpha}(x) = \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} \sum_{\alpha \in I'_i} \sum_{h \in \Gamma_\alpha} b_h h(x). \quad (23)$$

Из (11), (12), (16), (19)–(22) следует, что полином $P(x)$ удовлетворяет всем пунктам леммы 3. Лемма 3 доказана. \square

Замечание 1. Если в формулировке леммы 3 функция f удовлетворяет условию $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in Q$, то пункт 4. леммы 3 можно заменить условием

$$\sum_{h \in \Omega} |d_h h(x)| \leq \frac{CM}{\varepsilon} \quad \text{для всех } x \in Q,$$

которое следует из (20), (21) и (23).



2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 2. Пусть f — некоторая п. в. конечная, измеримая функция, а $k_0 \in \mathbb{Z}$. Для каждого $Q \in \mathcal{D}^{k_0}$ обозначим

$$f_Q(x) := f(x)\chi_Q(x).$$

Поскольку множества Q в \mathcal{D}^{k_0} попарно не пересекаются, то достаточно доказать, что для каждой функции f_Q существует ряд $\sum_{h \in \Gamma_Q} a_h h$, где Γ_Q — множество тех функций из \mathcal{H} , для которых $\{x : h(x) \neq 0\} \subset Q$, который абсолютно сходится и

$$\sum_{h \in \Gamma_Q} a_h h(x) = f_Q(x) \quad \text{п. в. на } X.$$

Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел с условием

$$1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty. \quad (24)$$

Положим $d_h = 0$ для всех $h \in \mathcal{H}(Q) =: \Omega_0$, (см. (h2)), и $P_0 := \sum_{h \in \Omega_0} d_h h \equiv 0$.

Допустим уже определены полиномы $P_k = \sum_{h \in \Omega_k} d_h h$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, и числа

$N_k := \max\{j(h) : h \in \Omega_k\}$. Применяя лемму 3 к функции $f_Q(x) - \sum_{k=0}^{m-1} P_k(x)$ и числам $N = N_{m-1}$, $\delta = \varepsilon_{m+1}^2$ и $\varepsilon = \varepsilon_m$, получим множество $R_m \subset Q$ и полином $P_m(x) = \sum_{h \in \Omega_m} d_h h(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\min\{j(h) : h \in \Omega_m\} > N_{m-1}, \quad (25)$$

$$\mu(R_m) > (1 - \varepsilon_m)\mu(Q), \quad (26)$$

$$\left| f_Q(x) - \sum_{k=0}^m P_k(x) \right| < \varepsilon_{m+1}^2 \quad \text{для всех } x \in R_m, \quad (27)$$

$$\sum_{h \in \Omega_m} |d_h h(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon_m} \left| f_Q(x) - \sum_{k=0}^{m-1} P_k(x) \right|, \quad \text{если } x \in R_m, \quad (28)$$

$$\sum_{h \in \Omega_m} |d_h h(x)| = 0, \quad \text{если } x \notin Q. \quad (29)$$

Таким образом, по индукции определяются полиномы P_m и множества R_m ($m = 1, 2, \dots$), удовлетворяющие условиям (25)–(29). Рассмотрим ряд

$$\sum_{h \in \Gamma_Q} a_h h(x) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{h \in \Omega_m} d_h h(x) \quad (30)$$

и множество $R := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} R_m$. Из (24) и (26) следует, что $\mu(R) = \mu(Q)$.



Учитывая (27) и (28), для всех $x \in R_m \cap R_{m-1}$ получим:

$$\sum_{h \in \Omega_m} |d_h h(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon_m} \varepsilon_m^2 = C\varepsilon_m,$$

которое вместе с (24) и (29) обеспечивают абсолютную сходимость ряда (30) п. в. на X . Из (24), (27) и (29) получим, что сумма ряда (30) на множестве R является $f_Q(x)$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть X — ограниченное множество, а \mathcal{D} — диадическое семейство с параметром δ , удовлетворяющее условию (2). Из d4) следует, что для любого числа $R > 0$ существует $j \in \mathbb{Z}$ такое, что каждый элемент системы \mathcal{D}^j содержит шар с радиусом R . Следовательно, существует $Q_0 \in \mathcal{D}$ такое, что $X = Q_0$. Допустим, что $\varepsilon \in (0, 1)$ и на множестве X задана п. в. конечная измеримая функция $f(x)$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\varepsilon_k := \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad \delta_k := \varepsilon_{k+1}^2. \tag{31}$$

В силу леммы 3 существуют множество $R_1 \subset X = Q_0$ и полином $P_1(x) = \sum_{h \in \Omega_1} d_h h(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \mu(R_1) &> (1 - \varepsilon_1)\mu(X), \\ |f(x) - P_1(x)| &< \delta_1 \quad \text{для всех } x \in R_1. \end{aligned}$$

Допустим уже построены множества R_1, R_2, \dots, R_{k-1} и полиномы P_1, P_2, \dots, P_{k-1} такие, что

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i(x) \right| < \delta_{k-1} \quad \text{для всех } x \in \bigcap_{i=1}^{k-1} R_i.$$

Обозначим через g_k следующую функцию:

$$g_k(x) = \begin{cases} f(x) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i(x), & \text{если } x \in \bigcap_{i=1}^{k-1} R_i, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus \bigcap_{i=1}^{k-1} R_i. \end{cases}$$

Ясно, что

$$|g_k(x)| < \delta_{k-1} \quad \text{для всех } x \in X. \tag{32}$$

Для функции $g_k(x)$, применяя лемму 3 и учитывая (32) и замечание 1, получим, что существуют множество R_k и полином $P_k(x) = \sum_{h \in \Omega_k} d_h h(x)$ такие, что

$$\begin{aligned} \min\{j(h) : h \in \Omega_k\} &> \max\{j(h) : h \in \Omega_{k-1}\}, \\ \mu(R_k) &> (1 - \varepsilon_k)\mu(X), \end{aligned} \tag{33}$$

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^k P_i(x) \right| = |g_k(x) - P_k(x)| < \delta_k \quad \text{для всех } x \in \bigcap_{i=1}^k R_i, \tag{34}$$

$$\sum_{h \in \Omega_k} |d_h h(x)| \leq \frac{C\delta_{k-1}}{\varepsilon_k} = C\varepsilon_k \quad \text{для всех } x \in X. \tag{35}$$



Так по индукции определяются множества R_k и полиномы P_k , удовлетворяющие условиям (33) и (34) для всех $k \in \mathbb{N}$ и условию (35) для всех натуральных $k \geq 2$.

Для каждого $h \in \mathcal{H}$ положим $a_h := d_h$, если $h \in \Omega_k$, $k \in \mathbb{N}$, и $a_h := 0$ в противном случае. Рассмотрим ряд

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} a_h h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h \in \Omega_k} d_h h(x) \quad (36)$$

и множество $R := \bigcap_{k=1}^{\infty} R_k$. Из (31) и (35) следует, что ряд (36) на множестве X равномерно и абсолютно сходится к некоторой функции g , а из (31) и (33) следует, что $\mu(R) > (1 - \varepsilon)\mu(X)$. Ясно также (см. (34)), что для всех $x \in R$ имеем $f(x) = g(x)$.

Теорема 4 доказана.

Библиографический список

1. Macias R., Segovia C. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type // Adv. in Math. 1979. Vol. 33. P. 271–309.
2. Christ A. A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral // Colloquium Math. 1990. Vol. 60/61, iss. 2. P. 601–628.
3. Aimar H., Bernardis A., Iaffel B. Multiresolution Approximations and Unconditional Bases on Weighted Lebesgue Spaces on Spaces of Homogeneous Type // J. Approx. Theory. 2007. Vol. 148, iss. 1. P. 12–34. DOI:10.1016/j.jat.2007.02.002.
4. Aimar H., Bernardis A., Nowak L. Equivalence of Haar Bases Associated to Different Dyadic Systems // J. of Geometric Analysis. 2011. Vol. 21, iss. 2. P. 288–304. DOI: 10.1007/s12220-010-9148-x.
5. Aimar H., Bernardis A., Nowak L. Dyadic Fefferman–Stein Inequalities and the Equivalence of Haar Bases on Weighted Lebesgue Spaces // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Math. 2011. Vol. 141, iss. 1. P. 1–22. DOI: 10.1017/S0308210509001796.
6. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М. ; Л. : Гостехиздат, 1951. 550 с.
7. Арутюнян Ф. Г. О рядах по системе Хаара // Докл. АН АрмССР. 1966. Т. 42, № 3. С. 134–140.
8. Давтян Р. С. О представлении функций ортогональными рядами, обладающими мартингальными свойствами // Матем. заметки. 1976. Т. 19, № 5. С. 673–680. DOI: 10.1007/BF01142560.
9. Gevorkjan G. G. On the Representation of Measurable Functions by Martingales // Analysis Math. 1982. Vol. 8, № 4. P. 239–256. DOI: 10.1007/BF02201774.
10. Gevorkian G. G. Representation of Measurable Functions by Absolutely Convergent Series of Translates and Dilates of One Function // East J. Approx. 1996. Vol. 2, № 4. P. 439–458.
11. Голубов Б. И. Об одном классе полных ортогональных систем // Сиб. матем. журн. 1968. Т. 9, № 2. С. 297–314.

Образец для цитирования:

Навасардян К. А. О представлении функций абсолютно сходящимися рядами по \mathcal{H} -системам // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 49–61. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-49-61.



On the Representation of Functions by Absolutely Convergent Series by \mathcal{H} -system

K. A. Navasardyan

Karen A. Navasardyan, <https://orcid.org/0000-0002-8396-6462>, Yerevan State University, 1, Alex Manoogian Str., Yerevan, Republic of Armenia, 0025, knavasard@ysu.am

The paper deals with the representation of absolutely convergent series of functions in spaces of homogeneous type. The definition of a system of Haar type (\mathcal{H} -system) associated to a dyadic family on a space of homogeneous type X is given in the Introduction. It is proved that for almost everywhere (a.e.) finite and measurable on a set X function f there exists an absolutely convergent series by the system \mathcal{H} , which converges to f a.e. on X . From this theorem, in particular, it follows that if $\mathcal{H} = \{h_n\}$ is a generalized Haar system generated by a bounded sequence $\{p_k\}$, then for any a.e. finite on $[0, 1]$ and measurable function f there exists an absolutely convergent series in the system $\{h_n\}$, which converges a.e. to $f(x)$. It is also proved, that if X is a bounded set, then one can change the values of an a.e. finite and measurable function on a set of arbitrary small measure such that the Fourier series of the obtained function with respect to system \mathcal{H} will converge uniformly. The paper results are obtained using the methods of metrical functions theory.

Key words: Haar type system, dyadic family, absolute convergence, uniform convergence.

References

1. Macias R., Segovia C. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type. *Adv. in Math.*, 1979, vol. 33, pp. 271–309.
2. Christ A. A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral. *Colloquium Math.*, 1990, vol. 60/61, iss. 2, pp. 601–628.
3. Aimar H., Bernardis A., Jaffel B. Multiresolution Approximations and Unconditional Bases on Weighted Lebesgue Spaces on Spaces of Homogeneous Type. *J. Approx. Theory*, 2007, vol. 148, iss. 1, pp. 12–34. DOI:10.1016/j.jat.2007.02.002.
4. Aimar H., Bernardis A., Nowak L. Equivalence of Haar Bases Associated to Different Dyadic Systems. *J. of Geometric Analysis*, 2011, vol. 21, iss. 2, pp. 288–304. DOI: 10.1007/s12220-010-9148-x.
5. Aimar H., Bernardis A., Nowak L. Dyadic Fefferman–Stein Inequalities and the Equivalence of Haar Bases on Weighted Lebesgue Spaces. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Math.*, 2011, vol. 141, iss. 1, pp. 1–22. DOI: 10.1017/S0308210509001796.
6. Luzin N. N. *Integral i trigonometricheskij rjad* [Integral and trigonometric series]. Moscow, Leningrad, Gostehizdat, 1951. 550 p. (in Russian).
7. Arutyunyan F. G. On series in the Haar system. *Dokl. Akad. Nauk Armyanskoi SSR*, 1966, vol. 42, no. 3, pp. 134–140 (in Russian).
8. Davtyan R. S. On Representation of Functions by Orthogonal Series Possessing Martingale Properties. *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1976, vol. 19, no. 5, pp. 405–409. DOI: 10.1007/BF01142560.
9. Gevorkjan G. G. On the Representation of Measurable Functions by Martingales. *Analysis Math.*, 1982, vol. 8, iss. 4, pp. 239–256. DOI: 10.1007/BF02201774.



10. Gevorkian G. G. Representation of Measurable Functions by Absolutely Convergent Series of Translates and Dilates of One Function. *East J. Approx.*, 1996, vol. 2, no. 4, pp. 439–458.
11. Golubov B. I. Ob odnom klasse polnyh ortogonal'nyh sistem [On a class of complete orthogonal systems]. *Sibirskij matematicheskij zurnal*, 1968, vol. 9, no. 2, pp. 297–314 (in Russian).

Cite this article as:

Navasardyan K. A. On the Representation of Functions by Absolutely Convergent Series by \mathcal{H} -system. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 49–61 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-49-61.



УДК 519.7

О ПРИМЕНЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ В НЕКОТОРЫХ ПРОТОКОЛАХ ЭЛЕКТРОННОГО ГОЛОСОВАНИЯ

С. М. Рацеев, О. И. Череватенко

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, 432017, Россия, Ульяновск, Л. Толстого, 42, ratseevsm@mail.ru

Череватенко Ольга Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, 432063, Россия, Ульяновск, Площадь 100-летия со дня рождения В. И. Ленина, 4, chai@pisem.net

Протоколы электронного голосования позволяют проводить процедуру голосования, в которой избирательные бюллетени существуют только в электронной форме. Данные протоколы обеспечивают тайный характер голосования. Основное свойство протокола голосования — универсальная проверяемость, т. е. предоставление возможности всякому желающему, включая сторонних наблюдателей, в любой момент времени проверить правильность подсчета голосов. В работе рассматриваются криптографические протоколы электронного голосования на основе протоколов Шаума – Педерсона и Крамера – Франклина – Шонмейкера – Янга. Данные протоколы приводятся на основе эллиптических кривых, применение которых позволяет значительно уменьшить размеры параметров протоколов и увеличить их криптографическую стойкость. Основное преимущество эллиптической криптографии заключается в том, что на данный момент не известно ни одного субэкспоненциального алгоритма решения задачи дискретного логарифмирования в группе точек эллиптической кривой.

Ключевые слова: протокол электронного голосования, битовое обязательство, схема разделения секрета.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-62-68

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе приводятся модификации протоколов Шаума – Педерсона и Крамера – Франклина – Шонмейкера – Янга на эллиптических кривых. Сам принцип функционирования криптосистем на эллиптических кривых подробно изложен в [1].

Безопасность криптосистем на эллиптических кривых ECC (Elliptic Curve Cryptography), как правило, основана на трудности решения задачи дискретного логарифмирования в группе точек эллиптической кривой [1]. Исследования показывают, что в классе криптосистем с открытым ключом криптосистемы на эллиптических кривых превосходят классические криптосистемы на основе модулярной арифметики, как минимум, по двум важным параметрам: степени защищенности в расчете на каждый бит ключа и быстрдействию при аппаратной и программной реализации. Наглядно это демонстрирует следующая таблица (длины ключей для ECC и RSA при одинаковой криптостойкости согласно NIST [2]).

ECC key size (Bits)	RSA key size (Bits)	Key ratio	AES key size (Bits)
163	1024	1 : 6	
256	3072	1 : 12	128
384	7680	1 : 20	192
512	15360	1 : 30	256



1. МОДИФИКАЦИЯ ПРОТОКОЛА ГОЛОСОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ПРОТОКОЛА ШАУМА – ПЕДЕРСЕНА

Рассмотрим модификацию протокола электронного голосования, приведенного в работе [3]. Пусть в голосовании участвуют n избирателей P_1, \dots, P_n , которые являются абонентами некоторой сети и подают свои голоса в электронной форме: «за» и «против», которые соответственно представимы значениями 1 и -1 . К протоколу предъявим два основных требования: 1) голосование должно быть тайным; 2) должна быть обеспечена правильность подсчета голосов.

Пусть T — центр подсчета голосов. Будем предполагать, что центр честный и пользуется безусловным доверием всех избирателей.

Пусть E — эллиптическая кривая над некоторым конечным полем F , q — некоторый достаточно большой простой делитель числа $|E|$, G, H — некоторые точки эллиптической кривой, имеющие порядок q . Доверенный центр T выбирает секретный ключ x , $0 < x < q$, и публикует в открытом доступе открытый ключ $Y = [x]G$.

Каждый избиратель P_i посылает центру T сообщение, содержащее идентификатор этого избирателя и его голос $a_i \in \{-1, 1\}$, зашифрованный с помощью вероятностного шифра на ключе Y следующим образом: $U_i = [k_i]G$, $V_i = [k_i]Y + [a_i]H$, (U_i, V_i) — бюллетень голосования (передается центру T), где k_i — некоторое случайное число, $0 < k_i < q$. Центр расшифровывает бюллетени, подсчитывает и публикует итог. Расшифрование бюллетеня (U_i, V_i) происходит следующим образом: вычисляется $V_i + [q - x]U_i = [a_i]H$; так как $a_i \in \{-1, 1\}$, то из $[a_i]H$ легко находится a_i .

После этого центр T вычисляет $S = \sum_{i=1}^n a_i$ и публикует итог голосования S . Поскольку все бюллетени находятся в некотором хранилище данных, то любой избиратель, а также всякий сторонний наблюдатель может вычислить

$$A = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n [k_i]G, \quad B = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n ([k_i]Y + [a_i]H).$$

Обозначим $C = \sum_{i=1}^n [k_i]Y$. При этом $C = [x]A$. Если центр правильно подсчитал голоса, то должно выполняться равенство $[S]H = \sum_{i=1}^n [a_i]H$. Поэтому, если из B вычесть $[S]H$, то должно получиться значение C . Пусть $\tilde{C} = B - [S]H$. Проверяющий не знает значения C и не может самостоятельно выяснить, верно ли, что $C = \tilde{C}$. Но при этом нетрудно проверить, что должно выполняться равенство $\tilde{C} = [x]A$. Поэтому проверяющий может потребовать от центра доказательство следующего факта: в группе точек эллиптической кривой дискретный логарифм \tilde{C} по основанию A равен дискретному логарифму Y по основанию G .

Приведем модификацию протокола Шаума и Педерсена [4,5] доказательства данного факта на эллиптических кривых.

1. Доказывающий случайным образом выбирает k , $0 < k < q$, вычисляет $R_1 = [k]G$, $R_2 = [k]A$ и передает R_1, R_2 проверяющему.
2. Проверяющий генерирует случайное число a , $0 \leq a < q$, которое передает доказывающему.



3. Доказывающий вычисляет $s = k + ax \pmod{q}$ и передает s проверяющему.

4. Проверяющий убеждается, что $[s]G = R_1 + [a]Y$ и $[s]A = R_2 + [a]\tilde{C}$.

Таким образом, центр T может доказать утверждение $\tilde{C} = [x]A$ каждому желающему.

2. МОДИФИКАЦИЯ ПРОТОКОЛА КРАМЕРА – ФРАНКЛИНА – ШОНМЕЙКЕРСА – ЯНГА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Рассмотрим более сложный протокол электронного голосования [6, 7]. Задача ставится следующим образом. Пусть в голосовании участвуют n избирателей P_1, \dots, P_n , которые являются абонентами некоторой сети и подают свои голоса в электронной форме: «за» и «против», которые соответственно представимы значениями 1 и -1 . Имеется m счетных комиссий, которые создаются для обеспечения анонимности и предотвращения фальсификации итогов голосования. К протоколу предъявим следующие требования: 1) голосуют только уполномоченные избиратели; 2) любой участник имеет право отдать не более одного голоса; 3) ни один из участников не может знать, как проголосовал другой; 4) никто не может дублировать чужой голос; 5) конечный результат будет подсчитан корректно; 6) любой желающий может проверить правильность результата; 7) протокол должен работать и в тех случаях, когда некоторые участники ведут себя нечестно.

Приведем модификацию протокола, предложенного в 1996 г. [6], на эллиптических кривых. Сначала каждая комиссия фиксирует закрытый ключ и публикует открытый ключ.

Пусть E — эллиптическая кривая над некоторым конечным полем F , q — некоторый достаточно большой простой делитель числа $|E|$, G — некоторая точка эллиптической кривой, имеющая порядок q , $H = [u]G$ для некоторого $0 < u < q$, причем нахождение значения u по известному H должно являться трудной задачей.

1. Заполнение бюллетеня избирателями

1.1. Избиратель P_i выбирает голос $a_i \in \{-1, 1\}$ и случайный элемент $k_i \in \mathbb{Z}_q$. Затем он публикует свидетельство

$$R_{0i} = [k_i]G + [a_i]H, \quad i = 1, \dots, n,$$

скрывающего поданный им голос (битовое обязательство). В результате в общем доступе будут свидетельства всех участников R_{01}, \dots, R_{0n} .

1.2. Также каждый избиратель P_i выполняет автономную версию протокола доказательства знания следующим образом. Для краткости обозначим $b = a_i$, $R_0 = R_{0i}$. P_i выбирает случайные элементы $0 < d, z, w < q$, вычисляет

$$R_1 = \begin{cases} [z]G + [-d](R_0 + H), & b = 1, \\ [w]G, & b = -1, \end{cases}$$

$$R_2 = \begin{cases} [w]G, & b = 1, \\ [z]G + [-d](R_0 - H), & b = -1 \end{cases}$$

и находит значение хеш-функции $a = h(R_0, R_1, R_2) \pmod{q}$. После этого P_i вычисляет четверку значений

$$(d_1, d_2, s_1, s_2) = \begin{cases} (d, \tilde{d}, z, \tilde{z}), & b = 1, \\ (\tilde{d}, d, \tilde{z}, z), & b = -1, \end{cases}$$



где $\tilde{d} = a - d \pmod{q}$, $\tilde{z} = w + k\tilde{d} \pmod{q}$. Затем избиратель P_i публикует значения (R_0, R_1, R_2) , a , (d_1, d_2, s_1, s_2) . Любой желающий может осуществить проверку корректного голосования участника P_i . Для этого проверяются равенства:

$$a = d_1 + d_2 \pmod{q}, \quad [s_1]G = R_1 + [d_1](R_0 + H), \quad [s_2]G = R_2 + [d_2](R_0 - H).$$

2. Передача бюллетеней комиссиям. Для передачи бюллетеней с голосами избирателей счетным комиссиям используется совершенная проверяемая схема разделения секрета Педерсена – Шамира [8]: i -й избиратель выбирает два многочлена над полем \mathbb{Z}_q степени T , $0 < T < m$:

$$\begin{aligned} U_i(x) &= k_i + k_{1i}x + \dots + k_{Ti}x^T \in \mathbb{Z}_q[x], \\ V_i(x) &= a_i + a_{1i}x + \dots + a_{Ti}x^T \in \mathbb{Z}_q[x], \end{aligned}$$

где коэффициенты k_{ji} , a_{ji} — случайные числа из \mathbb{Z}_q , $1 \leq j \leq T$. Значения $(x_j, y_{ij}, z_{ij}) = (x_j, U_i(x_j), V_i(x_j))$, $x_j \in \mathbb{Z}_q^*$, попарно различны, $j = 1, \dots, m$, являются долями $(m, T + 1)$ пороговой схемы разделения секрета (k_i, a_i) . Здесь значение T определяется тем, что если не произошло никакого сговора более чем в T избирательных комиссиях, то невозможно вычислить, как голосовал отдельный участник. В то же время выборы будут успешны, если, по крайней мере, $T + 1$ избирательных комиссий действуют правильно.

Также для данных коэффициентов P_i вычисляет проверочные значения:

$$B_{i0} = [k_i]G + [a_i]H, \quad B_{i1} = [k_{1i}]G + [a_{1i}]H, \quad \dots, \quad B_{iT} = [k_{Ti}]G + [a_{Ti}]H,$$

которые публикуются в открытом доступе. Заметим, что значение $B_{i0} = [k_i + ua_i]G$ зависит от случайного числа k_i . Поэтому даже если кто-то и сможет вычислить значения u и $k_i + ua_i$ (решив задачу дискретного логарифмирования), то это не даст ему никакой информации о значении a_i . Заметим, что свойство совершенности играет очень важную роль при защите информации [9, 10].

Избиратель P_i шифрует значения (x_j, y_{ij}, z_{ij}) на открытом ключе j -й избирательной комиссии, после чего ей передаются полученные значения, $j = 1, \dots, m$. j -я комиссия после расшифрования и восстановления значений (x_j, y_{ij}, z_{ij}) делает проверку

$$[y_{ij}]G + [z_{ij}]H = B_{i0} + [x_j]B_{i1} + \dots + [x_j^T]B_{iT}.$$

Итак, каждая счетная комиссия имеет следующие наборы:

$$\begin{aligned} 1 : & (x_1, y_{11}, z_{11}), \quad \dots, \quad (x_1, y_{n1}, z_{n1}), \\ & \dots \\ m : & (x_m, y_{1m}, z_{1m}), \quad \dots, \quad (x_m, y_{nm}, z_{nm}). \end{aligned}$$

3. Подсчет голосов. Каждая j -я комиссия подсчитывает и публикует значения

$$y_j = \sum_{i=1}^n y_{ij}, \quad z_j = \sum_{i=1}^n z_{ij}.$$

Теперь каждый желающий может проверить корректность опубликованных данных, проверив равенства:

$$\sum_{i=1}^n \left(R_{0i} + \sum_{l=1}^T [x_j^l] B_{il} \right) = [y_j]G + [z_j]H, \quad j = 1, \dots, m,$$



так как

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(R_{0i} + \sum_{l=1}^T [x_j^l] B_{il} \right) &= \sum_{i=1}^n \left([k_i]G + [a_i]H + \sum_{l=1}^T [x_j^l] ([k_{li}]G + [a_{li}]H) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n ([k_i + k_{1i}x_j + \dots + k_{Ti}x_j^T]G + [a_i + a_{1i}x_j + \dots + a_{Ti}x_j^T]H) = \\ &= \sum_{i=1}^n ([U_i(x_j)]G + [V_i(x_j)]H) = \sum_{i=1}^n ([y_{ij}]G + [z_{ij}]H) = [y_j]G + [z_j]H. \end{aligned}$$

Заметим, что для любого $j = 1, \dots, m$ значение z_j является значением некоторого многочлена над полем \mathbb{Z}_q степени не более T :

$$z_j = \sum_{i=1}^n z_{ij} = \sum_{i=1}^n V_i(x_j) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n a_{1i} \right) x_j + \dots + \left(\sum_{i=1}^n a_{Ti} \right) x_j^T.$$

Поэтому для определения итога голосования $\sum_{i=1}^n a_i$ достаточно в множестве пар точек $\{(x_1, z_1), \dots, (x_m, z_m)\}$ выделить любое $(T+1)$ -элементное подмножество $\{(\tilde{x}_0, \tilde{z}_0), \dots, (\tilde{x}_T, \tilde{z}_T)\}$ и вычислить

$$\sum_{i=0}^T \tilde{z}_i \prod_{\substack{0 \leq j \leq T \\ j \neq i}} \frac{\tilde{x}_j}{\tilde{x}_j - \tilde{x}_i} = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Библиографический список

1. *Hankerson D., Menezes A., Vanstone S.* Guide to Elliptic Curve Cryptography. N.Y. : Springer-Verlag, 2004. 358 p.
2. An Elliptic Curve Cryptography (ECC) Primer: why ECC is the next generation of public key cryptography. The Certicom Corp. 'Catch the Curve' White Paper Series, June 2004. 24 p. URL: <https://www.certicom.com/content/dam/certicom/images/pdfs/WP-ECCprimer.pdf> (дата обращения: 05.09.2017)
3. Введение в криптографию / под общ. ред. В. В. Яценко. М. : МЦНМО, 2012. 348 с.
4. *Chaum D., Pedersen T. P.* Wallet databases with observers // Proc. Crypto'92. Lect. Notes in Comput. Sci. 1993. Vol. 740. P. 89–105.
5. *Cramer R., Gennaro R., Schoenmakers B.* A secure and optimally efficient multi-authority election scheme // Proc. EUROCRYPT'97. Lect. Notes in Comput. Sci. 1997. Vol. 1233. P. 103–118.
6. *Cramer R., Franklin M., Schoenmakers B., Yung M.* Multi-Authority Secret-Ballot Elections with Linear Work // Proc. EUROCRYPT'96. Lect. Notes in Comput. Sci. 1996. Vol. 1070. P. 72–83.
7. Черемушкин А. В. Криптографические протоколы. Основные свойства и уязвимости. М. : Академия, 2009. 272 с.
8. *Pedersen T. P.* Non-interactive and information-theoretic secure verifiable secret sharing // Proc. EUROCRYPT'91. Lect. Notes in Comput. Sci. 1992. Vol. 576. P. 129–140.
9. *Зубов А. Ю.* Криптографические методы защиты информации. Совершенные шифры. М. : Гелиос АРВ, 2005. 192 с.
10. *Рацев С.М.* Некоторые обобщения теории Шеннона о совершенных шифрах // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2015. Т. 8, № 1. С. 111–127.



Образец для цитирования:

Рацеев С. М., Череватенко О. И. О применении эллиптических кривых в некоторых протоколах электронного голосования // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 62–68. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-62-68.

On Application of Elliptic Curves in Some Electronic Voting Protocols

S. M. Ratseev, O. I. Cherevatenko

Sergey M. Ratseev, <https://orcid.org/0000-0003-4995-9418>, Ulyanovsk State University, 42, Lev Tolstoy Str., Ulyanovsk, Russia, 432017, ratseevsm@mail.ru

Olga I. Cherevatenko, <https://orcid.org/0000-0003-3931-9425>, Ulyanovsk State I. N. Ulyanov Pedagogical University, 4, Ploshchad' 100-letiya so dnya rozhdeniya V. I. Lenina, Ulyanovsk, Russia, 432063, chai@pisem.net

Electronic voting protocols allow us to carry out voting procedure in which ballots exist only electronically. These protocols provide the secret nature of vote. The main property of electronic voting protocols is the universal checkability, i.e. provision of an opportunity to any person interested, including detached onlookers to check correctness of counting of votes at any moment. In operation cryptography protocols of electronic vote of Shauma – Pederson and Kramera – Franklin – Shoyenmeykersa – Yunga are considered. These protocols are provided on the basis of elliptic curves which application allows us to reduce considerably the sizes of parameters of protocols and to increase their cryptography firmness. Primary benefit of elliptic cryptography is that any subexponential algorithm of the decision of the task of the discrete logarithming in group of points of an elliptic curve is not known at the moment.

Key words: electronic voting protocol, bit obligation, diagram of division of a secret.

References

1. Hankerson D., Menezes A., Vanstone S. *Guide to Elliptic Curve Cryptography*. New York, Springer-Verlag, 2004. 358 p.
2. *An Elliptic Curve Cryptography (ECC) primer : Why ECC is the next generation of public key cryptography*. The Certicom Corp. 'Catch the Curve' White Paper Series, June 2004. 24 p. Available at: <https://www.certicom.com/content/dam/certicom/images/pdfs/WP-ECCprimer.pdf> (Accessed 5 September 2017).
3. *Vvedenie v kriptografiyu* [Introduction to cryptography]. Under a general edition of V. V. Yashchenko. Moscow, MTsNMO Publ., 2012. 348 p. (in Russian).
4. Chaum D., Pedersen T. P. Wallet databases with observers. *Proc. Crypto'92. Lect. Notes in Comput. Sci.*, 1993, vol. 740, pp. 89–105.
5. Cramer R., Gennaro R., Schoenmakers B. A secure and optimally efficient multi-authority election scheme. *Proc. EUROCRYPT'97. Lect. Notes in Comput. Sci.*, 1997, vol. 1233, pp. 103–118.
6. Cramer R., Franklin M., Schoenmakers B., Yung M. Multi-Authority Secret-Ballot Elections with Linear Work. *Proc. EUROCRYPT'96. Lect. Notes in Comput. Sci.*, 1996, vol. 1070, pp. 72–83.
7. Cheremushkin A. V. *Kriptograficheskie protokoly. Osnovnye svoistva i uiazvimosti* [Cryptography protocols. Main properties and vulnerabilities]. Moscow, Academy, 2009. 272 p. (in Russian).
8. Pedersen T. P. Non-interactive and information-theoretic secure verifiable secret sharing. *Proc. EUROCRYPT'91. Lect. Notes in Comput. Sci.*, 1992, vol. 576, pp. 129–140.



9. Zubov A. Yu. *Kriptograficheskie metody zashhity informacii. Sovershennyye shifry* [Cryptographic Methods of Information Security. Perfect ciphers]. Moscow, Gelios ARV, 2005. 192 p. (in Russian).
10. Ratseev S. M. Some generalizations of Shannon's theory of perfect ciphers. *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.* [Bulletin of the South Ural State University, Ser. : Mathematical Modelling, Programming and Computer Software], 2015, vol. 8, no. 1, pp. 111–127 (in Russian).

Cite this article as:

Ratseev S. M., Cherevatenko O. I. On Application of Elliptic Curves in Some Electronic Voting Protocols. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 62–68 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-62-68.



МЕХАНИКА

Bending of a Sandwich Beam by Local Loads in the Temperature Field

E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko

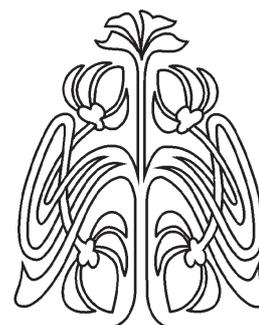
Eduard I. Starovoitov, <https://orcid.org/0000-0002-2550-5377>, Belarusian State University of Transport, 246653, Belarus, Gomel, Kirova Str., 34, edstar0@yandex.by

Denis V. Leonenko, <https://orcid.org/0000-0001-8003-9279>, Belarusian State University of Transport, 246653, Belarus, Gomel, Kirova Str., 34, leoden@tut.by

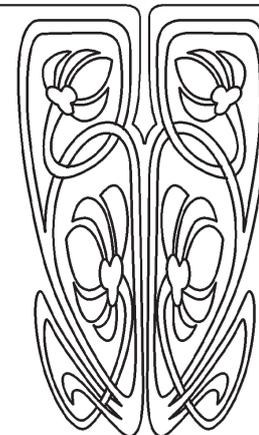
Deformation of sandwich beam in a temperature field under the action of uniformly distributed and sinusoidal local loads is considered. An analytical view of the loads was set by using functions of Heaviside. To describe kinematic properties of an asymmetric through thickness of sandwich beam we have accepted the hypotheses of a broken line as follows: Bernoulli's hypothesis is true in the thin bearing layers; Timoshenko's hypothesis is true in the compressible through thickness filler with a linear approximation of displacements through the layer thickness. The kinematic conditions of simply supported faces of the beam on the immovable in space rigid bases are presumed on the boundary. The filler's work is taken into account in the tangential direction. Temperature variations were calculated by the formula obtained from averaging thermophysical properties of the materials of the layers through the beam thickness. Stress and strain are related by relations of the deformation theory of plasticity. By the variational method a system of differential equilibrium equations has been derived. The solution of the boundary value problem of thermo-elastoplasticity is reduced to the search for four functions, namely: deflections and lengthwise displacements of the medial surfaces of the bearing layers. An analytical solution has been derived by the method of elastic solutions. In the case of repeated alternating loading solution using Moskvitin theorem received. Numerical analysis of solutions is performed for a continuous, locally distributed and repeated alternating loads. The graphs of stresses and displacements in sandwich beam under the isothermal and thermal-force loads are given.

Key words: local uniformly distributed and sinusoidal loads, sandwich elastic-plastic beam, compressible filler, temperature field.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





INTRODUCTION

In recent years, a considerable increase in the demand for the use of layered thin-walled structural elements in aircraft-, rocket-, machine-, instrument- and shipbuilding, mining and transportation of energy. This necessitates the development of mathematical models and methods of their calculation on various types of loads.

In monographs [1,2], various mathematical models of static and dynamic deformation of multilayered and three-layer structural elements are considered, statements of boundary-problems are given, and methods for their calculation are presented. The isothermal dynamic deformation of layered (three-layer) structural elements, including those connected to an elastic foundation, under the action of continuous and local loads are investigated in [3–11]. The statements and solution methods of boundary-value problems on isothermal deformations, including cyclic ones, of elastoplastic composite structural elements are presented in [12–19].

In the present work, the statement and an analytical solution of a boundary-value problem on the cyclic local thermal-force deformation of a three-layer elastoplastic beam of rectangular cross section with a compressible filler are given. The account of compressibility allows one to describe the deformation of three-layer beams at thermal-force loadings more adequately. From the mathematical point of view, this complicates the problem and increases the numbers of required functions and equilibrium equations. A numerical test of the solution obtained is performed in the case of a metal-polymer beam.

1. STATEMENT OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM

Let us consider a three-layer beam asymmetric across its thickness (Fig. 1). For its isotropic load-carrying layers, the Bernoulli hypotheses are assumed. On contact borders, displacements are considered continuous. Materials of the load-carrying layers

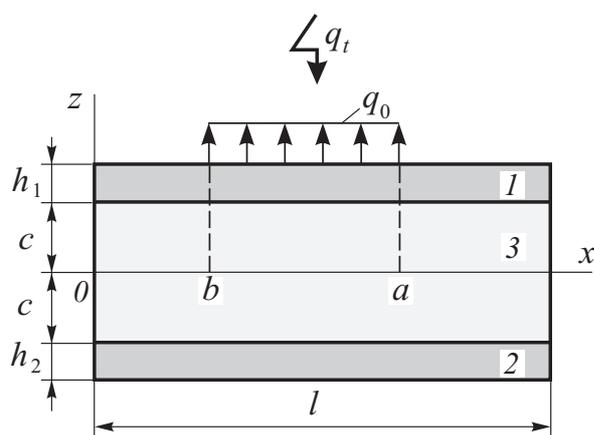


Fig. 1. Design diagram of a three-layer beam with a compressible filler: 1, 2 – load-carrying layers; 3 – filler

are incompressible in the thickness direction, compression of the filler is taken into account, and strains are small. A system of coordinates x , y , and z is connected to the median plane of filler. A surface load $q(x)$ and a thermal flow of intensity q_t , directed perpendicularly to the load-carrying layer 1 operate on the beam. At its end faces, in the first and second load-carrying layers, forces $N_p^{(1)}$, $Q_p^{(1)}$, $M_p^{(1)}$, $N_p^{(2)}$, $Q_p^{(2)}$ and $M_p^{(2)}$ can be given; the subscript p takes the values 0 and 1, specifying the end face on which the forces are given; $w_k(x)$ and $u_k(x)$

are the deflections and longitudinal displacements of median surfaces of the load-carrying layers; h_k is thickness of a k th layer; $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$ is the layer number); b_0 is width of the beam.

The surface $e z = -c - h_2$ and contour of the beam are thermally insulated. The solution of the heat conduction equation is found by the method of averaging the



thermophysical characteristics of materials across the thickness of the package of a plate. This allows one to calculate the nonuniform temperature field $T(z)$, measured from some reference temperature T_0 , by the formula [2]:

$$T = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

$$\tau = \frac{at}{H^2}, \quad a = \frac{\sum_{k=1}^3 \lambda_{tk} h_k}{\sum_{k=1}^3 \rho_k C_k h_k}, \quad H = \sum_{k=1}^3 h_k.$$

where λ_{tk} , C_k , and ρ_k are the heat conductivity, heat capacity, and density of the material of a k th layer, respectively.

The displacements $u^{(k)}(x, z)$ and $w^{(k)}(x, z)$ of layers can be expressed in terms of four required functions $w_1(x)$, $u_1(x)$, $w_2(x)$, and $u_2(x)$ — deflections and longitudinal displacements of median surfaces of the load-carrying layers and filler:

— in the load-carrying layers

$$u^{(1)} = u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}, \quad w^{(1)} = w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u^{(2)} = u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}, \quad w^{(2)} = w_2 \quad (c - h_2 \leq z \leq c);$$

— in the filler

$$u^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right),$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \quad (c - h_2 \leq z \leq c), \quad (2)$$

where z is the coordinate of the fiber considered, the comma in subscripts designates differentiation with respect to the coordinate following it.

Components of the stress tensor follow from (2) and Cauchy relations [2]. The internal forces in layers are expressed as

$$N_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz, \quad M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz,$$

$$N_z^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)} dz, \quad M_{xz}^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z dz, \quad (3)$$

where $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$ and $\sigma_{zz}^{(3)}$ are components of the stress tensor.

Further, we accept the kinematic boundary conditions of simple support for end faces of the beam on spatially motion-less rigid supports. Then, in the cross sections $x = 0, l$ (l is length of the beam), the following requirements have to be obeyed:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (4)$$



In layers of the core, the following physical equations of state, corresponding to the Ilyushin theory of small elasto-plastic deformations, with account of temperature, a valid:

$$s_i^{(k)} = 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_i^{(k)}, T_k))e_i^{(k)}, \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3(1 - \omega_3(\varepsilon_i^{(3)}, T_k))e_{xz}^{(3)},$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T_k) \quad (i = x, z; \quad k = 1, 2, 3) \quad (5)$$

where $s_i^{(k)}$, $e_i^{(k)}$, and $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ are the deviatoric and spherical parts of stress and strain tensors; $s_{xz}^{(3)}$ and $e_{xz}^{(3)}$ are the shear stresses and strains in the filler; $G_k(T_k)$ and $K_k(T_k)$ are temperature-dependent elastic moduli of the material of a k th layer, calculated by the linear Bell formula [2]; $\omega^{(k)}(e_i^{(k)}, T_k)$ is a temperature-dependent nonlinearity (plasticity) function [2]; $\varepsilon_i^{(k)}$ is the intensity of strains; α_{0k} is the coefficient of linear thermal expansion; T_k is temperature in a k th layer.

The equilibrium equations in displacements for the beam considered are found by the Lagrange variational method. It will not be different from that given in [16]. The difference lies in the nonlinear member, which will contain thermal components instead of radiation.

To solve such boundary-value problems, approximate or numerical methods have to be used. Each of them have its own advantages and drawbacks. The approximate methods, such as the method of elastic solution, are convenient if the analytical solution of a corresponding problem of elastic theory are known and boundary conditions rather simple, for example, rigid fixation or hinged supporting. In other cases, more preferable are numerical methods.

In the case considered, the solution of the corresponding problem of the elasticity theory is known, therefore, we use the method of elastic solution, which allows one to present it in the following iterative form:

$$a_1 u_1^n - a_1 u_2^n - a_4 u_1^{n,xx} - a_5 u_2^{n,xx} + a_2 w_1^{n,x} + a_3 w_2^{n,x} - 2a_6 w_1^{n,xxx} + a_7 w_2^{n,xxx} = p_\omega^{(n-1)},$$

$$-a_1 u_1^n + a_1 u_2^n - a_5 u_1^{n,xx} - a_9 u_2^{n,xx} - a_{10} w_1^{n,x} - a_{17} w_2^{n,x} - a_6 w_1^{n,xxx} + 2a_7 w_2^{n,xxx} = h_\omega^{(n-1)},$$

$$-a_2 u_1^{n,x} + a_{10} u_2^{n,x} + 2a_6 u_1^{n,xxx} + a_6 u_2^{n,xxx} + a_{11} w_1^{n,xx} - a_{12} w_2^{n,xx} +$$

$$+ a_{15} w_1^{n,xxx} - a_{16} w_2^{n,xxx} + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n = q + q_\omega^{(n-1)},$$

$$-a_3 u_1^{n,x} + a_{17} u_2^{n,x} - a_7 u_1^{n,xxx} - 2a_7 u_2^{n,xxx} - a_{12} w_1^{n,xx} + a_{14} w_2^{n,xx} -$$

$$-a_{16} w_1^{n,xxx} + a_{13} w_2^{n,xxx} - a_8 w_1^n + a_8 w_2^n = g_\omega^{(n-1)}. \quad (6)$$

where n is the number of linear approximation. The temperature terms q_t and coefficients a_1, \dots, a_{17} are determined considering the temperature dependence of the elastic parameters of materials across the package thickness:

$$q_t = -\frac{H_2^t}{b_0} = -\frac{N_z^{(3)t}}{2cb_0}, \quad a_1 = \frac{L_0(G_3)}{4c^2},$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} + \frac{L_1(G_3)}{4c^2} - \frac{L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2},$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} - \frac{L_1(G_3)}{4c^2} + \frac{L_0(K_3^-)}{4c} + \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2},$$



$$\begin{aligned}
 a_4 &= L_0(K_1^+) + \frac{L_1(K_3^+)}{2c} + \frac{L_0(K_3^+)}{4} + \frac{L_2(K_3^+)}{4c^2}, & a_5 &= \frac{L_0(K_3^+)}{4} - \frac{L_2(K_3^+)}{4c^2}, \\
 a_6 &= \frac{L_1(K_1^+)}{2} - \frac{L_0(K_1^+)}{2} \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + \frac{h_1 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_1 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_1 L_2(K_3^+)}{16c^2}, \\
 a_7 &= \frac{h_2}{8c^2} (c^2 L_0(K_3^+) - L_2(K_3^+)), & a_8 &= \frac{L_0(K_3^+)}{4c^2}, \\
 a_9 &= L_0(K_2^+) - \frac{L_1(K_3^+)}{2c} + \frac{L_0(K_3^+)}{4} + \frac{L_2(K_3^+)}{4c^2}, \\
 a_{10} &= \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{L_0(G_3)}{4c} + \frac{L_1(G_3)}{4c^2} + \frac{L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2}, \\
 a_{11} &= \frac{h_1 L_0(K_3^-)}{4c} + \frac{h_1 L_1(K_3^-)}{4c^2} - \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right)^2 \frac{L_0(G_3)}{4} - \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{L_1(G_3)}{2c} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2}, \\
 a_{12} &= \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{L_0(G_3)}{4} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2} + \frac{L_1(K_3^-)}{8c^2} (h_1 - h_2) + \\
 &\quad + \frac{L_0(K_3^-)}{8c} (h_1 + h_2) - \frac{L_1(G_3)}{8c^2} (h_1 - h_2), \\
 a_{13} &= L_2(K_2^+) + L_1(K_2^+) \left(c + \frac{h_2}{2} \right) - \frac{h_2^2 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_2^2 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_2^2 L_2(K_3^+)}{16c^2}, \\
 a_{14} &= \frac{h_2 L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{h_2 L_1(K_3^-)}{4c^2} - \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right)^2 \frac{L_0(G_3)}{4} + \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{L_1(G_3)}{2c} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2}, \\
 a_{15} &= L_2(K_1^+) - L_1(K_1^+) \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + \frac{h_1^2 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_1^2 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_1^2 L_2(K_3^+)}{16c^2}, \\
 a_{16} &= \frac{h_1 h_2}{16c^2} (c^2 L_0(K_3^+) - L_2(K_3^+)), \\
 a_{17} &= \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{L_0(G_3)}{4c} - \frac{L_1(G_3)}{4c^2} - \frac{L_0(K_3^-)}{4c} + \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2}, \\
 L_n(f_k(z)) &\equiv \int_{h_k} f_k(z) z^n dz \quad (n = 0, 1, 2), \quad K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k.
 \end{aligned}$$

At the first step of approximation, the nonlinear terms in the additional loads $p_\omega^{(n-1)}$, $h_\omega^{(n-1)}$, $q_\omega^{(n-1)}$ and $g_\omega^{(n-1)}$ assumed equal to zero ($\omega_k^{(1)} = 0$) and further are calculated from results of the previous iteration:

$$\begin{aligned}
 p_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} \left(H_1^{\omega(n-1)} - P_1^{\omega(n-1)}, x \right), & h_\omega^{n-1} &= \frac{1}{b_0} \left(H_1^{\omega(n-1)} + P_2^{\omega(n-1)}, x \right), \\
 q_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} \left(S_1^{\omega(n-1)}, xx + H_2^{\omega(n-1)} - T_1^{\omega(n-1)}, x \right), \\
 g_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} \left(S_2^{\omega(n-1)}, xx - H_2^{\omega(n-1)} - T_2^{\omega(n-1)}, x \right), \tag{7}
 \end{aligned}$$



where, nonlinear and thermal components of the internal forces in layers [3]

$$H_1^{\omega(n-1)} = \frac{Q^{(3)\omega(n-1)}}{2c}, \quad T_1^\omega = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c},$$

$$H_2^{\omega(n-1)} = \frac{N_z^{(3)\omega(n-1)}}{2c}, \quad T_2^{\omega(n-1)} = \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c},$$

$$S_1^{\omega(n-1)} = \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_x^{(1)\omega(n-1)} - M_x^{(1)\omega(n-1)} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)\omega(n-1)},$$

$$S_2^{\omega(n-1)} = -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_x^{(2)\omega(n-1)} - M_x^{(2)\omega(n-1)} - \frac{h_2}{4} N_x^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)\omega(n-1)},$$

$$P_1^\omega = \frac{N_x^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_x^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_x^{(1)\omega(n-1)},$$

$$P_2^{\omega(n-1)} = \frac{N_x^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_x^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_x^{(2)\omega(n-1)},$$

$$N_x^{(k)\omega(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 G_k \int_{h_k} [\varepsilon_x^{(k)} \omega_k]^{(n-1)} dz + 3b_0 K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T_k dz,$$

$$M_x^{(k)\omega(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 G_k \int_{h_k} [\varepsilon_x^{(k)} \omega_k z]^{(n-1)} dz + 3b_0 K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T_k z dz,$$

$$N_x^{(3)\omega(n-1)} = \frac{2}{3} b_0 G_3 \int_{h_3} [(2\varepsilon_x^{(3)} - \varepsilon_z^{(3)}) \omega_3]^{(n-1)} dz + 3b_0 K_3 \alpha_{03} \int_{h_3} T_3 dz,$$

$$N_z^{(3)\omega(n-1)} = \frac{2}{3} b_0 G_3 \int_{h_3} [(2\varepsilon_z^{(3)} - \varepsilon_x^{(3)}) \omega_3]^{(n-1)} dz + 3b_0 K_3 \alpha_{03} \int_{h_3} T_3 dz,$$

$$M_x^{(3)\omega(n-1)} = \frac{2}{3} b_0 G_3 \int_{h_3} [(2\varepsilon_x^{(3)} - \varepsilon_z^{(3)}) \omega_3]^{(n-1)} z dz + 3b_0 K_3 \alpha_{03} \int_{h_3} T_3 z dz,$$

$$Q^{(3)\omega(n-1)} = 2b_0 G_3 \int_{h_3} [\varepsilon_{xz}^{(3)} \omega_3]^{(n-1)} dz, \quad M_{xz}^{(3)\omega(n-1)} = 2b_0 G_3 \int_{h_3} [\varepsilon_{xz}^{(3)} \omega_3]^{(n-1)} z dz \quad (k=1, 2).$$

Then, boundary conditions (4) become

$$w_k^n = u_{k,x}^n = w_{k,xx}^n = 0. \tag{8}$$

Application of the method of thermo-elastic formulated allows on, at each step of approximation, to reduce the nonlinear boundary-value problem on thermoplastic bending of the beam to the corresponding linear (6) with additional loads (7). As a first approximation, we will take an analytical or numerical solution of the thermo-elasticity problem for the beam considered.



2. ANALYTICAL SOLUTION

The solution of the system of differential equations (6) is sought in the form of trigonometric series, satisfying boundary conditions (8) automatically:

$$\begin{aligned} u_1^n &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}^n \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & u_2^n &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}^n \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \\ w_1^n &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}^n \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & w_2^n &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m}^n \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \end{aligned} \quad (9)$$

where U_{1m}^n , U_{2m}^n , W_{1m}^n , W_{2m}^n are the displacement amplitudes required.

The transverse load and additional forces in layers of the beam are also presented in the form of trigonometric series:

$$\begin{aligned} q &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & q_m &= \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx, \\ q_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} q_{\omega m}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & q_{\omega m}^{n-1} &= \frac{2}{l} \int_0^l q_{\omega}^{n-1}(x) \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx, \\ g_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} g_{\omega m}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & g_{\omega m}^{n-1} &= \frac{2}{l} \int_0^l g_{\omega}^{n-1}(x) \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx, \\ h_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} h_{\omega m}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & h_{\omega m}^{n-1} &= \frac{2}{l} \int_0^l h_{\omega}^{n-1}(x) \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx, \\ p_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} p_{\omega m}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & p_{\omega m}^{n-1} &= \frac{2}{l} \int_0^l p_{\omega}^{n-1}(x) \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Inserting displacements (9), additional forces (10) into equilibrium equation (6), we arrive at a system of linear algebraic equations for determining the displacement amplitudes U_{1m}^n , U_{2m}^n , W_{1m}^n and W_{2m}^n required:

$$\begin{cases} b_1 U_{1m}^n + b_2 U_{2m}^n + b_3 W_{1m}^n + b_4 W_{2m}^n = p_{\omega m}^{n-1}, \\ b_2 U_{1m}^n + b_5 U_{2m}^n + b_6 W_{1m}^n - b_7 W_{2m}^n = h_{\omega m}^{n-1}, \\ b_3 U_{1m}^n + b_6 U_{2m}^n + b_8 W_{1m}^n + b_9 W_{2m}^n = q_m + q_{\omega m}^{n-1}, \\ b_4 U_{1m}^n - b_7 U_{2m}^n + b_9 W_{1m}^n + b_{10} W_{2m}^n = g_{\omega m}^{n-1}, \end{cases} \quad (11)$$

where the coefficients b_i depend on the parameter m and temperature through the coefficients a_n , which are determined in (6):

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_4 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2, & b_2 &= -a_1 + a_5 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2, & b_3 &= a_2 \frac{\pi m}{l} + 2a_6 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^3, \\ b_4 &= a_3 \frac{\pi m}{l} - a_7 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^3, & b_5 &= a_1 + a_9 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2, & b_6 &= -a_{10} \frac{\pi m}{l} + a_6 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^3, \end{aligned}$$



$$b_7 = a_{17} \frac{\pi m}{l} + 2a_7 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^3, \quad b_8 = -a_{11} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 + a_{15} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^4 + a_8,$$

$$b_9 = a_{12} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 - a_{16} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^4 - a_8, \quad b_{10} = -a_{14} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 + a_{13} \left(\frac{\pi m}{l}\right)^4 + a_8.$$

The solution of system (11) can be presented in determinants or solved numerically. Then, using formulas (9), the required functions are calculated. Displacements in the load-carrying layers and filler follow from relations (2), strains — from Cauchy relations, and stresses — from (5).

3. BEAM IN THE TEMPERATURE FIELD (SINGLE LOADING)

Let the beam be subjected to a transverse load $q(x) = q_0 = \text{const}$. The coefficients of its expansion in series are

$$q_m = \frac{2q_0}{\pi m} (1 - \cos(\pi m)). \tag{12}$$

If the surface load is distributed uniformly on an interval $a \leq x \leq b$ (rectangular load), as on the Fig. 1, then its analytical form and expansion coefficients are

$$q(x) = q_0(H_0(b - x) - H_0(a - x)), \quad q_m = -\frac{2q_0}{\pi m} \left(\cos \frac{\pi mb}{l} - \cos \frac{\pi ma}{l} \right), \tag{13}$$

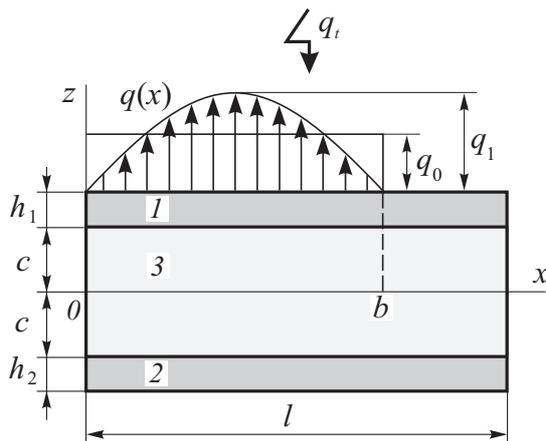


Fig. 2. Design diagram of a three-layer beam with a local sinusoidal loads

where $H_0(x)$ is the Heaviside function and q_0 is loading intensity.

Suppose that on the surface consider the beam acts locally distributed in the region $0 \leq x \leq b$ a sinusoidal load $q(x)$ (Fig. 2):

$$q(x) = q_0 H_0(b - x) \sin \left(\frac{\pi x}{b} \right). \tag{14}$$

Substituting the load (14) to the corresponding formula from (10), we obtain expressions for the coefficients q_m :

$$q_m = \frac{bq_0}{\pi} \left[\frac{1}{bm - l} \sin \frac{\pi(bm - l)}{l} - \frac{1}{bm + l} \sin \frac{\pi(bm + l)}{l} \right] \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Here should return $bm \neq l$, in order to avoid division by zero. If $m = p$, then

$$q_p = \frac{2q_0}{l} \int_0^l H_0(b - x) \left(\sin \frac{\pi px}{l} \right)^2 dx = \frac{q_0}{l} \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2\pi px}{l} \right) dx = \frac{q_0 b}{l}.$$

Determine the amplitude of the sinusoidal load, whose resultant is statically equivalent rectangular load acting on the same surface of the web. From the condition



of equality of the areas occupied by these loads will receive:

$$q'_0 = q_0 l \int_0^l \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2} \pi q_0.$$

Numerical results. The numerical realization of solution (6), (12)–(3) was carried out for a three-layer D16T–fluoroplastic–D16T beam, whose mechanical and thermo-plastical parameters are described in [2]. The relative thicknesses (to the length of beam) were assumed to be $h_1 = 0.04$, $h_2 = 0.02$ and $h_3 = 0.18$. The heat spent on heating the external metal layer was neglected owing to its thinness and small thermal capacity. Temperatures of the load carrying layers were assumed equal to that of the filler in the locations of their bonding: $T_1 = T_3(c, t)$, $T_2 = T_3(\sim c, t)$. The temperature field in the filler was calculated by formula (1), at $h_1 = 0$, $q_t = 5000 \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ at the instant of time $t = 60 \text{ min}$. The rated temperature on beam surface was 540 K. The intensity of load $q_0 = \sim 5 \text{ MPa}$. A function of plasticity was adopted in the form proposed in [16].

In Fig. 3 shows the change in deflections (a) and longitudinal displacements (b) in the first layer along the axis of an elastic beam under the action of the statically equivalent distributed loads ($b = 1$): 1 – rectangular; 2 – sinusoidal (both isothermal); 3 – sinusoidal temperature and force. Here, the maximum move more from a sinusoidal load. The difference between the curves under isothermal loading is 22 %. Thermal effects adds another 15 % to the deflection of the sinusoidal load.

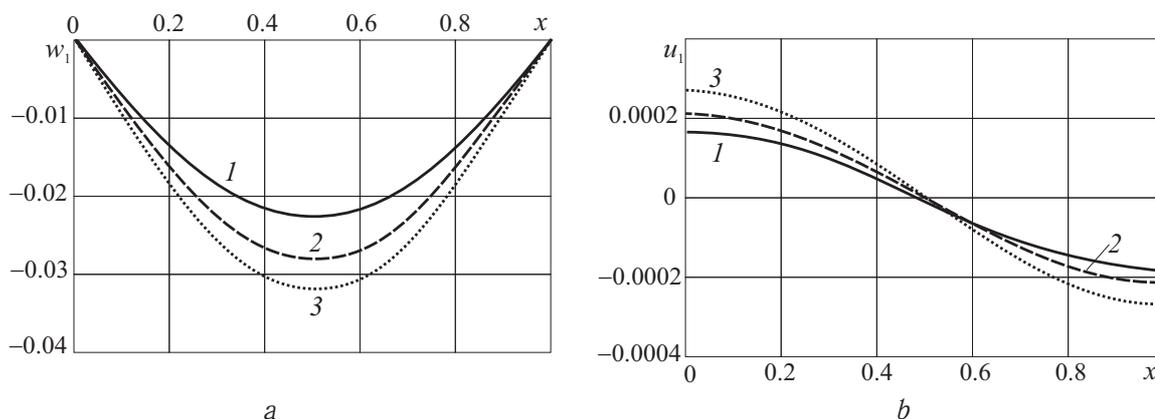


Fig. 3. Deflection w_1 (a) and longitudinal displacements u_1 (b) in the first layer along the axis of the statically equivalent distributed loads: 1 – rectangular; 2 – sinusoidal (both isothermal); 3 – sinusoidal temperature and force

4. SIGN-VARIABLE LOADING IN A TEMPERATURE FIELD

At a moment $t = t_1$, the beam is instantly unloaded and repeatedly loaded by forces p'' and q'' , of opposite sign, varying with the same law as in the loading from its natural state. These forces create the fields of displacements $u_1''(x)$, $w_1''(x)$, $u_2''(x)$, and $w_2''(x)$, strain $\varepsilon_x^{(k)}(x, z)$, $\varepsilon_z^{(3)}(x, z)$, and $\varepsilon_{xz}^{(3)}(x, z)$, and stresses $\sigma_x^{(k)}(x, z)$, $\sigma_z^{(3)}(x, z)$, and $\sigma_{xz}^{(3)}(x, z)$ in k th layer of the beam.

We assume that, during the unloading and subsequent variable loading, temperature of the body remains constant and coincides with the temperature at the moment of beginning of unloading at all its points, i.e., $T'(z) = T(z, t_1)$. The elastic moduli of layers materials are $G_k(z) \equiv G_k(T'(z))$, and $K_k(z) \equiv K_k(T'(z))$, and the corresponding loading trajectories fall into the class of simple ones according to Ilyushin [20].



For all the stress-strain states and loads considered, we introduce the following differences, in which the stresses, strains, displacements, and forces with one prime refer to the state before unloading, but those with two primes — to the second loading halfcycle:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)*} &= \sigma_x^{\prime(k)} - \sigma_x^{\prime\prime(k)}, & \sigma_z^{(3)*} &= \sigma_z^{\prime(3)} - \sigma_z^{\prime\prime(3)}, & \sigma_{xz}^{(3)*} &= \sigma_{xz}^{\prime(3)} - \sigma_{xz}^{\prime\prime(3)}, & \varepsilon_x^{(k)*} &= \varepsilon_x^{\prime(k)} - \varepsilon_x^{\prime\prime(k)}, \\ \varepsilon_z^{(3)*} &= \varepsilon_z^{\prime(3)} - \varepsilon_z^{\prime\prime(3)}, & \varepsilon_{xz}^{(3)*} &= \varepsilon_{xz}^{\prime(3)} - \varepsilon_{xz}^{\prime\prime(3)}, & u_1^* &= u_1' - u_1'', & w_1^* &= w_1' - w_1'', \\ u_2^* &= u_2' - u_2'', & w_2^* &= w_2' - w_2'', & q^* &= q' - q'' \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (15)$$

For the stresses and strains in (15) marked by an asterisk, we assume the following physical equations of state (5):

$$\begin{aligned} s_i^{(k)*} &= 2G_k(1 - \omega^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)*}, T_k))e_i^{(k)*}, & s_{xz}^{(3)*} &= 2G_3(1 - \omega^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)*}, T_k))e_{xz}^{(3)*}, \\ \sigma^{(k)*} &= 3K_k(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T_k) \quad (i = x, z; \quad k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (16)$$

According to the Moskvitin theory [21], the universal nonlinearity functions $\omega^{(k)}$ in the load-carrying layers (16) are expressed in terms of plasticity function loading from the natural state:

$$\omega^{(k)*} = \omega^{\prime(k)}(\varepsilon_u^{(k)*}, \varepsilon_y^{(k)*}, T_1, A_{1k}^*, \alpha_{1k}^*), \quad \omega^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)}, T_1) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)*} \leq \varepsilon_y^{(k)*}, \\ 1, & \varepsilon_u^{(k)*} > \varepsilon_y^{(k)*}. \end{cases}$$

The physical nonlinearity of filler at the second loading half-cycle, in view of absence of residual strains from it, is still described by relations (7). As a result, we have

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(3)*} &= 2\sigma_{\alpha\beta}^{\prime(3)}, & s_{\alpha\beta}^{(3)*} &= 2s_{\alpha\beta}^{\prime(3)}, & \sigma^{(3)*} &= 2\sigma^{\prime(3)}, \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^{(3)*} &= 2\varepsilon_{\alpha\beta}^{\prime(3)}, & \varepsilon_{\alpha\beta}^{(3)*} &= 2\varepsilon_{\alpha\beta}^{\prime(3)}, & \varepsilon^{(3)*} &= 2\varepsilon^{\prime(3)}. \end{aligned}$$

Repeating the procedure of derivation of equations of equilibrium for values with asterisks, will come to the same nonlinear system of differential equations. In the iterative form of this system will be similar to the system (6):

$$\begin{aligned} a_1 u_1^{*n} - a_1 u_2^{*n} - a_4 u_1^{*n},_{xx} - a_5 u_2^{*n},_{xx} + a_2 w_1^{*n},_x + a_3 u_2^{*n},_x - 2a_6 w_1^{*n},_{xxx} + a_7 w_2^{*n},_{xxx} &= p_\omega^{*(n-1)}, \\ -a_1 u_1^{*n} + a_1 u_2^{*n} - a_5 u_1^{*n},_{xx} - a_9 u_2^{*n},_{xx} - a_{10} w_1^{*n},_x - a_{17} w_2^{*n},_x - a_6 w_1^{*n},_{xxx} + 2a_7 w_2^{*n},_{xxx} &= h_\omega^{*(n-1)}, \\ -a_2 u_1^{*n},_x + a_{10} u_2^{*n},_x + 2a_6 u_1^{*n},_{xxx} + a_6 u_2^{*n},_{xxx} + a_{11} w_1^{*n},_{xx} - a_{12} w_2^{*n},_{xx} + \\ + a_{15} w_1^{*n},_{xxx} - a_{16} w_2^{*n},_{xxx} + a_8 w_1^{*n} - a_8 w_2^{*n} &= q + q_\omega^{*(n-1)}, \\ -a_3 u_1^{*n},_x + a_{17} u_2^{*n},_x - a_7 u_1^{*n},_{xxx} - 2a_7 u_2^{*n},_{xxx} - a_{12} w_1^{*n},_{xx} + a_{14} w_2^{*n},_{xx} - \\ - a_{16} w_1^{*n},_{xxx} + a_{13} w_2^{*n},_{xxx} - a_8 w_1^{*n} + a_8 w_2^{*n} &= g_\omega^{*(n-1)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Here, n is the approximation number; the coefficients a_1, \dots, a_{19} are determined by formulas (6) at the temperature of unloading. In the additional loads $p_\omega^{*(n-1)}$, $h_\omega^{*(n-1)}$, $g_\omega^{*(n-1)}$, and $g_\omega^{*(n-1)}$, at the first step of approximation, the nonlinear terms are assumed equal to zero. Further, they are calculated from the results of the previous iteration by formulas (7), in which the corresponding quantities with asterisks, $H_1^{\omega^{(n-1)*}}$, $H_2^{\omega^{(n-1)*}}$,



$P_1^{\omega(n-1)*}$, $P_2^{\omega(n-1)*}$, $T_1^{\omega(n-1)*}$, $T_2^{\omega(n-1)*}$, $S_1^{\omega(n-1)*}$, and $S_2^{\omega(n-1)*}$, are found from formulas (11), with addition of the superscript $(n-1)^*$.

If the kinematic conditions of supporting of the beam at its end faces on spatially motionless rigid supports are assumed, then, at the sections $x = 0, l$, the following requirements have to be obeyed at each step for the displacements marked with asterisks:

$$w_k^{*n} = u_k^{*n}, \quad w_k^{*n}, \quad w_k^{*n}, \quad w_k^{*n}, \quad w_k^{*n}, \quad w_k^{*n} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (18)$$

The solution of the system of differential equations (17) is assumed in the form of trigonometric series, automatically satisfying boundary conditions (18):

$$\begin{aligned} u_1^{n*} &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}^{n*} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & u_2^{n*} &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}^{n*} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \\ w_1^{n*} &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}^{n*} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & w_2^{n*} &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m}^{n*} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \end{aligned} \quad (19)$$

where U_{1m}^{n*} , U_{2m}^{n*} , W_{1m}^{n*} , and W_{2m}^{n*} are the displacements amplitudes required.

The external loads and additional forces marked by asterisks are also presented as trigonometric series:

$$\begin{aligned} q^* &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m^* \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & q_m^* &= \frac{2}{l} \int_0^l q^*(x) \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx, \\ q_{\omega}^{(n-1)*} &= \sum_{m=1}^{\infty} q_{\omega m}^{(n-1)*} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & q_{\omega m}^{(n-1)*} &= \frac{2}{l} \int_0^l q_{\omega}^{(n-1)*}(x) \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx, \\ g_{\omega}^{(n-1)*} &= \sum_{m=1}^{\infty} g_{\omega m}^{(n-1)*} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & g_{\omega m}^{(n-1)*} &= \frac{2}{l} \int_0^l g_{\omega}^{(n-1)*}(x) \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx, \\ h_{\omega}^{(n-1)*} &= \sum_{m=1}^{\infty} h_{\omega m}^{(n-1)*} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & h_{\omega m}^{(n-1)*} &= \frac{2}{l} \int_0^l h_{\omega}^{(n-1)*}(x) \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx, \\ p_{\omega}^{(n-1)*} &= \sum_{m=1}^{\infty} p_{\omega m}^{(n-1)*} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), & p_{\omega m}^{(n-1)*} &= \frac{2}{l} \int_0^l p_{\omega}^{(n-1)*}(x) \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Inserting displacements (19) and forces (20) into (17), we obtain a system of linear algebraic equations for determining the displacement amplitudes U_{1m}^{n*} , U_{2m}^{n*} , W_{1m}^{n*} , and W_{2m}^{n*} , which does not differ in its form from system (11) if asterisks are added to superscripts in the latter one.

After solving the system obtained, the displacements required, marked by asterisks, are calculated. The corresponding solution of the problem on deformation of the beam during the second half-cycle are found from relations (15) with account of solution (19):

$$u_k''(x, z) = u_k'(x, z) - u_k^*(x, z), \quad w_k''(x, z) = w_k'(x, z) - w_k^*(x, z) \quad (k = 1, 2). \quad (21)$$



Here, the quantities with one prime are the stresses, strains, and displacements in the beam before unloading, calculated by formulas (9), with primes added to superscripts in its.

Numerical results. The numerical realization of solution (21), (15)–(19) was carried out for a three-layer D16T–fluoroplastic–D16T beam, whose mechanical and thermo-plastical parameters are described in [2]. The temperature field in the filler was calculated by formula (1), at $h_1 = 0$, $q_t = 5000 \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ at the instant of time $t = 60 \text{ min}$. The rated temperature on beam surface was 540 K. The intensity of load $q_0 = \sim 5 \text{ MPa}$.

On Figs. 4 deflections of the first layer in the cross section $x = 0.5$ of the beam are shown in relation to the coordinates of endpoints of the interval of the locally distributed load. We should note that, at repeated sign-variable loading by uniformly distributed or local rectangular loads, the yield point of the material of load-carrying layers changed only due to hardening of the material, because temperature after the change in load sign did not change. Therefore, the maximum deflections in repeated loadings in the temperature field decreased by 1–2 %; however, in the case of subsequent cyclic changes in the load, this difference will accumulate.

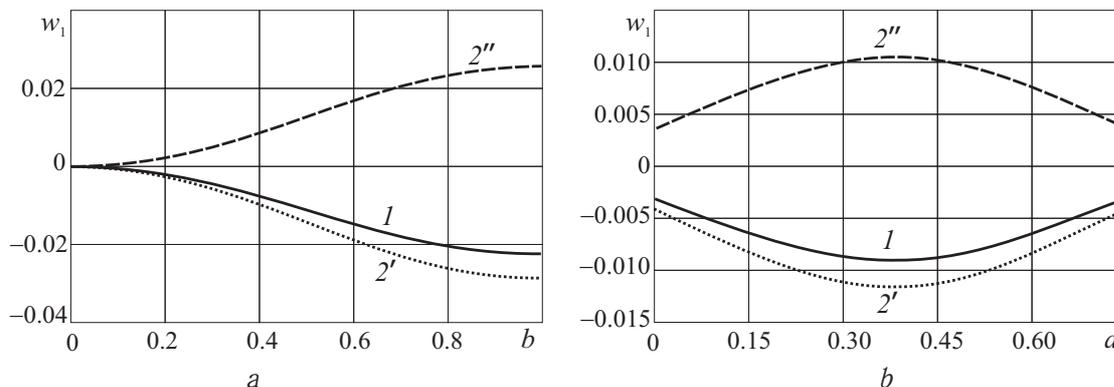


Fig. 4. Deflection w_1 in the middle of beams vs. coordinates b (a) and a (b) of ends of the interval of locally distributed load: elastic (1), thermoelastoplastic in loading from the natural state ($2'$), and thermoplastic in repeated sign-variable loading ($2''$)

5. CONCLUSION

The technique suggested for investigating a variable deformation of three-layer beams with a compressible filler allows one to take into account the effect of thermal flows and the physical nonlinearity of layer materials in engineering calculations. Numerical calculations have shown that their effect on the stresses and displacements in such a beam is considerable.

Acknowledgements: This work was supported by the Moscow Aviation Institute and Russian Science Foundation (project no. 14-49-00091).

References

1. Bolotin V. V., Novichkov Iu. N. *Mekhanika mnogosloinykh konstrukttsii* [Mechanics of Multilayer Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 375 p. (in Russian).
2. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Tarlakovskii D. V. *Teoriia uprugosti i plastichnosti* [Foundations of the Theory of Elasticity and Plasticity]. Moscow, FIZMATLIT, 2011. 416 p. (in Russian).



3. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.
4. Fedotenkov G. V., Tarlakovskiy D. V. Analytic Investigation of Features of Stresses in Plane Nonstationary Contact Problems With Moving Boundaries. *J. Math. Sci.*, 2009, vol. 162, no. 2, pp. 246–253. DOI: 10.1007/s10958-009-9635-4.
5. Kuznetsova E. L., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Propagation of Unsteady Waves in an Elastic Layer. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 779–787. DOI: 10.3103/S0025654411050128.
6. Mochalin A. A. Parametric Oscillations of a Non-uniform Circular Cylindrical Shell of Variable Density under Different Boundary Conditions. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 210–214 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-210-215.
7. Starovoitov E. I., Kubenko V. D., Tarlakovskii D. V. Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation. *Russian Aeronautics*, 2009, vol. 52, no. 2, pp. 151–157. DOI: 10.3103/S1068799809020044.
8. Rabboh S. A., Bondok N. E., Mahmoud T. S., El Kholy H. I. The Effect of Functionally Graded Materials into the Sandwich Beam Dynamic Performance. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, pp. 751–760. DOI: 10.4236/msa.2013.411095.
9. Havaladar S., Sharma R. Experimental Investigation of Dynamic Characteristics of Multilayer PU Foam Sandwich Panels. *Journal of Minerals and Materials Characterization and Engineering*, 2013, vol. 1, no. 5, pp. 201–206. DOI: 10.4236/jmmce.2013.15031.
10. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Impulsive Action on the Three-Layered Circular Cylindrical Shells in Elastic Media. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 1, pp. 202–209 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-202-209.
11. Blinkov Yu. A., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I. Wave Occurrences Mathematical Modeling in Two Geometrically Nonlinear Elastic Coaxial Cylindrical Shells, Containing Viscous Incompressible Liquid. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 184–197 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197.
12. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A. Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, no. 8, pp. 471–477. DOI: 10.4236/msa.2013.48057.
13. Belostochnyi G. N., Ul'yanova O. I. Continuum Model for a Composition of Shells of Revolution with Thermosensitive Thickness. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46., no. 2, pp. 184–191. DOI: 10.3103/S0025654411020051.
14. Vaziri A., Xue Z., Hutchinson J. W. Metal sandwich plates with polymer foam-filled cores. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2006, vol. 1, no. 1, pp. 97–127. DOI: 10.2140/jomms.2006.1.97.
15. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 291–298. DOI: 10.3103/S002565441102018X.
16. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Variable Bending of a Three-layer Rod with a Compressed Filler in the Neutron Flux. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 196–208 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208.



17. Franus D. V. Thickness Influence of the Multilayer Corneal Shell on the Value of Intraocular Pressure *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017. vol. 17, iss. 2, pp. 183–195 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-209-218.
18. Yankovskii A. P. A Study of Steady Creep of Layered Metal-composite Beams of Laminated- fibrous Structures with Account of Their Weakened Resistance to the Transverse Shift. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2016, vol. 20, no. 1, pp. 85–108 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1459.
19. Wilde M. V., Sergeeva N. V. Development of Asymptotic Methods for the Analysis of Dispersion Relations for a Viscoelastic Solid Cylinder. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 183–195 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-183-195.
20. П'иушин А. А. *Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации* [Plastic. Ch. 1. Elastic-Plastic Deformation]. Moscow, Gostekhizdat, 1948. 376 p. (in Russian).
21. Moskvitin V. V. *Tsiklichesкое нагружение элементов конструкции* [Cyclic Loading of Elements of Designs]. Moscow, Nauka, 1981. 344 p. (in Russian).

Cite this article as:

Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of a Sandwich Beam by Local Loads in the Temperature Field. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 69–83. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83.

УДК 539.374

ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ ЛОКАЛЬНЫМИ НАГРУЗКАМИ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой строительной механики Белорусского государственного университета транспорта, 246653, Беларусь, Гомель, Кирова, 34, edstar0@yandex.by

Леоненко Денис Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры строительной механики Белорусского государственного университета транспорта, 246653, Беларусь, Гомель, Кирова, 34, leoden@tut.by

Рассмотрено деформирование трехслойной балки в температурном поле под действием локальной распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и момента. Аналитический вид нагрузок задавался с помощью функций Хевисайда. Для описания кинематики несимметричного по толщине трехслойного стержня приняты гипотезы ломаной линии: в тонких несущих слоях справедливы гипотезы Бернулли; в сжимаемом по толщине заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко с линейной аппроксимацией перемещений по толщине слоя. Учитывается работа заполнителя в тангенциальном направлении. На границе предполагаются кинематические условия свободного опирания торцов стержня на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Изменение температуры рассчитывалось с помощью формулы, полученной при осреднении теплофизических свойств материалов слоев по толщине стержня. Напряжения и деформации связаны соотношениями деформационной теории пластичности. Система дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом. Решение краевой за-



дачи термо-, упругопластичности сведено к нахождению четырех искомым функций: прогибов и продольных перемещений срединных поверхностей несущих слоев. Аналитическое решение получено методом упругих решений. Проведен его численный анализ в случае непрерывных, локально распределенных, сосредоточенных и циклических нагрузок. Приведены графики изменения напряжений и перемещений в трехслойной балке при изотермических и термосиловых нагрузках.

Ключевые слова: циклические локальные нагрузки, трехслойная упругопластичная балка, сжимаемый наполнитель, температурное поле.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Московского авиационного института и Российского научного фонда (проект № 14-49-00091).

Образец для цитирования:

Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Bending of a Sandwich Beam by Local Loads in the Temperature Field [Изгиб трехслойной балки локальными нагрузками в температурном поле] // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 69–83. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83.

ИНФОРМАТИКА

УДК 004.75

КОНВЕРГЕНТНЫЕ И ГИПЕРКОНВЕРГЕНТНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

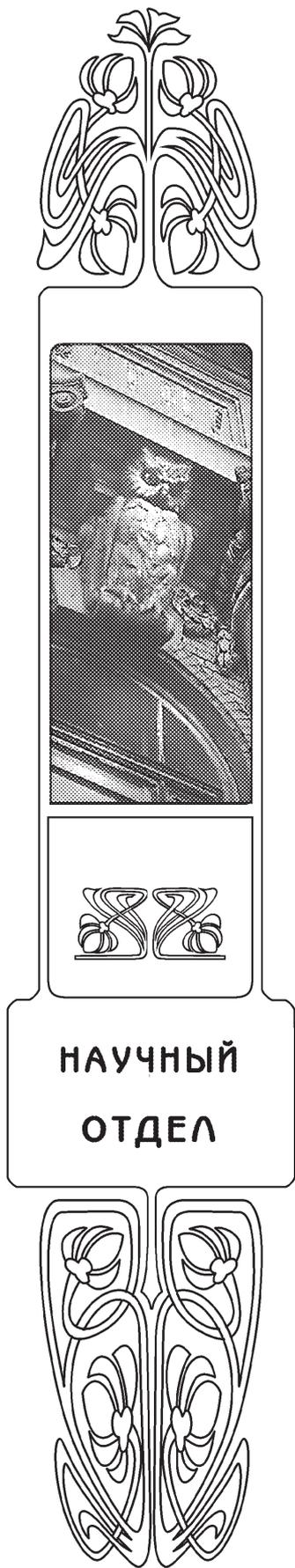
В. М. Соловьев

Соловьев Владимир Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, начальник Поволжского регионального центра новых информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, svm@sgu.ru

В работе рассмотрены вопросы построения гиперконвергентных вычислительных систем и их функционирование на основе программно-конфигурируемой сети. Приведены особенности протокола OpenFlow и технологические решения, переносящие управление программно-конфигурируемой сетью на выделенный контроллер (сервер). Предложена графовая модель управления ресурсами гиперконвергентной вычислительной системы, отвечающая требованиям заданного качества обслуживания, с одной стороны, и экономическим требованиям, с другой. На основе предложенной модели рассмотрен вариант реализации жадного алгоритма управления конвергентной инфраструктурой по протоколу OpenFlow, осуществляющего назначения запросов на физические ресурсы, используя программное обеспечение контроллера. Показаны преимущества многопоточковой маршрутизации, реализованной в среде гиперконвергентной инфраструктуры, используя для ее описания минимального дерева Штейнера. Рассмотрены вопросы надежности и безопасности гиперконвергентных вычислительных систем, делающих большую часть современных угроз неактуальными. В работе приведены возможности импортозамещения и перспективы перехода на сетевую инфраструктуру, ориентированную на контент.

Ключевые слова: конвергентная инфраструктура, гиперконвергентные системы, импортозамещение, программно-конфигурируемая сеть (ПКС), software defined networks (SDN), протокол OpenFlow, виртуальный центр обработки данных (ВЦОД), планирование вычислительных ресурсов, жадные алгоритмы, Service Level Agreement (SLA), многопоточковая маршрутизация, Multi-Threaded Routing (MRT), Quality of Service (QoS), DDoS-атаки, перехват данных, Information Centric Networking (ICN).

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-84-100





ВВЕДЕНИЕ

Конвергентные вычисления — это сближение различных методов обработки данных с целью сведения их к одной системе. В этой связи в информационные технологии (Information Technology, IT) был введен термин «конвергентная инфраструктура» (Convergent Infrastructure, CI), за которым кроется идея объединения средств хранения данных, вычислительных и сетевых ресурсов в единый пул облачных сервисов. Развитием такой инфраструктуры стали гиперконвергентные системы, переводящие конвергентные вычисления на следующий уровень. Гиперконвергентная инфраструктура (HyperConvergent Infrastructure, HCI) предлагает CI на основе масштабируемых программно-определяемых технологий. Таким образом, создаются архитектуры и платформы, которые гораздо более просты в управлении, масштабировании и обслуживании. При этом сети, вычислительные мощности и хранилища данных объединяются в одно целое с помощью программных средств, а управление ими происходит через общий контроллер (сервер), обслуживаемый одним системным администратором. Катализаторами развития этого нового IT мейнстрима стали финансовый кризис и идея импортозамещения [1].

Основой HCI является современная сетевая архитектура, комбинация стандартов, топологий и сетевых протоколов, необходимых для создания работоспособной распределенной вычислительной системы. Самая популярная и массовая в настоящее время сетевая архитектура Ethernet, по мнению членов глобальной исследовательской сети PlanetLab, устарела. В ближайшем будущем она не сможет поддерживать на должном уровне новые телематические сервисы и растущие запросы пользователей сети. Попытки изменить существующие архитектуры предпринимались довольно часто. Однако внесение принципиальных изменений в существующую сетевую архитектуру является весьма трудным делом, так как требует привлечения производителей телекоммуникационного оборудования. Кроме того, средства построения современных сетей являются проприетарными, закрытыми для изменений со стороны владельцев сетей и научной общественности. Практически всегда при изменении архитектуры переход с оборудования одного производителя на оборудование другого — сложная задача, требующая больших финансовых ресурсов.

Решить эту проблему предложила основанная в 2007 г. компания Nicira, которая одна из первых начала разработки программно-конфигурируемых сетей (ПКС, SDN, Software Defined Networks). Она предложила разделить уровни управления (Control Plane) и передачи данных (Data Plane), которые в современных сетях функционируют совместно, что делает контроль и управление сетью очень сложным. Идея разделения заключалась в «перехвате» управления таблицами коммутации (маршрутизации), что обеспечивало произвольное управление поведением и производительностью сетевого оборудования, а также параметрами передаваемых потоков данных в масштабах всех сетей Ethernet. Кроме того, независимость от оборудования производителя обеспечивал новый сетевой протокол OpenFlow. Такой подход основывался на специальном программном обеспечении, работающем на обычном компьютере, контролируемом администратором сети. Это позволило использовать вместо проприетарных средств построения сетей программное обеспечение с открытым кодом (open source) и заменить управление отдельным экземпляром сетевого оборудования управлением всей сетью. Таким образом, можно осуществлять виртуализацию

на уровне не отдельных узлов сети, а всей сети в целом, создав интеллектуальный программно-управляемый интерфейс между сетевыми приложениями и транспортной средой сети (рис. 1).

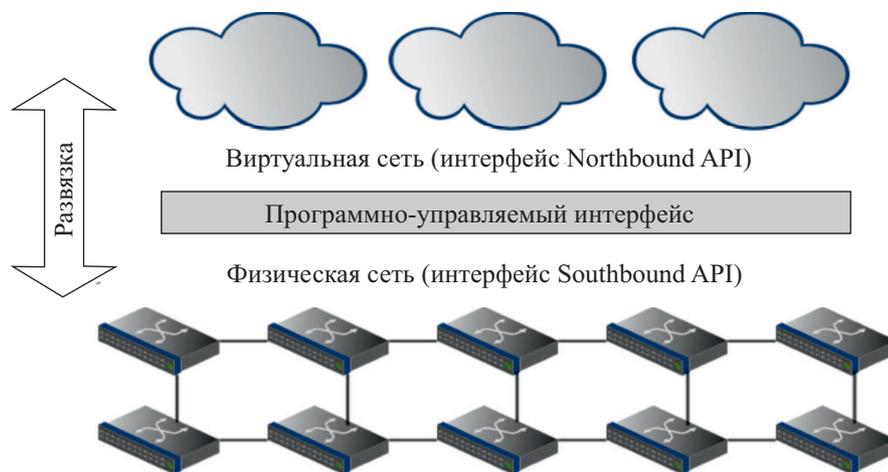


Рис. 1. Архитектура программно-коммутируемой сети

Fig. 1. The architecture of a software-switched network

Программно-управляемый интерфейс работает на границе сети и управляется распределенными кластерами контроллеров. Он позволяет динамически, без изменения адресов и нарушения рабочих процессов создавать виртуальные сети со всеми свойствами и сервисами реальных сетей. Независимость от оборудования такой архитектуры обеспечивает полную аппаратную межплатформенность, что делает возможным стабильное функционирование виртуальной сети даже в процессе замены оборудования.

Технологические решения SDN, предлагающие отделить Control Plane и Data Plane, переносят управление сетью на выделенный контроллер SDN. Такой подход включает три основные компоненты (рис. 1): контроллер SDN, обеспечивающий программно-управляемый интерфейс, API интерфейс взаимодействия с физической сетью (Southbound API) и API интерфейс взаимодействия с виртуальной сетью (Northbound API). Контроллер SDN является «главным вычислителем» ПКС и отвечает за построение топологии сети, программирование сетевых устройств и управление всей сетью. В качестве основного протокола контроллер SDN использует OpenFlow. Интерфейс Southbound API обеспечивает взаимодействие с реальными сетевыми устройствами. Интерфейс Northbound API обеспечивает интерпретацию бизнес-логики в сетевые инструкции, что позволяет администраторам гибко управлять сетевыми сервисами, исходя из требований приложений. Такая архитектура (см. рис. 1) позволяет отделить управление сетью от функций форвардинга данных (disaggregation). В связи с этим каждый из уровней может рассматриваться по отдельности, а не как единая интегрированная система. Это предоставляет приложениям более подробную и консистентную информацию о состоянии сети. Таким образом, приложения, предоставляющие определенный уровень абстракции сети, могут напрямую взаимодействовать с SDN контроллером, запрашивая сетевые сервисы посредством API. Контроллеры и коммутаторы сети работают каждый в своем сетевом пространстве и представляют собой отдельные виртуальные машины, подключенные



в сеть через интерфейсы Ethernet. При этом SDN контроллер интерпретирует инструкции и запросы от приложений в инструкции для сетевых устройств. Обратное же взаимодействие включает сбор информации о сети и отправку её SDN контроллерам, тем самым абстрагируясь от уровня сетевой инфраструктуры для приложений. Роль сетевых устройств сводится лишь к функции перенаправления данных согласно инструкциям SDN контроллера. Основное преимущество ПКС заключается в возможностях предоставления приложениям абстрактной сетевой инфраструктуры, что делает сеть более «интеллектуальной». Такая сеть имеет возможность самоанализа и принятия решений о форвардинге трафика, исходя из требований приложений и загрузки сети в режиме реального времени.

1. ПРОТОКОЛ OPENFLOW

Идеи, положенные в основу протокола OpenFlow, появились задолго до ПКС и на их основе пытались решить такие же задачи, что и сегодня. Эти идеи основаны на отделении управления сетевыми устройствами от самих устройств, используя модель из «вычислителя» сети и множества «простых аппаратных» сетевых устройств, отвечающих только за форвардинг. Для реализации этого используется механизм программирования правил коммутации. Таким механизмом и является протокол OpenFlow, рассматриваемый как набор инструкций (протокол программирования), и как архитектурный подход. При этом весь функционал, заложенный в OpenFlow, поддерживается на уровне оборудования. То есть снижаются требования к функционалу оборудования, оставляя ему лишь простые функции Data Plane, а функции Control Plane выносятся на отдельное устройство — SDN контроллер (рис. 2).

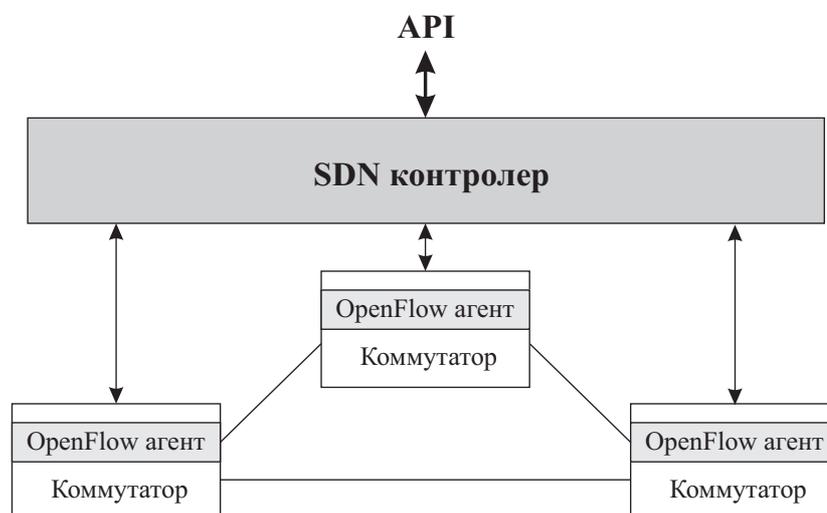


Рис. 2. Структура SDN контроллера
Fig. 2. Structure of the SDN controller

Контроллер использует протокол OpenFlow, чтобы подключиться к коммутаторам (маршрутизаторам) и запрограммировать их таблицы форвардинга, рассчитывая лучшие маршруты для трафика приложений. Назначение OpenFlow агента — принять команды от контроллера и сформировать таблицу, на основе которой коммутатор (маршрутизатор) решает, куда направить пришедший пакет. Структура Data Plane коммутатора приведена на рис. 3.

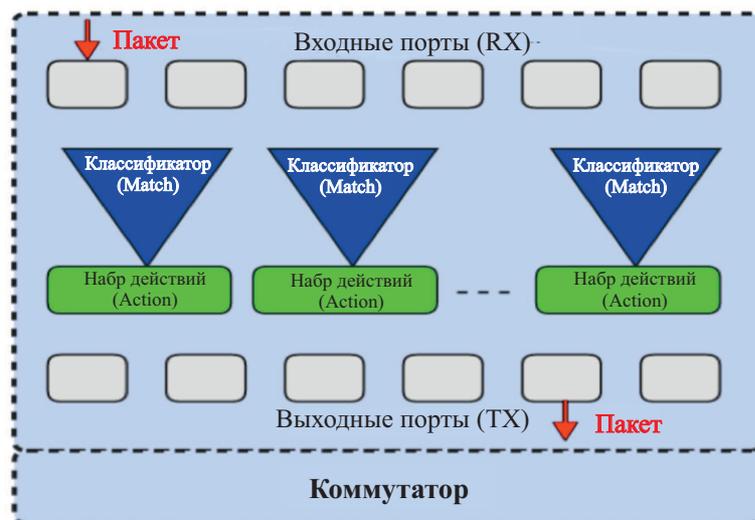


Рис. 3. Структура Data Plane коммутатора
Fig. 3. Structure of the Data Plane Switch

Порты OpenFlow выполняют те же функции, что и порты обычного коммутатора [2]. Пакеты, приходящие на OpenFlow-порт (Ports), классифицируются по потокам (Flow) в таблицах потоков (Flow tables) с помощью классификаторов (Match) [3]. Каждый поток состоит из набора действий (Actions), которые применяются к каждому пакету и соответствуют определенному правилу. При поступлении пакета на OpenFlow-порт из него извлекаются метаданные. Затем они сравниваются с записями в таблице потоков, где каждая запись в таблице имеет поле «protocol», по которому и выполняется сравнение.

Результату сравнения присваивается приоритет, по которому выбирается «победитель». Запись с наивысшим приоритетом (победитель) определяет то, как дальше будет обрабатываться пакет. Эту обработку определяет классификатор в соответствии с Match-правилом, соответствующим определенному действию. Эти действия (Actions) могут быть: отправить в порт N, отбросить пакет, отправить на контроллер и т. д. Если пакеты не соответствуют ни одному правилу, то их отправляют на контроллер. Классификатор может использовать любую комбинацию полей заголовка пакета (сравнение: по MAC-адресам, VLAN- и MPLS-меткам, IPv4- и IPv6-адресам, TCP- и UDP-портам и т. д.). После сравнения становится возможным выполнение ряда действий, например, использование протокола OpenFlow для реализации функций NAT.

В последних версиях протокола OpenFlow широко используется механизм групп (Group), который улучшает форвардинг. Группа включает набор подмножеств, а каждое подмножество — набор вышеуказанных действий. Улучшение форвардинга заключается в «группировке действий»: например, отправку подмножеств из группы для балансировки нагрузки сети и т. д. Другим направлением развития протокола OpenFlow является использование механизма TTP (Table Type Patterns) [3]. Механизм TTP базируется на двух моментах. Во-первых, OpenFlow агент на коммутаторе конфигурирует Data Plane по инструкциям, полученным от контроллера. Эти инструкции представляют собой пайплайн (pipeline) — определенную последовательность действий, совершаемых с пакетом на коммутаторе. Однако некоторые инструкции коммутатор не может выполнить из-за особенностей функционала чип-



сета. Поэтому предварительно при инициализации необходимо определить, какие пайплайн поддерживаются, а какие нет. Это согласование нужно провести между коммутатором и контроллером до того момента, как они начнут работать вместе. Во-вторых, при инициализации необходимо определить функционал OpenFlow, поддерживаемый контроллером и коммутатором. Затем, если контроллер и коммутатор «договорились», они используют только взаимно ограниченный функционал OpenFlow для реализации поддерживаемого пайплайна. Такой подход исключает неожиданное поведение коммутаторов в ответ на получение неподдерживаемых пайплайн. На практике нет необходимости поддерживать все возможные пайплайны OpenFlow, а только совместимые. Такое ограничение и получило название ТТР, которое фактически содержит информацию о количестве таблиц, типах сообщений и о том, какие действия предпринимаются с пакетом при переходе из одной таблицы в другую. В настоящее время ПКС используют только контроллеры, поддерживающие ТТР.

2. УПРАВЛЕНИЕ НСИ ПО ПРОТОКОЛУ OPENFLOW

По сути, НСИ — виртуальный центр обработки данных (ВЦОД) — виртуальная инфраструктура, которая позволяет создавать виртуальные машины, виртуальные хранилища данных, виртуальные коммутаторы и маршрутизаторы, а также виртуальные каналы связи. Основная задача ВЦОД — принимать запросы (тенанты) пользователей и актуализировать их с помощью средств виртуализации в сетевой топологии. В основе механизма управления ресурсами ВЦОД лежит расширенная для задач НСИ модель [4]. Сетевая топология представлена графом $T = (C \cup M \cup K \cup L)$, где C — множество вычислительных узлов, M — множество хранилищ данных, K — множество коммутационных элементов сети, L — множество каналов связи. На каждом множестве определены векторы скалярного аргумента, задающего параметры: вычислительных узлов — $c \in C$, хранилищ данных (памяти) — $m \in M$, коммутационных элементов — $k \in K$ и каналов связи — $l \in L$ соответственно:

$$\begin{aligned} fct(c) &= (ct_1(c), ct_2(c), \dots, ct_n(c)), \\ fmt(m) &= (mt_1(m), mt_2(m), \dots, mt_n(m)), \\ fkt(k) &= (kt_1(k), kt_2(k), \dots, kt_n(k)), \\ flt(l) &= (lt_1(l), lt_2(l), \dots, lt_n(l)). \end{aligned} \quad (1)$$

Ресурсы ВЦОД заданы графом $R = (V \cup S \cup D)$, где V — множество приложений, развернутых на виртуальных машинах, S — множество виртуальных хранилищ данных, D — множество каналов связи между виртуальными машинами и хранилищами данных. На каждом множестве также определены векторы скалярного аргумента, задающего параметры: виртуальных машин — $v \in V$, виртуальных хранилищ данных — $s \in S$, каналов связи, включающих коммутационные элементы и обеспечивающих требуемое качество сервиса (SLA) — $d \in D$ соответственно:

$$\begin{aligned} fvr(v) &= (vr_1(v), vr_2(v), \dots, vr_n(v)), \\ fsr(s) &= (sr_1(s), sr_2(s), \dots, sr_n(s)), \\ fdr(d) &= (dr_1(d), dr_2(d), \dots, dr_n(d)). \end{aligned} \quad (2)$$

Параметры (2), обеспечивающие SLA, совпадают с соответствующими параметрами (1) и представляются отображением запросов ресурсов на топологию НСИ:

$$O : R \rightarrow T \cup \{\emptyset\} = \{V \rightarrow C \cup \{\emptyset\}, S \rightarrow M \cup \{\emptyset\}, D \rightarrow K \cup \{\emptyset\}, L \cup \{\emptyset\}\}. \quad (3)$$



Запросы ресурсов из выражения (3) определяют три типа отношений между параметрами запросов r_i и физическими ресурсами t_i , исходя из топологии HCI: запрашиваемые ресурсы соответствуют ресурсам, определяемым топологией $r_i = t_i$; перегрузка физических ресурсов $r_i > t_i$, нарушающая SLA; недогруженность физических ресурсов $r_i < t_i$, требующая реконфигурации топологии по экономическим соображениям. В последнем случае доступные ресурсы могут быть представлены остаточным графом $T_{res} = (\cup M \cup K \cup L)$, который переопределяет параметры в следующем виде:

$$fct_{res}(c) = fct(c) - \sum_{v \in V} fvr(v), \quad fmt_{res}(m) = fmt(m) - \sum_{s \in S} fsr(s), \tag{4}$$

$$fkt_{res}(k) = fkt(k) - \sum_{d \in D} fvr(v), \quad flt_{res}(l) = flt(l) - \sum_{d \in D} fdr(d).$$

Выполнить требования SLA, с одной стороны, и экономические требования, с другой, позволяет автоматизированная миграция структур HCI под управлением контроллеров по протоколу OpenFlow. Миграция выполняется и когда невозможно по запросу назначить виртуальное хранилище, а данные заносятся на несколько физических хранилищ. В этом случае часть приложений может работать с виртуальным хранилищем данных, а часть с данными, располагающимися в другом физическом хранилище. В соответствии с планом миграции перемещение виртуальных структур должно отвечать следующим требованиям: при перемещении SLA не нарушается; все перемещения выполняются в заданные временные интервалы, что обеспечивает автоматизированная работа контроллеров. Исходными данными для миграции являются: множество поступающих запросов $Z = \{R_i\}$, множество выполненных запросов $W = \{R_i\}$, граф остаточных ресурсов T_{res} , ограничение на время миграции τ . При миграции в граф запрашиваемых ресурсов R добавляется новая вершина s' и виртуальный канал связи между вершинами s и s' .

Управление ВЦОД по протоколу OpenFlow осуществляется на основе жадного алгоритма назначения запросов на физические ресурсы, используя программное обеспечение контроллеров (серверов), в основе которого лежит выражение (4). В качестве критерия оптимизации применяется наиболее компактное размещение элементов запроса (2) с точки зрения ресурсов. Аналогичный подход широко используется в центрах обработки данных и провайдерами облачных сервисов [5,6]. Качество управления ВЦОД будет зависеть от выбора жадных критериев: очередного запроса — K_R , виртуального узла — K_V , физического узла — K_C . Критерии K_V и K_C основываются на функции стоимости, определяемой как взвешенная сумма требуемых параметров с учетом дефицита ресурса — $d(i) = (\sum_R \sum_{e \in R} r_{r,i} - \sum_{c \in C} r_{c,i}) / \sum_R \sum_{e \in R} r_{e,i}$. Тогда функция стоимости назначения элемента «e» будет иметь вид: $r(e) = \sum_{i=1}^n d(i)r_{e,i}$, где выбранный элемент HCI характеризуется вектором значений требуемых параметров ресурса $(r_{e,1}, r_{e,2}, \dots, r_{e,n})$. Величина дефицита ресурса вычисляется как частное от деления, разницы между общим значением требуемого параметра ресурса по всем запросам и значениям имеющихся физических ресурсов по данному параметру, на общую сумму требуемых ресурсов. Тогда функция стоимости будет определяться как взвешенная сумма требуемых параметров ресурса с учетом их дефицита. В соответствии с критерием K_V выбирается виртуальный элемент HCI, у которого функция стоимости максимальна. Это делается для того, чтобы сначала назначить самые



дефицитные по ресурсам элементы, а затем все остальные виртуальные элементы. В соответствии с критерием K_C выбирается физический элемент НСИ, у которого функция стоимости минимальна. Это делается для того, чтобы достичь максимальной утилизации (загрузки) вычислительных ресурсов. В соответствии с критерием K_R выбирается запрос, взвешенная сумма запрашиваемых ресурсов которого максимальна.

Общая схема алгоритма управления будет выглядеть следующим образом.

1. Планировщик анализирует пришедшие запросы ресурсов $Z = \{R_i\}$.
2. Если множество $\{R_i\} \neq \emptyset$ непусто, то выбирается очередной запрос R_i в соответствии с жадным критерием K_R , в противном случае, работа алгоритма завершается.
3. Из элементов запроса R_i формируется множество виртуальных узлов $U = \{V \cup S\}$, в противном случае, при невозможности сформировать множество виртуальных узлов U выполняется переход на шаг 14.
4. Из сформированного множества виртуальных узлов U выбирается очередной элемент N в соответствии с жадным критерием K_V и помещается в очередь Q элементов, ожидающих назначения.
5. Из элементов C_i формируется множество физических узлов $\{C_i\} \neq \emptyset$, на которые может быть назначен элемент N на основании корректного выполнения отображения (3). В противном случае, при $\{C_i\} \in \emptyset$ вызывается процедура ограниченного перебора.
6. Из сформированного множества физических узлов в соответствии с жадным критерием K_C выбирается физический ресурс и переопределяются значения параметров физических ресурсов в соответствии с функциями (4).
7. Выбираются все виртуальные каналы D_i , связывающие элемент N с еще неназначенными элементами запроса R_i .
8. Сортируется множество каналов $\{D_i\} \neq \emptyset$ по величине пропускной способности в возрастающем порядке.
9. Выбирается из множества каналов $\{D_i\}$ виртуальный канал L_i , обеспечивающий кратчайший маршрут, связывающий элемент N с элементом запроса R_i . В противном случае, при невозможности проложить маршрут вызывается процедура назначения виртуального канала на физическом ресурсе и переопределяются значения параметров физических ресурсов в соответствии с функциями (4).
10. Добавляются в очередь Q виртуальные узлы, связанные с N в соответствии с порядком связывающих их виртуальных каналов из отсортированного множества $\{D_i\}$.
11. Удаляется N из U и Q .
12. Если Q непусто, то выполняется переход к шагу 4.
13. Если U непусто, то выполняется переход к шагу 3, в противном случае, переход к шагу 1.
14. Отменяются все назначения элементов запроса R_i , удаляется запрос из множества $Z = \{R_i\}$ и выполняется переход к шагу 2.

В алгоритме используются две процедуры, ограниченного перебора и назначения виртуального канала на физическом ресурсе, описанные в [5]. Процедура ограниченного перебора вызывается при невозможности назначить очередной виртуальный узел N из множества запросов $\{R_i\}$ ни на один физический ресурс. Она анализирует подмножество множества физических узлов $\{C_i\}$ графа физических ресурсов.



Мощность подмножеств определяется заданной глубиной перебора, а количество просматриваемых подмножеств ограничено. Просматриваются только те подмножества, у которых суммарное количество остаточных ресурсов узлов достаточно для назначения текущего элемента N . Процедура обеспечивает выполнение шага 5 при изменении (подборе) глубины перебора и количества просматриваемых подмножеств. Процедура назначения виртуального канала на физическом ресурсе вызывается при невозможности проложить маршрут, связывающий виртуальным каналом элемент N с элементом запроса R_i . Поиск маршрута выполняется на основе модифицированного алгоритма Дейкстры [7] так, что в него могут входить только коммутационные элементы и каналы связи физической сети, для которых выполняются соотношения корректности отображения (3). При невозможности назначения виртуального канала, подключающего элемент хранения, осуществляется поиск хранилища, которое имеет ресурсы для создания реплики элемента хранения (реплика требует ресурсы, равные ресурсам элемента хранения). Все отобранные для создания реплики хранилища рассматриваются в порядке возрастания суммарной длины маршрутов. Кроме того, рассматривается возможность создания канала связи l , обеспечивающего пропускную способность и требуемую интенсивность потока данных, к реплике. В случае невозможности канала связи l обеспечить требуемые параметры рассматривается следующий вариант на размещение реплики. В конечном итоге создается маршрут, обеспечивающий связность между элементом N и репликой. Положительный результат обеспечивается изменением параметров маршрута и канала связи. Аналогичная техника в отношении виртуальных машин хорошо известна и рассмотрена, например, в работе [8].

Таким образом, алгоритм управления NCI по протоколу OpenFlow позволяет планировать вычислительные ресурсы, ресурсы хранения данных и коммуникационные ресурсы самоорганизующейся облачной платформы (ВЦОД) с соблюдением SLA и использованием технологических решений SDN. Он допускает рациональное использование физических ресурсов за счет устранения их сегментации, применяя миграцию виртуальных ресурсов. Алгоритм позволяет администрировать гиперконвергентную вычислительную систему, задавая политики маршрутизации потоков данных и используя сетевые функции управления виртуальными и физическими устройствами различных производителей, поддерживающих протокол OpenFlow. Предлагаемое решение позволяет объединять различные сети, управляемые по протоколу OpenFlow, и эффективно передавать потоки данных между ними.

3. МНОГОПОТОКОВАЯ МАРШРУТИЗАЦИЯ В NCI

Требования к качеству сервиса в вычислительных системах постоянно растут, так как современные сетевые приложения требуют высокой производительности — моделирование в реальном времени, телемедицина (дистанционная хирургия); высокой производительности и малого джиттера — видеоконференции, IP-телефония, IP-телевидение; высокой производительности и низкой частоты ошибок — банковские системы, платежные терминалы и т. д. Этим требованиям отвечает многопоточная маршрутизация, реализованная в NCI, которая обеспечивает высокое качество сетевых сервисов (QoS) и прежде всего высокую производительность путем распараллеливания информационных потоков. Эта возможность предоставляется SDN, так как позволяет управлять QoS с помощью контроллера, обеспечивающего глобальное видение топологии сети и возможности построения нескольких непересека-



ющихся маршрутов на основе многопоточного транспортного протокола Multipath TCP (МРТСП) в рамках модифицированного протокола управления передачей TCP (Transmission Control Protocol). В этом случае SDN контроллер анализирует TCP заголовки, детектирует открытие нового МРТСП соединения и открытие нового подпотока для известного МРТСП соединения, прокладывает кратчайшие маршруты. Причем маршруты одного соединения не пересекаются. Используемая ранее традиционная маршрутизация на основе IP адресов для борьбы с перегрузками требовала бы наращивания ресурсов: широкополосных каналов связи и быстрых коммутаторов, а это без управления QoS снижало бы утилизацию ресурсов. Чтобы обеспечить все запросы ресурсами сеть без управления качеством сервиса должна была бы ориентироваться на наибольшие запросы. В HSI коммутаторы оперируют только портами и адресами заголовков канального, сетевого и транспортного уровней. Контроллер же реализует различные маршруты следования трафика, наблюдая за сетью, он выполняет роль арбитра, самостоятельно определяющего количество подпотоков. Он динамически их ограничивает и вырабатывает оптимальное распределение ресурсов, т. е. решает задачу многокритериальной оптимизации. В настоящее время образцов таких контроллеров выпускается более 30, имеется и российский контроллер Rupos, а для образовательных целей рекомендуется использовать контроллер Pox.

Многопоточковая маршрутизация использует сервисы МРТСП, которые для одного соединения дают возможность одновременно передавать данные несколькими маршрутами. Такая маршрутизация в сети может быть представлена графом $G = (V, E)$, где V — множество вершин (коммутационных узлов) в соединении, через которые проходят соответствующие подпотоки, а E — множество ребер, которые входят в n маршрутов. В этом случае сеть передачи данных может быть описана минимальным деревом Штейнера: $G_C(n) = (V_C(n), E_C(n))$, которое включает в себя все вершины $V_C(n) \in V$ и ребра $E_C(n) \in E$. Тогда задача маршрутизации (алгоритм маршрутизации) сводится к задаче Штейнера на графе, т. е. к отысканию во взвешенном графе дерева, покрывающего выделенное подмножество вершин и ребер. При этом вес определяется исходя из длины ребра, а суммарная длина ребер $\sum_n |E_C(n)|$ должна быть минимальной. Такое дерево будет представлять собой скопление сетей $c_i = (v_i, e_i)$, где i — количество сетей, соответствующее подпотокам, а $e_i \in E$, $v_i \in V$. Причем скопление сетей будет определять производительность и отсутствие перегрузок при маршрутизации, что в конечном итоге будет управлять QoS. Многопоточковая маршрутизация подразумевает три аспекта: реализации архитектуры сети на основе высокоуровневых решений Multipath TCP; реализации механизмов подавления перегрузки на основе алгоритма маршрутизации при отсутствии взаимодействия разных маршрутов (без их пересечения); взаимодействие МРТСП с приложениями через программный интерфейс (API). Работа по модифицированному протоколу управления передачей может происходить по следующему сценарию.

1. Для приложений, где отсутствует поддержка МРТСП, протокол ведет себя как обычный протокол TCP, и приложение начинает работу как обычно с формирования TCP-сокета.

2. Соединение МРТСП устанавливается как и обычное TCP-соединение.

3. При доступности дополнительных маршрутов (наличия сетевых ресурсов) создаются дополнительные TCP-сессии, называемые подпотоками. Они комбинируются с существующими сессиями, которые представляют собой отдельные соединения приложений.



4. Протокол МРТСП идентифицирует несколько маршрутов за счет наличия у сетевого узла нескольких адресов. Комбинации этих адресов позволяет сформировать дополнительные маршруты.

5. Формирование и конфигурирование подпотоков осуществляется с помощью управления маршрутизацией.

6. Модифицированный протокол управления передачей добавляет порядковые номера уровня соединения, чтобы позволить сборку сегментов, доставляемых по разным маршрутам с разными задержками.

7. Подпотоки завершаются как TCP-соединения посредством четырехтактного диалога FIN.

Основные функции многопоточковой маршрутизации ложатся на SDN-контроллер и заключаются в определении им маршрутов передачи пакетов, а также в управлении сетевыми устройствами, обрабатывающими и балансирующими потоки данных. С точки зрения QoS маршруты должны отвечать следующим требованиям: должна выполняться равномерная загрузка (балансировка) сети; маршруты должны прокладываться с учетом пропускной способности ресурсов и требований сетевых приложений; маршруты должны иметь наименьший вес в терминах МРТСП. Реализация этого обеспечивается алгоритмом, реализуемым на основе минимального дерева Штейнера.

4. НАДЕЖНОСТЬ И БЕЗОПАСНОСТЬ НСИ

Большое внимание в гиперконвергентных системах, активно развивающихся на основе SDN, уделяется не только качеству сетевых сервисов, но также обеспечению безопасности коммуникаций и надежности сети передачи данных. В НСИ это становится возможным за счет гибких механизмов распределенного управления и использования нескольких экземпляров контроллеров [9]. Высокая надежность сети обусловлена самовосстановлением и автоматическим перераспределением потоков данных в соответствии с выбранными правилами. Кроме того, на надежности работы сети сказывается эффективная визуализация трафика (круглосуточный мониторинг) и возможность перестройки физической сети без прерывания ее работы на обслуживание, обнаружение и устранение отказов. Безопасность НСИ повышается за счет полной изоляции виртуальных сред друг от друга.

Выше приводилось описание контроллера, где он представлялся центральным элементом НСИ, позволяющим коммутационным узлам и приложениям обмениваться данными. Поэтому к нему должны быть предъявлены повышенные требования по безопасности и надежности. Ошибки контроллера проявляются как ошибки доставки сообщений: недоставка сообщения от управляемого им коммутатора отдельному приложению или сообщения от приложения коммутатору. В НСИ пользователь ожидает, что при отказе или перегрузке одного элемента его функции будут перехвачены другим, причем смена элементов произойдет в пределах ожидаемого интервала времени. Если такой перехват не происходит либо занимает больше времени, это также является ошибкой контроллера. Следующие ошибки — это ошибки сетевых приложений, проявляющиеся в нарушении сформулированных приложением утверждений. Эти ошибки не зависят от приложений, могут быть легко обнаружены и устранены контроллером. Третий подкласс ошибок — это ошибки конкуренции, возникающие как несогласованная работа приложений. Чаще всего они проявляются в виде конкуренции: за производительность коммутаторов (при невозможности обработать боль-



шое количество сообщений, часть из них коммутатор сбрасывает); за последовательность выполнения управляющих сообщений приложений, так как коммутатор может изменять порядок обработки сообщений; за таблицы коммутаторов. Методы борьбы с ошибками вытекают из классических принципов контроля и диагностирования — обнаружение ошибки в ходе контроля (мониторинга) сети, локализации ошибки в ходе диагностирования и ее устранение (рис. 4).

```

mininet@mininet-vm: ~
Файл Правка Вид Поиск Терминал Справка
mininet@mininet-vm:~$ lsmod | grep -E '^ip|nat|nf' | sort
ip_tables                20480      0
libcrc32c                 16384      2 openvswitch,nf_nat
nf_conntrack              114688     6 nf_conntrack_ipv6,openvswitch,nf_conntrack_ipv4,nf_nat_ipv6,nf_nat_ipv4,nf_nat
nf_conntrack_ipv4        16384      1
nf_conntrack_ipv6        20480      1
nf_defrag_ipv4           16384      1 nf_conntrack_ipv4
nf_defrag_ipv6           24576      2 nf_conntrack_ipv6,openvswitch
nf_nat                    28672      3 openvswitch,nf_nat_ipv6,nf_nat_ipv4
nf_nat_ipv4              16384      1 openvswitch
nf_nat_ipv6              16384      1 openvswitch
mininet@mininet-vm:~$
  
```

Рис. 4. Вывод информации средствами анализа пакетов в Linux

Fig. 4. Information output by means of package analysis in Linux

Состояние сети в НСИ можно представить как функцию $A = f(E, T_E) \rightarrow (C, T_C)$, $C = \{C^i\}$, $C^i = \{C^{i,j}\}$, где E — последовательность событий в сети (изменение состояния каналов связи), T_E — последовательность временных интервалов событий, C — последовательность состояний сети, T_C — последовательность временных интервалов состояний, C^i — состояние сети в i -й момент времени (временной срез состояния коммутаторов), $C^{i,j}$ — состояние таблицы j -го коммутатора в i -й момент времени. Поскольку с НСИ одновременно могут работать N сетевых приложений, то можно говорить о множестве последовательностей состояний $C_k = f_k(E, T)$, $k = 1, \dots, N$. Корректная работа приложений в сети регламентируется правилами, которые проверяют свойства сетевых пакетов, и если свойства удовлетворяют требованиям правил, то над пакетом коммутатор выполняет соответствующие действия. Поэтому состояние сети в НСИ будет зависеть от применяемых правил $A = f(E, T_E) \rightarrow (C, T_C, R, T_R)$, где R — последовательность применяемых правил, T_R — последовательность временных меток правил.

Вопросы безопасности НСИ актуальны еще и по причине своей особенности, привлекающей злоумышленников. Во-первых, это возможность управлять сетью с помощью программного обеспечения, которое часто имеет уязвимости. Во-вторых, централизованное управление сетью с помощью контроллера (сервера), когда, получив доступ к нему, можно скомпрометировать всю сеть через управляющее программное обеспечение. К основным угрозам, специфичным для НСИ, обычно относят: использование вредоносного кода для перехвата данных, DDoS-атаки на контроллер, атаки на сетевые устройства внутри сети, подключение вредоносных устройств внутри сети и уязвимости программного обеспечения. Основными методами противодействия этим угрозам является исключение возможности компрометации контроллера, что не позволяет злоумышленнику управлять сетью. С этой целью обеспечиваются целостность контроллера и строгий механизм аутентификации доступа к нему, чтобы исключить внедрение в него нежелательной информации. Обычно для этого используются криптографические протоколы SSL/TLS, которые еще и обеспечивают защи-



ценную связь между контроллером и OpenFlow-устройствами. В HSI это позволяет исключить, например, компрометацию OpenFlow-коммутатора, находящегося в открытом доступе. Коммутатор теперь может быть очень простым устройством, весь «интеллект» которого располагается в хорошо защищенном контроллере.

Идеология HSI делает большую часть угроз неактуальными (например, отказ от традиционных протоколов маршрутизации), а часть механизмов защиты может быть реализована в контроллерах или узлах сети, которые легко сегментируются и изолируются. В сети средствами HSI можно создавать эффективные фильтры и при необходимости их динамически перестраивать, что обеспечивает быстрое реагирование на ситуации и предотвращать атаки. В настоящее время HSI может использовать фильтры, запрещающие или разрешающие пропуск датаграмм с широковещательным адресом назначения между внутренними и внешними сетями; пропуск датаграмм, направленных из внутренней сети во внешнюю сеть, но имеющих внешний адрес отправителя; пропуск датаграмм, прибывающих из внешней сети, но имеющих внутренний адрес отправителя; пропуск датаграмм с опцией «source routing»; пропуск датаграмм с ICMP-сообщениями между внутренней и внешней сетями; пропуск датаграмм с UDP-сообщениями, направленными в порты echo и chargen; использование TCP intercept для защиты от атак SYN; фильтрацию TCP-сегментов, выполняемую в соответствии с политикой безопасности (разрешать все сервисы, кроме запрещенных, или запрещать все сервисы, кроме разрешенных); обработку ICMP echo-запросов, направленных на широковещательный адрес; обработку ICMP-сообщений Redirect, Address Mask Reply, Router Advertisement, Source Quench; попытки открытого сканирования.

Перехват данных в простейшем варианте начинается с прослушивания сети, исключить которую можно в HSI с помощью сегментации сети коммутаторами. Сегментация позволит злоумышленнику перехватить только кадры того сегмента сети, к которому он подключен. Более сложный случай перехвата трафика в IP-сети использует протокол ARP. При этом рассылаются сфальсифицированные ARP-сообщения, которые заставляют MAC-адрес злоумышленника считать адресом своего собеседника. Здесь сегментация не является препятствием для ARP-атаки. В HSI для борьбы с такими атаками используют статические ARP-таблицы и базу данных соответствия MAC- и IP-адресов всех узлов сети. Причем правила безопасности позволяют автоматизировать процесс создания статических таблиц. Еще одним вариантом перехвата трафика может быть ложная маршрутизация, когда злоумышленник навязывает узлу сети свой адрес в качестве адреса маршрутизатора. Это обеспечивает перенаправление трафика на узел злоумышленника и последующую его компрометацию. Чаще всего ложная маршрутизация выполняется с помощью фальсифицированных ICMP-сообщений Redirect; конфигурирования атакуемого узла ICMP-сообщениями Router Advertisement или использования протокола DHCP; атака на протоколы маршрутизации с целью переключения требуемых маршрутов на злоумышленника, при использовании атаки на протокол BGP. Для противодействия перечисленным угрозам в HSI используют правила, исключающие имперсонацию. Это прежде всего оперативное применение правил, исключающих обработку соответствующих сообщений (например, сообщений Redirect); автоконфигурирование; при использовании аутентификации в TCP-сегментах, например, с помощью алгоритма MD5 [10].

Кроме перечисленных угроз перехват данных позволяет злоумышленнику опреде-



лить установленные в HSI правила и попытаться их обойти. При этом используется анализ перехваченных пакетов, позволяющий определить статус сети. Какие пакеты перехватывать и анализировать, определяется из того факта, что пакеты, удовлетворяющие требованиям правила, обрабатываются быстрее, чем если бы они анализировались контроллером на предмет, что с ними дальше делать. Отсюда следует, что анализу нужно подвергать пакеты, которые по сети проходят быстрее остальных.

Следующей наиболее распространенной угрозой для HSI является отказ в обслуживании (DDoS). Эта угроза связана с перехватом данных и реакцией контроллера на пакеты, не удовлетворяющие требованиям правил. Злоумышленник после анализа перехваченных пакетов выбирает те (по времени), на которые контроллер создает новые правила. Цель атаки заключается в том, чтобы заставить контроллер генерировать множество новых потоковых правил за короткий промежуток времени. В результате такой атаки коммутатору нужно обработать множество вариантов таблицы потоков данных. Критерий переполнения будет иметь следующий вид:

$$R_{flow\ rule} > n_{flow\ table}/t_{flow\ table},$$

где $R_{flow\ rule}$ — максимальное количество потоковых правил, генерируемых в секунду; $n_{flow\ table}$ — максимальное количество записей в таблице потоков коммутатора; $t_{flow\ table}$ — время записи нового потокового правила. В результате атаки создается множество правил обработки потока данных в коммутаторе, по которым они обрабатываются с такой интенсивностью, что коммутатор не успевает их обработать и отказывается обрабатывать новые правила из-за переполнения. Решением проблемы DDoS может быть хорошо продуманная стратегия фильтрации с использованием межсетевых экранов и динамическое управление пропускной способностью каналов связи. Управляемая пропускная способность позволит контроллеру и коммутаторам обмениваться сообщениями даже во время атаки и даст возможность заблокировать вредоносный трафик. В HSI можно управлять количеством новых потоковых правил за счет объединения потоков, которые требуются для управления трафиком. Однако следует помнить, что объединение разных потоков для обработки по одним и тем же правилам может привести к непредсказуемым последствиям. Контроллеры, используемые в HSI, имеют возможность автоматически обнаружить DDoS на основе анализа трафика и выявлять в нем характерные аномалии, так как он контролирует всю информацию о текущем состоянии сети.

Таким образом, обзор возможных уязвимостей сетей и методов противодействия им показал, что использование идеологии HSI при построении вычислительных систем позволяет сократить количество сетевых уязвимостей и эффективно реализовывать целый комплекс методов защиты от атак.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Конвергентные и гиперконвергентные вычислительные системы можно рассматривать применительно к любым вычислительным платформам (аппаратным, программным, облачным, нейроморфным, квантовым и т. д.), которые могут обеспечивать пользователю доступ к различным сервисам. Они должны обладать удобным интерфейсом и поддерживать несколько уровней инфраструктуры, обязательными из которых должны быть уровни безопасности, надежности, коммуникационных сервисов, обеспечивающих QoS для разных данных. Кроме того, сеть, лежащая в основе HSI, должна иметь возможности работы с разными видами терминалов (мобиль-



ными, десктопными, активными сетевыми, перспективными UX/UI и т. д.) и иметь единую платформу управления (контроллер, сервер) всем перечнем сервисов, приложений, аппаратных средств и каналов передачи данных. Причем канал передачи данных она должна выбирать в реальном масштабе времени, исходя из QoS и учитывая потребности приложений в производительности и характере трафика. Конвергентные технологии — это не конечная точка в развитии вычислительных систем нового поколения. Она уже сейчас позволяет реализовать на проверенной инфраструктуре HSI контент ориентированный подход, создать вычислительные системы, отходящие от парадигмы соединения конечных точек (end – to – end) к парадигме адресации по контенту или данным (Information Centric Networking, ICN). Эта парадигма предполагает организацию данных независимо от географического положения (сервер, хост) за счет распределенного сетевого кеширования. Ожидаемые преимущества от такого подхода — это более эффективное использования дорогих сетевых ресурсов, масштабируемость вычислительных систем, адаптивность их к меняющемуся QoS. Основой парадигмы являются примитивы publish/subscribe — опубликовать контент (сделать его доступным) и объявить об этом. Реализованы они в сетевой архитектуре, ориентированной на данные (Data Oriented Network Architecture, DONA). Работает это следующим образом: элемент такой сети получает запрос от себя подобном или от хоста. При этом может произойти два события. Если в кэше у элемента есть нужные данные, то он реализует запрос. Если контента нет, элемент DONA запрашивает себе подобных, у которых эти данные имеются. Получив ответ, он кэширует контент и реализует запрос. Этот механизм универсален и применим к любому протоколу, что образует глобальный единый механизм кеширования и доставки любого контента. Причем этот механизм поддерживается всеми узлами сети и ориентирован на всех пользователей, а не только на пользователей ICN. В такой сети обеспечивается безопасность контента, а не безопасность его доставки. Она основана на контентно ориентированной модели и построена на понятии «репутация», так как контент обязательно подписывается поставщиком, и потребители всегда его могут определить. Сетевая архитектура DONA хорошо взаимодействует с технологией blockchain, обеспечивая высокую надежность хранения и защиту контента. Вход в такую сеть защищен криптографически, и несанкционированный вход потребует огромных вычислительных ресурсов, пропорциональных размеру сети. Это же позволяет исключить ошибки человека или компьютера, пропущенные операции, несогласованный вход и т. д. В дальнейшем, эволюционируя, HSI будет использовать и другие перспективные сетевые технологии.

Библиографический список

1. Орлов С. Импортзамещение в ИКТ: взгляд производителей // Журн. сетевых решений / LAN. 2015. № 10. С. 48–50.
2. OpenFlow Switch Specification. Version 1.3.4. Open Networking Foundation. 2014. 171 p. URL: <https://www.opennetworking.org/images/stories/downloads/sdn-resources/onf-specifications/openflow/openflow-switch-v1.3.4.pdf> (дата обращения: 04.07.2017).
3. OpenFlow Table Type Patterns. Version 1.0. Open Networking Foundation. 2014. 55 p. URL: <https://www.opennetworking.org/images/stories/downloads/sdn-resources/onf-specifications/openflow/OpenFlow%20Table%20Type%20Patterns%20v1.0.pdf> (дата обращения: 04.07.2017).
4. Clos C. A study of non-blocking switching networks // The Bell System Technical Journal. 1953. Vol. 32, № 2. P. 406–424. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/>



- stamp.jsp?arnumber=6770468 (дата обращения: 04.07.2017). DOI: 10.1002/j.1538-7305.1953.tb01433.x.
5. *Зотов И. А., Костенко В. А.* Алгоритм распределения ресурсов в центрах обработки данных с единым планировщиком для различных типов ресурсов // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2015. № 1. С. 61–71. DOI: 10.7868/S000233881501014X.
 6. *Meng X., Pappas V., Zhang L.* Improving the Scalability of Data Center Networks with Traffic-aware Virtual Machine Placement // INFOCOM, 2010 Proceedings IEEE. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=5461930> (дата обращения: 04.07.2017). DOI: 10.1109/INFCOM.2010.5461930.
 7. *Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C.* Introduction to Algorithms. Cambridge MA : MIT Press and McGrawHill, 2001. P. 595–601.
 8. *Zhao M., Figueiredo R. J.* Experimental Study of Virtual Machine Migration in Support of Reservation of Cluster Resources // VTDC '07 Proceedings of the 2nd international workshop on Virtualization technology in distributed computing. 2007. P. 1–8. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=5483380> (дата обращения: 04.07.2017). DOI: 10.1145/1408654.1408659.
 9. *Смелянский П. Л.* Концепция программно-конфигурированных сетей : от идеи до стандартизации // CONNECT! Мир связи : Наука. Бизнес. Управление. 2016. № 4. С. 62–67.
 10. *Смелянский П.* Настоящее и будущее SDN&NFV // Первая миля. 2016. № 3. С. 78–85.

Образец для цитирования:

Соловьев В. М. Конвергентные и гиперконвергентные вычислительные системы // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 84–100. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-84-100.

Convergent and Hyperconvergent Computing Systems

V . M. Solovyev

Vladimir M. Solovyev, <https://orcid.org/0000-0003-3778-8201>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, svm@sgu.ru

In the work the questions of construction of hyperconvergent computer systems and their functioning on the basis of a program-configurable network are considered. The features of the OpenFlow protocol and technological solutions that transfer control of the software-configurable network to a dedicated controller (server) are presented. A graph model of resource management of a hyperconvergent computer system is proposed that meets the requirements of a given quality of service on the one hand and economic requirements on the other. Based on the proposed model, an embodiment of a greedy algorithm for managing a converged infrastructure using the OpenFlow protocol and realizing requests for physical resources using the controller software is considered. The advantages of multithreading routing realized with the environment of hyperconvergent infrastructure are shown, using for its description the minimal Steiner tree. The issues of reliability and safety of hyperconvergent computing systems that make most of today's threats not relevant are considered. The paper shows the possibilities of import substitution and the prospects for switching to a network infrastructure, focused on content.

Key words: converged infrastructure, hyperconvergent systems, import substitution, software defined networks (SDN), OpenFlow protocol, virtual data processing center (VDPC), scheduling of computing resources, greedy algorithms, Service Level Agreement (SLA), Multi-Threaded Routing (MRT), Quality of Service (QoS), DDoS attacks, data interception, Information Centric Networking (ICN).



References

1. Orlov S. Import substitution in ICT: the view of producers. *Network Solutions Journal / LAN*, 2015, no. 10, pp. 48–50 (in Russian).
2. *OpenFlow Switch Specification. Version 1.3.4. Open Networking Foundation*. 2014. 171 p. Available at: <https://www.opennetworking.org/images/stories/downloads/sdn-resources/onf-specifications/openflow/openflow-switch-v1.3.4.pdf> (Accessed 4 July 2017).
3. *OpenFlow Table Type Patterns. Version 1.0. Open Networking Foundation*. 2014. 55 p. Available at: <https://www.opennetworking.org/images/stories/downloads/sdn-resources/onf-specifications/openflow/OpenFlow%20Table%20Type%20Patterns%20v1.0.pdf> (Accessed 4 July 2017).
4. Clos C. A study of non-blocking switching networks. *The Bell System Technical Journal*. 1953, vol. 32, no. 2, pp. 406–424. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=6770468> (Accessed 4 July 2017). DOI: 10.1002/j.1538-7305.1953.tb01433.x.
5. Zotov I. A., Kostenko V. A. Resource allocation algorithm in data centers with a unified scheduler for different types of resources. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2015, vol. 54, no. 1, pp. 59–68. DOI: 10.1134/S1064230715010141.
6. Meng X., Pappas V., Zhang L. Improving the Scalability of Data Center Networks with Traffic-aware Virtual Machine Placement. *INFOCOM, 2010 Proceedings IEEE*. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=5461930> (Accessed 4 July 2017). DOI: 10.1109/INFCOM.2010.5461930.
7. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. *Introduction to Algorithms*. Cambridge MA, MIT Press and McGrawHill, 2001, pp. 595–601.
8. Zhao M., Figueiredo R. J. Experimental Study of Virtual Machine Migration in Support of Reservation of Cluster Resources. *VTDC '07 Proceedings of the 2nd international workshop on Virtualization technology in distributed computing*, 2007, pp. 1–8. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=5483380> (Accessed 4 July 2017). DOI: 10.1145/1408654.1408659.
9. Smelyansky R. L. The concept of software-configured networks: from idea to standardization. *CONNECT! Mir sviazi: Nauka. Biznes. Upravlenie [CONNECT! The World of Connection: Science. Business. Control]*, 2016, no. 4, pp. 62–67 (in Russian).
10. Smelyansky R. Present and future of SDN&NFV. *Last Mile*, 2016, no. 3, pp. 78–85 (in Russian).

Cite this article as:

Solovyev V. M. Convergent and Hyperconvergent Computing Systems. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 84–100 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-84-100.



УДК 519.68

ЭМПИРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАБОТЫ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕПЛИКАЦИИ ИНДЕКСА

А. Р. Файзлиев, А. А. Хомченко, С. П. Сидоров

Файзлиев Алексей Раисович, кандидат экономических наук, инженер, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, faizlievar1983@mail.ru

Хомченко Андрей Анатольевич, инженер, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, aahomchenko@gmail.com

Сидоров Сергей Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории функций и стохастического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, SidorovSP@info.sgu.ru

Стратегия слежения за индексом (репликация индекса) — это пассивная финансовая стратегия, которая состоит в имитации (репликации) доходности заданного индекса или портфеля. Цель инвестора — найти веса активов в своем портфеле, чтобы получившийся портфель имел минимальную ошибку слежения, в качестве которой обычно используют дисперсию разности между доходностью индекса и доходностью портфеля. В данной работе решение проблемы слежения за индексом рассматривается с ограничением на кардинальность, т. е. с ограничением на максимальное количество активов, удерживаемых в портфеле. Задача слежения за индексом с ограничением на кардинальность является задачей неполиномиальной сложности и, как правило, требует разработки эвристических алгоритмов. В статье рассматриваются различные алгоритмы решения данной задачи в норме l_2 , в частности, жадный алгоритм, алгоритм дифференциальной эволюции и алгоритм типа LASSO. Для проведения эмпирического анализа были использованы открытые данные, относящиеся к трем основным рыночным индексам — Hang Seng (Гонконг), S&P 100 (США) и Nikkei 225 (Япония). Для сравнительного анализа жадного алгоритма с алгоритмом типа LASSO и с алгоритмом дифференциальной эволюции была использована процедура скользящего временного окна. При этом сравнение подходов происходило как по внутривыборочным, так и по вневыборочным данным.

Ключевые слова: слежение за индексом, оптимизация портфеля, жадные алгоритмы, регрессии типа LASSO, алгоритм дифференциальной эволюции.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-101-124

ВВЕДЕНИЕ

В1. Постановка задачи и обозначения

В 1951 году Генри Марковиц заложил фундамент современной портфельной теории на основе применения простых математических идей по проблеме разработки оптимальных инвестиционных портфелей [1]. Однобокое стремление к высокой доходности является плохой стратегией, утверждал Марковиц. Вместо этого рациональные инвесторы должны сбалансировать стремление к высокой доходности с желанием получить низкий риск, который определяется как волатильность доходности.



Для $q > 0$ и $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ положим $\|x\|_q := (\sum_{i=1}^n |x_i|^q)^{1/q}$ и $\|x\|_0 = \lim_{q \rightarrow 0+} \|x\|_q =$ (число ненулевых элементов вектора x). Если $q \geq 1$, то $\|x\|_q$ означает l_q -норму вектора $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть n есть общее число инвестиционных активов. Обозначим r_{ti} – доходность актива i в момент t , $R = (r_{ti})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq t \leq m$. Портфель определяется как вектор весов активов, $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Пусть I_t есть доходность индекса в момент времени t , $1 \leq t \leq m$, и $I = (I_1, \dots, I_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Мы будем полагать, что портфель нельзя изменять в течение инвестиционного периода, и транзакционные издержки отсутствуют. Мы будем считать, что

- 1) короткие продажи допустимы, т. е. веса x_i могут быть отрицательными;
- 2) инвестор имеет одну единицу капитала, т. е. $x^T 1_n = 1$, где 1_n означает вектор из \mathbb{R}^n , в котором каждый компонент равен 1.

В традиционной задаче слежения за индексом цель состоит в нахождении портфеля, который имеет минимальное значение дисперсии ошибки слежения, т. е. суммы квадратов отклонений между доходностями портфеля и рыночным индексом [2]:

$$x^* = \arg \min \frac{1}{m} \|I - Rx\|_2^2 \quad \text{при условии } x^T 1_n = 1. \quad (1)$$

Следует отметить, что стандартная модель Марковица есть частный случай задачи слежения за индексом (1) (см., например [3, 4]). Так как задача (1) есть задача выпуклой оптимизации, ее решение может быть легко получено методом Лагранжа. С другой стороны, задача слежения за индексом (1) есть разновидность многомерной регрессии с дополнительными ограничениями. Однако, как оказалось, перевести решение этой задачи в удовлетворительный алгоритм выбора портфеля в контексте реального мира — это совсем нетривиальная задача.

В работах [5–7] в качестве меры ошибки слежения за индексом использовалась ошибка в норме l_1 , т. е. сумма абсолютных отклонений доходностей индекса и портфеля.

Полученное аналитическое решение задачи слежения за индексом (1) зачатую непригодно для практиков-инвесторов по следующим причинам:

- 1) получающееся оптимальное решение содержит слишком много ненулевых весов, и таким образом, число активов в портфеле слишком велико для управления;
- 2) не учитываются транзакционные издержки;
- 3) короткие продажи невозможны.

Более того, при практическом использовании различных реализаций вычислительных методов решения задачи слежения за индексом (1) возникает множество проблем. В частности, в исследовании [8] было рассмотрено несколько алгоритмов построения портфеля, основанных на идеях Марковица. Авторы обнаружили, что, используя разумный объем обучающих данных, ни один из исследуемых алгоритмов не смог существенно опередить тривиальную стратегию, в которой каждый актив имеет равный вес в портфеле. Эти разочаровывающие результаты работы алгоритмов, вероятно, обусловлены, по крайней мере частично, структурой первоначально предложенной оптимизационной модели Марковица. Так, оптимизация на основе схемы Марковица является эмпирически неустойчивой: малые изменения доходностей активов, волатильности доходностей активов или их корреляций может оказывать большое влияние на результат процедуры оптимизации. В этом смысле классическая задача Марковица оптимизации портфеля может рассматриваться как некорректная обратная задача. Такие задачи часто встречаются во многих других



областях. Различные методы регуляризации были предложены с целью уменьшить нестабильность работы алгоритмов [9].

Прежде всего приведем короткий обзор подходов к решению задачи слежения за индексом (1), позволяющим избежать эти проблемы. Для получения значимых результатов, устойчивых для такого рода некорректных задач, используют, как правило, процедуру регуляризации. Один из стандартных подходов состоит в том, чтобы добавить в целевую функцию штрафное слагаемое, которое может принимать различные формы и в идеале должно иметь содержательную интерпретацию в терминах данной задачи.

В2. l_1 -Регуляризация

В статье [4] предлагается добавить так называемый l_1 -штраф к исходной целевой функции. Таким образом, необходимо найти вектор портфельных весов x , который является решением следующей задачи:

$$x^* = \arg \min \|I - Rx\|_2^2 + \tau \|x\|_1 \quad \text{при условии} \quad x^T 1_n = 1. \quad (2)$$

В [4] отмечается, что добавление штрафа в норме l_1 в целевой функции (1) приводит к нескольким полезным последствиям.

Во первых, штраф в норме l_1 делает возможным учет транзакционных издержек естественным образом. Реальные инвесторы в дополнение к задаче выбора ценных бумаг, которыми они торгуют, должны также заботиться о размере транзакционных издержек, которые они понесут при открытии и закрытии позиции по активам. Затраты по сделке на ликвидном рынке обычно состоят из двух компонент: первая есть фиксированные «накладные расходы», не зависящие от размера сделки, а вторая получается путем умножения на количество сделок и будет пропорциональна размеру транзакции. Для крупных инвесторов накладными расходами можно пренебречь. Тогда общие транзакционные издержки есть сумма произведений абсолютных значений весов на спреды. Мы предполагаем, что спреды являются одинаковыми для всех активов и постоянны для широкого диапазона размеров транзакций. В этом случае стоимость транзакции эффективно описывается штрафом в l_1 .

Во-вторых, это способствует получению так называемых разреженных решений (sparse, sparsity). Тот факт, что минимизация нормы в l_1 может иметь такой эффект, хорошо известен в математической статистике [10]. Методы с минимизацией целевых функций с штрафом в l_1 в настоящее время широко используются тогда, когда желают получить разреженные решения. Разреженность играет важную роль при построении инвестиционных портфелей. Действительно, инвесторы часто хотят, чтобы число позиций, которые они должны создать, контролировать и ликвидировать, было ограничено. Добиться именно такого эффекта можно, увеличивая значения параметра τ в (2).

В-третьих, штраф в норме l_1 регулирует количество коротких позиций в портфеле, полученном в процессе оптимизации. Из-за ограничения $x^T 1_n = 1$ эквивалентная форма целевой функции задачи (2) будет иметь вид

$$\|I - Rx\|_2^2 + 2\tau \sum_{x_i < 0} |x_i| + \tau, \quad (3)$$

в которой последнее слагаемое, конечно, не имеет влияния на результат оптимизации. При бюджетном ограничении $x^T 1_n = 1$, таким образом, штраф в l_1 эквивалентен



штрафу на число коротких позиций. Оптимальный портфель без коротких позиций, полученный путем минимизации целевой функции (1) с двумя ограничениями, — не только $x^T 1_n = 1$, но также и дополнительное ограничение $x_i \geq 0$ для $i = 1, \dots, n$, является в самом деле оптимальным портфелем задачи (3), полученным в пределе для очень больших значений τ . Вполне естественно, что при больших τ вектор положительных весов должен быть достаточно разреженным; разреженность оптимальных портфелей без коротких позиций действительно наблюдается на практике. В работе [4] указано, что в литературе отмечается стабильность неотрицательных решений, но, кажется, совсем не замечена разреженность таких решений, что может быть связано, по-видимому, с использованием итерационных алгоритмов численной оптимизации, в которых применяется критерий останова прежде чем большинство весов сошлись к нулю. При уменьшении τ в целевой функции с штрафом в l_1 ограничение на неотрицательность весов ослабляется, при этом оно не снимается полностью; мы по-прежнему предусматриваем штраф за чрезмерно большие отрицательные веса.

Наконец, как отмечается в работе [4], штраф в норме l_1 приводит к стабилизации решений задачи (2). При наложении штрафа на размер весов соответствующим образом мы уменьшаем чувствительность алгоритмов оптимизации к возможным коллинеарностям (т. е. сильным корреляциям) между активами. В работе [11] показано, что любой штраф в l_p при $1 \leq p \leq 2$ приводит к стабилизации задачи минимизации (1) посредством регуляризации обратной задачи. Стабильность, вызванная штрафом в норме l_1 , является чрезвычайно важной; действительно, это делает возможным работать с ограниченными обучающими выборками данных, которые как раз и используются на практике и в эмпирических работах.

На практике реализовать оптимизационную стратегию для решения задачи (2) достаточно непросто. Сначала рассмотрим случай без ограничений, то есть задачу безусловной минимизации целевой функции задачи (2), а затем обсудим, как учитывать бюджетное ограничение.

Для решения (2) могут быть использованы различные алгоритмы. Особенно удобным является алгоритм на основе гомотопического метода [12, 13], также известный как метод наименьших углов, или LARS (Least Angle Regression) [14]. Этот алгоритм решает задачу минимизации целевой функции в (2) для различных диапазонов значений τ , начиная с очень больших значений и постепенно уменьшая τ , пока не будет достигнута желаемая величина. При изменении τ оптимальное решение $x(\tau)$ движется в пространстве \mathbb{R}^n по кусочно-аффинной траектории. Таким образом, чтобы найти весь локус решений для $x(\tau)$, мы должны определить только критические точки (точки изменения наклона). Таким образом, достаточно найти только точки перегиба этой кусочно-линейной векторной функции. Как правило, число ненулевых активов в портфеле увеличивается с уменьшением τ .

Однако нас интересует проблема минимизации (2) при наличии бюджетного ограничения. В этом случае оригинальный алгоритм LARS не может быть применен. В работе [4] разработана модификация алгоритма LARS, адаптированная для решения произвольной задачи минимизации со штрафом в l_1 с линейными ограничениями, которая позволяет найти решение задачи

$$x^* = \arg \min_{x \in H} \|I - Rx\|_2^2 + \tau \|x\|_1, \quad (4)$$

где H есть аффинное подпространство, определяемое линейными ограничениями.



Адаптированный алгоритм также начинает работу с больших значений τ , которые затем постепенно уменьшаются, пока не будет достигнуто искомое значение. Траектория решений $x(\tau)$ при этом также будет кусочно-линейной. Из-за бюджетного ограничения начальное решение (при больших значениях τ) теперь сложнее получить (в случае задачи без ограничения оно просто равно нулевому вектору). Кроме того, должны быть введены дополнительные переменные (множителей Лагранжа), которые также кусочно-линейны по τ и которые должны пересчитываться при каждой остановке.

Тем не менее при l_1 -регуляризации возникает ряд проблем:

- параметр разреженности (количество активов в портфеле с нулевыми весами) явно не контролируется;
- для того чтобы получить сильно разреженный портфель, необходимо использовать большое значение параметра регуляризации τ , что приводит к (возможно) плохой точности репликации индекса, так как штраф в норме l_1 уменьшает в портфеле доли не только нерелевантных активов, но и релевантных активов [15].

В3. l_2 -Регуляризация

Ряд эмпирических исследований показал, что l_2 -регуляризация (т. е. добавление в целевую функцию штрафа в норме l_2), как правило, приводит к гладкости решения и, следовательно, хорошей работе на вневыборочных данных. l_2 -регуляризация, или регуляризация Тихонова (в английской литературе — ridge regression), активно используется при нахождении приближённых решений некорректно поставленных операторных задач и был разработан А. Н. Тихоновым в 1965 г. в работе [16].

Рассмотрим следующую модель:

$$x^* = \arg \min \|I - Rx\|_2^2 + \tau \|x\|_2^2 \quad \text{при условии} \quad x^T 1_n = 1. \quad (5)$$

Слагаемое l_2 -регуляризации играет очень важную роль в этой модели. Как уже отмечалось, в матрице данных R зачастую имеет место мультиколлинеарность. Действительно, в практических задачах R состоит из векторов исторических значений доходностей n активов, при этом имеется много пар активов с высокой степенью корреляции их доходностей. Когда R обладает такой мультиколлинеарностью, оценки наименьших квадратов, полученных для $\tau = 0$, обладают слишком большим стандартным отклонением. Добавление штрафа в норме l_2 (регуляризация) является одним из способов избежать такой проблемы.

Преимуществом такого подхода является возможность получить решение задачи (5) в явном аналитическом виде. Решение задачи (5) может быть найдено методом Лагранжа:

$$x^\tau = (R^T R + \tau E_n)^{-1} (R^T I - \lambda e_n), \quad (6)$$

где E_n есть единичная матрица размерности $(n \times n)$ и

$$\lambda = \frac{1_n^T (R^T R + \tau E_n)^{-1} R^T I - 1}{1_n^T (R^T R + \tau E_n)^{-1} 1_n}.$$

С другой стороны, одним из главных недостатков l_2 -регуляризации является то, что получившееся решение будет содержать слишком много ненулевых весов. Поэтому часто накладывают в явном виде ограничение на количество активов в портфеле — так называемое ограничение на кардинальность.



В4. Ограничение на кардинальность (l_0 -регуляризация)

Практикующие инвесторы часто сталкиваются с требованиями, которые ограничивают количество активов в их портфеле, например для того, чтобы улучшить его описание и для общения с потенциальными клиентами. Следовательно, хорошая модель слежения за индексом должна определять, сколько и какие активы должны быть в портфеле [17]. Один из наиболее распространенных подходов к решению проблемы слежения за индексом состоит в минимизации ошибки слежения с ограничением на максимальное количество активов, удерживаемых в портфеле.

Рассмотрим задачу минимизации (1) с ограничением на кардинальность:

$$x^* = \arg \min \frac{1}{m} \|I - Rx\|_2^2 \quad \text{при условиях} \quad x^T \mathbf{1}_n = 1, \quad \|x\|_0 \leq K, \quad (7)$$

где K есть ограничение на количество активов в портфеле с ненулевыми весами. Обычно предполагается, что K значительно меньше общего числа активов n , $K \ll n$.

Два хороших обзора литературы по основным количественным методам можно найти в [18, 19]. Большинство подходов основаны на эвристическом поиске, который оказался успешным в пространствах высокой размерности (например, см. [18, 20–26]).

Введение верхней границы на количества активов в портфеле представляет собой задачу оптимизации неполиномиальной сложности (см., например, [27]). На настоящее время существует несколько основных подходов, которые используются для решения задач оптимизации портфеля с ограничением на кардинальность.

- Многие исследователи используют гибридные схемы, основанные на хорошо известных способах смешанного целочисленного линейного программирования (например, метод ветвей и границ) и их развитии [19, 28–32].
- Методы траекторий, для которых для избежания попаданий в локальный минимум допускается временное движение в сторону увеличения минимизируемой функции. Алгоритмы двигаются по некоторому пути (траектории) в пространстве поиска, совершая один шаг за итерацию. Хорошо известные методы данного типа — это алгоритм имитации отжига, алгоритм поиска с запретами и пороговый алгоритм [33]. Жадные алгоритмы также доказали свою эффективность [3, 34].
- Популяционные методы работают с целым набором (популяцией) различных точек пространства поиска (особями) в течение одной итерации, некоторые из которых хуже, чем другие, но это также позволяет избегать решений, сходящихся в локальные минимумы. Эти методы часто работают достаточно хорошо в большом пространстве поиска и их можно разделить на локальные методы поиска и конструктивные методы [33]. Для локальных методов поиска алгоритм переходит от существующего решения к новому решению в каждой итерации. Вероятно, самым известным в этой категории алгоритмом является генетический алгоритм (ГА), впервые описанный Холландом в 1970-е годы. В ГА приспособленность особей вычисляется на основе значения целевой функции. Относительно недавним вкладом в популяционные методы является алгоритм дифференциальной эволюции [23]. Различные типы эвристических алгоритмов были использованы для решения задачи слежения за индексом с ограничением на кардинальность в работах [5, 18, 22, 23, 25, 35, 36]. Хотя эти алгоритмы



и приводят к получению достаточно точного решения задачи, при этом они требуют использования больших вычислительных мощностей, возможностей распараллеливания, временных затрат на подбор оптимальных параметров, а также больших объемов вычислений и времени выполнения. Хороший обзор может быть найден в работах [18, 19, 37].

- Методы с «ослабленным» ограничением на кардинальность. Главной идеей таких методов является использование регуляризации в рамках модели Марковица [4]. Статья [38] рассматривает несколько различных методов регуляризации для задачи оптимизации портфеля. В частности, возможно получить разреженное (sparse) решение задачи оптимизации, заменив ограничение на кардинальность (7) наложение ограничений на соответствующие нормы вектора весов портфеля. Статья [39] предлагает алгоритм с l_q -регуляризацией ошибок слежения за индексом для нахождения разреженных и устойчивых портфелей. В работе [40] получают разреженное (sparse) решение задачи (7), заменив ограничение на кардинальность в (7) ограничением сверху на вектора портфельных весов в l_q -норме, $0 < q < 1$. Ф. Хи с соавт. [41] рассмотрел частный случай данного разреженного решения с $q = 1/2$ и предложили гибридный алгоритм для решения этой задачи в $l_{1/2}$ норме. Методы с использованием l_1 -регуляризации также были рассмотрены в работах [42, 43]. Быстрый метод, основанный на поординатном спуске, разработан в работе [44] для решения задач оптимизации портфеля, в которых веса активов ограничены в норме l_q для $1 \leq q \leq 2$. Для улучшения решений на вневыборочных данных при портфельной оптимизации некоторые авторы используют штрафную функцию в виде взвешенной суммы l_1 -нормы и квадрата l_2 -нормы вектора весов портфеля [45].

Тем не менее этот список не является полным. Используя последние достижения в многоцелевой оптимизации без использования производных [46], в работе [47] предлагается новый подход для работы с кардинальностью при построении портфеля. В работе [48] разработан геометрический подход, модифицирующий целевую функцию в несколько отдельных ограничений. В работе [49] показывается, что приближение оптимального решения исходной задачи можно найти за конечное число итераций с использованием методов полуопределенного программирования (semidefinite programming).

Следует отметить, что существует большое количество проблем в инженерии, математике, экономике, принятии решений и статистике, которые, как правило, являются NP-сложными и для которых стандартные оптимизационные подходы требуют больших вычислительных ресурсов. Среди этих проблем можно выделить следующие: оценка максимального правдоподобия, обобщенный метод моментов, проблемы количественной теории игр, численные модели в экономике (в том числе задачи портфельной оптимизации с ограничением на кардинальность) и мн. др.

В5. Структура работы

В парагр. 1 описываются три алгоритма (жадный алгоритм, алгоритм дифференциальной эволюции и алгоритм типа LASSO) для решения задачи (7). Жадный алгоритм использует идеи работы [3]. Таким образом, наш сравнительный анализ будет основан на алгоритмах из трех различных классов алгоритмов: жадный алгоритм является методом траекторий, алгоритм дифференциальной эволюции представляет



собой популяционный метод и алгоритм типа LASSO является методом с «ослабленным» ограничением на кардинальность.

В парагр. 2, используя технику сравнительного анализа, предложенную в [40], мы сравниваем различные портфели, полученные этими тремя алгоритмами для решения задачи слежения за индексом (7).

Эмпирические результаты показали, что подход на основе регрессии типа LASSO генерирует портфели с лучшим поведением в терминах доходности, в то время как жадный алгоритм дает портфели с лучшим поведением в отношении дисперсии ошибки слежения. Кроме того, алгоритм дифференциальной эволюции и жадный алгоритм генерируют портфели с похожим поведением как в терминах доходности, так и волатильности ошибки репликации.

1. АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕПЛИКАЦИИ ИНДЕКСА С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА КАРДИНАЛЬНОСТЬ

1.1. Жадный алгоритм для минимизации в l_2

Для решения задачи (7) в данной статье мы предлагаем использовать жадные алгоритмы. Выбор жадного алгоритма для нашего анализа основан на том факте, что жадные алгоритмы показали высокую эффективность при решении прикладных задач [3, 34]. Мы можем предположить, что они являются многообещающими и для решения задачи слежения за индексом с ограничением на кардинальность. С другой стороны, жадные алгоритмы не обязательно дают оптимальное решение.

Жадные алгоритмы интенсивно изучались с 80-х годов прошлого века, и их основное применение состояло в получении конструктивных методов для нахождения наилучших m -членных приближений. Основной вклад в разработку жадных алгоритмов внесли Дж. Фридман, В. Стузл, С. Маллат, Дж. Чанг, П. Губер, Л. Джонс, А. Бэррон, Р. ДеВор, В. Н. Темляков, С. В. Конягин и другие. Жадные алгоритмы показали отличную производительность в решении практических проблем машинного обучения. В данной статье мы используем такие методы для решения задачи репликации индекса.

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ есть индексное множество инвестиционных активов. Жадный алгоритм для решения задачи (7) в норме l_2 был рассмотрен в работах [3]. Алгоритм на каждом шаге своей работы добавляет в портфель актив, который еще не входит в портфель и который наиболее (в некотором смысле) «близок» к индексу. Процесс включения новых активов в портфель продолжается до тех пор, пока в портфеле не окажется ровно K активов.

Обозначим через $M_k \subset N$ подмножество индексного множества N , соответствующее k ненулевым элементам x , а через \tilde{R}_{M_k} — подматрицу матрицы доходностей R размерности $(m \times |M_k|)$, в которую вошли столбцы M_k . Тогда задача (7) с $x_i = 0$ для $i \in N \setminus M_k$ будет иметь вид

$$\tilde{x}^* = \arg \min_{\tilde{x}} \|I - \tilde{R}_{M_k} \tilde{x}\|_2^2 \quad \text{при условии} \quad \tilde{x}^T \mathbf{1}_{|M_k|} = 1, \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^{|M_k|}. \quad (8)$$

Обозначим $f(M_k) := \|I - \tilde{R}_{M_k} \tilde{x}^*\|_2^2$. Оптимальное решение задачи (8) может быть найдено методом Лагранжа:

$$\tilde{x}_{M_k} = (\tilde{R}_{M_k}^T \tilde{R}_{M_k})^{-1} (\tilde{R}_{M_k}^T I - \lambda e_k), \quad (9)$$

и

$$\lambda = \frac{\mathbf{1}_k^T (\tilde{R}_{M_k}^T \tilde{R}_{M_k})^{-1} \tilde{R}_{M_k}^T I - 1}{\mathbf{1}_k^T (\tilde{R}_{M_k}^T \tilde{R}_{M_k})^{-1} \mathbf{1}_k}.$$



Алгоритм 1: Жадный алгоритм в L_2

начало алгоритма

Пусть $M_0 = \emptyset$ и $k = 1$. Положить $f(M_0)$ достаточно большим.

· **цикл пока $k \leq K$ выполнять**

$\forall s \in N \setminus M_{k-1}$ вычислить $\tilde{x}_{M_{k-1} \cup \{s\}}$, используя (9).

 Выбрать $s^* = \arg \min_{s \in N \setminus M_{k-1}} f(M_{k-1} \cup \{s\})$ и положить $\tilde{x}_{M_k} = \tilde{x}_{M_{k-1} \cup \{s^*\}}$.

 Положить $M_k = M_{k-1} \cup \{s^*\}$ и $k = k + 1$.

Присвоить $x_G = \tilde{x}_{M_K}$ и $M_G = M_K$.

Вернуть x_G и M_G .

конец алгоритма

1.2. Алгоритм типа LASSO

Регрессия LASSO (least absolute shrinkage and selection operator) была описана в 1996 г. в работе [50].

Как уже отмечалось, введение штрафной функции в норму l_1 в целевую функцию может привести к эффекту получения разреженных решений (с большим числом нулей). Этот эффект наблюдался во многих исследованиях и на практике. Минимизация нормы в l_1 в настоящее время широко используется для получения разреженных (sparse) решений [4]. Статья [4] использует подход на основе регрессии типа LASSO для задачи (1), переформулированной как регрессия наименьших квадратов с ограничениями

$$x^\delta = \arg \min \|x\|_1 \quad \text{при условиях} \quad \|I - Rx\|_2 \leq \delta, \quad x^T 1_n = 1, \quad (10)$$

где δ есть скаляр, который выбирается таким образом, чтобы истинное решение попадало в допустимое множество с высокой вероятностью. Задача вида (10) без ограничения $x^T 1_n = 1$ называется регрессией LASSO [50]. Регрессия типа LASSO в целом способна достаточно точно оценивать почти разреженные вектора. Эффективные алгоритмы для задач восстановления разреженных векторов были разработаны в работе [51]. Для численного решения задачи (10) в нашей работе мы использовали Matlab-библиотеку TFOCS, которая сопровождает статью [51].

Число активов в портфеле с ненулевыми весами (т. е. кардинальность K) оптимального решения задачи (10) зависит от параметра δ . Большие (меньшие) значения параметра δ соответствуют меньшим (большим) значениям кардинальности K .

1.3. Алгоритм дифференциальной эволюции для минимизации в l_2

Недавнее дополнение к классу эволюционной эвристики является метод дифференциальной эволюции, предложенный в [52, 53]. Некоторые алгоритмы дифференциальной эволюции и генетические алгоритмы для решения задачи слежения за индексом были разработаны в работе [54].

В нашей работе мы используем алгоритм дифференциальной эволюции (ДЭ) для решения задачи (7). ДЭ является одной из возможных модификаций стандартных генетических алгоритмов и основана на эволюционном принципе.

В ходе ДЭ на каждой итерации создается популяция из особей (точек пространства поиска), которые получены из особей предыдущей популяции путем моди-



фикации в соответствии с эволюционными принципами, при этом с ростом числа популяций особи сходятся в некоторую точку пространства решений, которая является глобальным оптимумом. Начальная популяция P состоит из векторов $x^i = (x_0^i, \dots, x_n^i)^T \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, N$, N есть количество портфелей в исходной популяции и выбирается следующим образом. Сначала мы случайным образом генерируем N векторов y^i из \mathbb{R}^n . Для каждого y^i полагаем нулю $n - K$ компонентов y_j^i вектора y^i , которые ближе всего к нулю (кардинальность y^i становится K), а затем полагаем $x_j^i = y_j^i / (\sum_{s=1}^n y_s^i)$, чтобы добиться выполнения бюджетного ограничения $x^T \mathbf{1}_n = 1$.

Под портфелями $x^i \subset D$ понимаются точки n -мерного пространства, в которых определена целевая функция $\frac{1}{m} \|I - Rx\|_2^2$, которую требуется минимизировать. На каждой итерации алгоритм генерирует новое поколение портфелей (популяций) случайным образом, комбинируя портфели из предыдущего поколения. Для каждого портфеля x^i из предыдущего поколения выбирается три различных случайных портфеля x^a , x^b , x^c среди портфелей предыдущего поколения, генерируется портфель \tilde{x}^i следующим образом:

$$\tilde{x}_j^i = x_j^a + (F + z_1)(x_j^b - x_j^c + z_2),$$

где \tilde{x}_j^i , x_j^a , x_j^b , x_j^c — j -е компоненты векторов \tilde{x}^i , x^a , x^b , x^c соответственно; F — положительная действительная константа из интервала $[0, 2]$, управляющая усилением влияния разности $x_j^b - x_j^c + z_2$ на результирующий вектор, z_1 и z_2 или равны нулю с малыми вероятностями (например, 0.0001 и 0.0002 соответственно), или являются нормально распределенными случайными величинами с математическим ожиданием, равным нулю, и малым стандартным отклонением (например, 0.02).

Параметры z_1 и z_2 есть необязательные параметры алгоритма дифференциальной эволюции, они необходимы для внесения «шума» в вычисление результирующего вектора, что помогает избежать попадания в локальные экстремумы.

Компонента \hat{x}_j^i вектора \hat{x}^i заменяет x_j^i с вероятностью π , а портфель \hat{x}^i переходит в следующее поколение при выполнении условия

$$\|I - R\hat{x}^i\|_2^2 < \|I - Rx^i\|_2^2. \quad (11)$$

Эволюция популяций соответствует динамике «роя мешек» (т. е. облаку случайных точек). Облако движется вдоль рельефа минимизируемой функции, повторяя особенности ландшафта. В случае падения в овраг облако точек принимает форму этого оврага, и распределение точек таково, что ожидание разности двух случайных векторов направлено вдоль длинной стороны оврага. Это дает быстрое движение вдоль узких вытянутых оврагов. Это обеспечивает быстрое движение по узким ущельям. В подобных условиях градиентные методы имеют колебательную динамику «от стены к стене».

Псевдокод минимизации функции $\frac{1}{m} \|I - Rx\|_2^2$ с помощью алгоритма дифференциальной эволюции приведен ниже.



Алгоритм 2: АЛГОРИТМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЭВОЛЮЦИИ В l_2

начало алгоритма

Генерируем N случайно распределенных $y^i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, N$
 $\forall i$, присваиваем $y_j^i = 0$ для $n - K$ компонентов, наиболее близких к 0
 $\forall i$, формируем начальную популяцию P следующим образом
 $x_j^i = y_j^i / (\sum_{s=1}^n y_s^i), j = 1, \dots, n$
 задаём число итераций L
 • **цикл пока $t \leq L$ выполнять**

for каждого $x^i, i = 1, \dots, N$, из матрицы P **do**
 выбираем 3 случайных вектора x^a, x^b, x^c
for каждого компонента j вектора x_j^i **do**
 с вероятностью $\pi_1: z_{1,j} \leftarrow N(0, \sigma_1)$, иначе $z_{1,j} = 0$
 с вероятностью $\pi_2: z_{2,j} \leftarrow N(0, \sigma_2)$, иначе $z_{2,j} = 0$
 $u_j \leftarrow U(0, 1)$
 если $u_j < 1 - \pi$ то
 $\tilde{x}_j^i = x_j^i$
 иначе $\tilde{x}_j^i = x_j^a + (F + z_{1,j})(x_j^b - x_j^c + z_{2,j})$
 $\forall \tilde{x}^i$, присваиваем $\tilde{x}_j^i = 0$ для $n - K$ компонентов, наиболее близких к 0
 $\forall \tilde{x}^i \in P$, заменяем $\hat{x}^i = \tilde{x}^i / \sum_s \tilde{x}_s^i$
 если условия (11) выполнены, то \hat{x}^i заменяем x^i в P

ищем $x^{i*} = \arg \min_i \frac{1}{m} \|I - Rx^i\|_2^2$
 возвращаем x^{i*}

конец алгоритма

2. ЭМПИРИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Описание данных

В нашем эмпирическом анализе мы использовали открытые данные, относящиеся к трем основным рыночным индексам, которые расположены в хранилище OR-Library [18, 55]. Эти три рыночных индекса включают Hang Seng (Гонконг, $n = 31$), S&P 100 (США, $n = 98$) и Nikkei 225 (Япония, $n = 225$) для $m = 290$ временных периодов каждый (недельные доходности), взятые из хранилища [18]. Описательные статистики доходностей индексов, представленные в табл. 1, показывают, что временные ряды доходностей демонстрируют типичные паттерны финансовых временных рядов: средние значения находятся около нуля, легкую асимметрию и «толстые хвосты».

Таблица 1 / Table 1

Описательные статистики недельных доходностей индексов

Descriptive statistics of weekly index returns

Data set	n	m	mean, %	std, %	skewness	kurtosis	min	max
Hang Seng	31	290	0.42	3.32	-0.04	3.85	-0.12	0.11
S&P 100	98	290	0.31	1.53	0.17	3.73	-0.04	0.06
Nikkei 225	225	290	-0.01	2.86	0.44	4.85	-0.11	0.12



2.2. Сравнение алгоритмов методом скользящего окна

Чтобы сравнить подходы, описанные в парагр. 1, для решения задачи репликации индекса, используем процедуру скользящего временного окна, описанную в статье [40]. Определяем оптимальную модель, используя окно в 100 наблюдений (недель), и оставляем его без изменений для последующих 10 вневыборочных торговых недель с целью тестирования. Затем это (внутривыборочное) окно сдвигается вперед на 10 недель, и находится новый портфель решения задачи слежения за индексом, используя окно из этих новых 100 наблюдений, и затем снова оставляется без изменений для последующих 10 вневыборочных недель и т. д. Таким образом, портфели пересчитываются один раз в 10 недель. Отметим, что сравнение моделей по внутривыборочным данным проходило по последним 10 наблюдениям (внутривыборочным) окна в 100 наблюдений. Это сделано для того, чтобы внутривыборочные и вневыборочные выборки были одинаковой размерности.

Задача слежения за индексом с ограничением на кардинальность была реализована с использованием программного обеспечения Matlab, а также встроенных и специально разработанных функций. Все расчеты также проводились в Matlab. Работа проведена в 64-битной системе MS Windows 10. В нашем вычислительном эксперименте мы использовали компьютер AMD FX-8350 с процессором 4.00 ГГц и 8.0 Гб оперативной памяти.

Сравнительный анализ жадного алгоритма и алгоритма типа LASSO

Табл. 2 представляет эмпирические результаты как для внутривыборочных, так и для вневыборочных значений волатильностей ошибки слежения, эксцесса доходностей портфелей и корреляций для множеств данных Hang Seng, S&P 100 и Nikkei 225 и для значений δ , равных 0.9 и 0.25. Статистически значимое различие t -статистики (t_{diff}) с уровнем значимости 10% (5%, 1%) между двумя подходами обозначено как * (**, ***). В строках *corr* приведены значения коэффициента корреляции между доходностью портфеля и доходностью индекса.

Таблица 2 / Table 2

Результаты сравнения алгоритма типа LASSO (Lasso) и жадного алгоритма (Greedy)
The results of comparing of the LASSO algorithm (Lasso) and the greedy algorithm (Greedy)

Набор данных Data set	$\delta = 0.9$				$\delta = 0.25$			
	Внутривыборочные Intra-sample		Вневыборочные Out-sample		Внутривыборочные Intra-sample		Вневыборочные Out-sample	
	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy
Hang Seng	5–10 активов / assets				12–17 активов / assets			
	<i>Недельная волатильность / Weekly volatility, %</i>							
Mean	1.61	0.42	1.66	0.52	0.59	0.18	0.69	0.30
Std	0.79	0.13	0.81	0.16	0.21	0.07	0.29	0.15
t_{diff}	6.50***		6.04***		8.22***		5.2***	
	<i>Доходность относительно индекса / Excess return, %</i>							
Mean	0.67	0.06	0.39	0.05	0.33	0.03	0.16	0.06
Std	0.47	0.13	0.40	0.13	0.19	0.06	0.18	0.10
t_{diff}	5.49***		3.52***		6.57***		2.26**	
<i>corr</i>	0.85	0.99	0.86	0.98	0.98	0.99	0.97	0.99



Окончание табл. 2 / End of Table 2

Набор данных Data set	$\delta = 0.9$				$\delta = 0.25$				
	Внутривыборочные In-of-sample		Вневыборочные Out-of-sample		Внутривыборочные In-of-sample		Вневыборочные Out-of-sample		
	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy	
S&P 100	8–16 активов / assets				19–34 активов / assets				
	<i>Недельная волатильность / Weekly volatility, %</i>								
	Mean	1.28	0.34	1.49	0.68	0.56	0.15	0.76	0.44
	Std	0.42	0.11	0.64	0.19	0.13	0.05	0.25	0.13
	t_{diff}	9.50***		5.23***		12.8***		5.01***	
	<i>Доходность относительно индекса / Excess return, %</i>								
	Mean	0.59	-0.02	-0.10	-0.01	0.40	0.00	-0.01	-0.01
	Std	0.38	0.12	0.48	0.20	0.17	0.05	0.24	0.12
	t_{diff}	6.71***		0.73		10.06***		0.01	
	<i>corr</i>	0.75	0.96	0.72	0.90	0.91	0.99	0.86	0.95
Nikkei 225	10–20 активов / assets				31–40 активов / assets				
	<i>Недельная волатильность / Weekly volatility, %</i>								
	Mean	1.21	0.24	1.24	0.66	0.49	0.08	0.68	0.50
	Std	0.48	0.07	0.55	0.28	0.17	0.02	0.25	0.24
	t_{diff}	8.85**		4.08***		10.13***		2.33**	
	<i>Доходность относительно индекса / Excess return, %</i>								
	Mean	0.66	0.01	0.01	-0.01	0.43	0.01	0.01	0.00
	Std	0.48	0.07	0.49	0.15	0.22	0.04	0.27	0.11
	t_{diff}	5.87***		0.21		8.00***		0.16	
	<i>corr</i>	0.88	0.99	0.86	0.96	0.98	0.99	0.95	0.98

Следуя [40], мы полагали максимальное число активов K в ограничении на кардинальность для жадного алгоритма равным числу ненулевых весов, найденных на основе подхода типа LASSO в соответствующих окнах.

Табл. 2 показывает, что алгоритм типа LASSO дает портфели с лучшим поведением в терминах доходности для всех внутривыборочных множеств, и для 2 из 6 вневыборочных случаях. С другой стороны, жадный алгоритм приводит к портфелям с лучшими характеристиками в терминах волатильности ошибки слежения как на внутривыборочных, так и вневыборочных множествах данных. Жадный алгоритм даёт более высокие значения в отношении корреляции с индексом, особенно сильное различие наблюдается для показателя $\delta = 0.9$ (когда в портфеле присутствует относительно небольшое число активов), как для внутривыборочных, так и для вневыборочных данных.

Все данные характеризуются толстыми хвостами (куртозис больше 3), при этом присутствует легкая асимметрия для всех множеств данных (табл. 3).

Следует отметить, что эти два алгоритма приводят к различным портфелям в смысле выбора входящих в них активов. Пересечение множеств активов, входящих в портфели, полученные жадным алгоритмом и алгоритмом на основе LASSO-регрессии, зачастую было пустым.

Сравнение времени работы алгоритмов приведены в табл. 4. Результаты показывают, что жадный алгоритм работает на порядки быстрее, чем алгоритм типа LASSO на всех наборах данных.



Таблица 3 / Table 3

Значения асимметрии, эксцесса и величины VaR на уровне 95% для алгоритма типа LASSO (Lasso) и жадного алгоритма (Greedy)

The skewness, kurtosis and 95%-VaR values for the LASSO algorithm (Lasso) and the greedy algorithm (Greedy)

Набор данных Data set	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy
Hang Seng	5–10 активов / assets ($K_{\text{mean}} = 7.32$) $\delta = 0.9$		12–17 активов / assets ($K_{\text{mean}} = 15.16$) $\delta = 0.25$	
	<i>Распределение доходностей (вневыборочных)</i> <i>Distribution of returns (out-of-sample)</i>			
Skew	–0.03	–0.03	–0.10	–0.01
Kurt	3.27	3.45	3.42	3.70
VaR ₉₅	0.94	0.95	0.95	0.95
S&P 100	8–16 активов / assets ($K_{\text{mean}} = 12.11$) $\delta = 0.9$		19–34 активов / assets ($K_{\text{mean}} = 26.68$) $\delta = 0.25$	
	<i>Распределение доходностей (вневыборочных)</i> <i>Distribution of returns (out-of-sample)</i>			
Skew	–0.09	0.12	0.07	0.23
Kurt	3.53	3.08	3.10	3.28
VaR ₉₅	0.96	0.97	0.97	0.98
Nikkei 225	10–20 активов / assets ($K_{\text{mean}} = 15.07$) $\delta = 0.9$		31–40 активов / assets ($K_{\text{mean}} = 34.84$) $\delta = 0.25$	
	<i>Распределение доходностей (вневыборочных)</i> <i>Distribution of returns (out-of-sample)</i>			
Skew	0.65	0.11	0.47	0.20
Kurt	5.10	4.98	4.83	5.72
VaR ₉₅	0.96	0.96	0.96	0.96

Таблица 4 / Table 4

Значения процессорного времени в секундах для алгоритма типа LASSO (Lasso) и жадного алгоритма (Greedy)

The CPU-time values in seconds for the LASSO algorithm (Lasso) and the greedy algorithm (Greedy)

Набор данных Data set	Lasso	Greedy	Lasso	Greedy
	$\delta = 0.9$		$\delta = 0.25$	
Hang Seng	289.163	0.934	566.441	1.982
S&P 100	352.615	5.022	769.465	13.188
Nikkei 225	371.550	17.119	853.244	52.513

Сравнительный анализ жадного алгоритма и алгоритма дифференциальной эволюции

Хорошо известно, что параметры эвристических алгоритмов, в том числе алгоритма дифференциальной эволюции, оказывают огромное влияние на их работу и результаты. Иногда даже небольшие изменения параметров могут привести к лучшим результатам. Например, если размер популяций N будет мал и время вычисления фиксировано, то это позволит создать большое количество поколений (итераций) L , и вероятность сходимости к локальному экстремуму может увеличиться. Слишком большой размер популяции N может привести к ситуации, когда число



итераций L будет недостаточно для нахождения глобального экстремума. Вопрос о том, какой должен быть оптимальный размер популяции в алгоритмах с мутацией остается открытым. Очень важно выбрать подходящие параметры алгоритма для каждого из рассматриваемых наборов данных. Для достижения наилучших результатов мы протестировали алгоритм с использованием первого набора данных (Hang Seng), выбирая подходящее значение для каждого параметра и анализируя эффективность алгоритма с целью определения наилучшего набора параметров для нашего исследования.

Эффективность алгоритма дифференциальной эволюции зависит от таких параметров, как вес F , вероятность мутации π , размер популяции N и число поколений L . Параметр F является ключевым параметром метода дифференциальной эволюции. Известно, что $F \in [0, 2]$. Мы получили, что при $F > 1$ решение является неустойчивым. В результате тестирования было установлено, что значение $F = 0.5$ дает нам лучшие результаты по всем критериям. Следующим шагом является выбор оптимального значения вероятности мутации. Мы получили, что значение $\pi = 0.5$ обеспечивает приемлемое время расчета и устойчивость решения. Следует отметить, что параметры F и π должны быть выбраны для конкретной целевой функции и основываться на особенностях данной задачи, в то время как значения N и L , напротив, в первую очередь зависят от размера экспериментальных данных.

Таким образом, мы определяем значения N и L для данных Hang Seng с 32 активами (с учетом индекса в качестве актива), а затем для больших объемов данных мы увеличиваем значения N и L в пропорции к лучшим значениям, найденным для данных Hang Seng. Значения $N = 20, 40, 60$ были протестированы с целью определения подходящего параметра с точки зрения времени расчета и оптимального решения. Как результат, начальная популяция с $N = 40$ обеспечивает лучшую доходность и значение волатильности с разумными временными затратами. Значение $N = 60$ требует значительно больше времени по сравнению с $N = 40$, обеспечивая такое же качество решения, в то время как меньшая популяция приводит к неустойчивому решению. Аналогичным образом было выбрано лучшее число поколений $L = 70$ для данных Hang Seng, обеспечивая минимальную волатильность в разумные сроки. Следует также отметить, что параметры L и N для Nikkei 225 набора данных идентичны с набором данных S&P 100 в нашем эмпирическом исследовании, так как для набора данных Nikkei 225 алгоритм дифференциальной эволюции находит решение быстро. Следовательно, нет смысла увеличивать количество поколений и размер популяции.

Табл. 5 представляет эмпирические результаты как для внутривыборочных, так и для вневыборочных значений волатильностей ошибки слежения, эксцесса доходностей портфелей и корреляций для множеств данных Hang Seng, S&P 100, Nikkei 225 и для кардинальности K , равной 5 и 20. Статистически значимое различие t -статистики (t_{diff}) с уровнем значимости 10% (5%, 1%) между двумя подходами обозначено как * (**, ***). В строках *corr* приведены значения коэффициента корреляции между доходностью портфеля и доходностью индекса.

Значения t -статистики из табл. 5 показывают, что различие между алгоритмом дифференциальной эволюции и жадным алгоритмом с точки зрения доходностей относительно индекса является незначимым для всех выборок. Также эта тенденция прослеживается и с точки зрения волатильности, за исключением 2 из 6 внутривыборочных данных для Nikkei 225 (возможно, что алгоритм дифференциальной



эволюции в этом случае оказался хуже из-за недостаточного числа операций, либо популяций, которые бы позволили ему получить более точное решение), где жадный алгоритм приводит к значимому улучшению портфеля.

Таблица 5 / Table 5

Результаты сравнения алгоритма дифференциальной эволюции (DE) и жадного алгоритма (Greedy) для трех наборов данных

The comparison results for the algorithm of differential evolution (DE) and the greedy algorithm (Greedy) for three data sets

Набор данных Data set	$K = 5$				$K = 20$			
	Внутривыборочные In-of-sample		Вневыборочные Out-of-sample		Внутривыборочные In-of-sample		Вневыборочные Out-of-sample	
	DE	Greedy	DE	Greedy	DE	Greedy	DE	Greedy
Hang Seng	<i>Недельная волатильность / Weekly volatility, %</i>							
Mean	0.54	0.57	0.60	0.67	0.15	0.15	0.23	0.24
Std	0.18	0.18	0.15	0.19	0.07	0.07	0.13	0.14
t_{diff}	0.90		1.60		0.02		0.25	
	<i>Доходность относительно индекса / Yield against the index, %</i>							
Mean	0.11	0.06	0.14	0.10	0.03	0.02	0.05	0.05
Std	0.15	0.17	0.16	0.20	0.05	0.05	0.08	0.07
t_{diff}	1.00		0.68		0.24		0.10	
<i>corr</i>	0.98	0.98	0.98	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00
S&P 100	<i>Недельная волатильность / Weekly volatility, %</i>							
Mean	0.67	0.67	1.00	1.01	0.19	0.19	0.48	0.49
Std	0.14	0.14	0.30	0.22	0.04	0.05	0.17	0.14
t_{diff}	0.01		0.19		0.08		0.22	
	<i>Доходность относительно индекса / Yield against the index, %</i>							
Mean	0.00	0.00	0.04	-0.02	-0.01	0.01	-0.01	-0.03
Std	0.19	0.20	0.26	0.24	0.05	0.07	0.12	0.15
t_{diff}	0.07		0.81		0.59		0.38	
<i>corr</i>	0.90	0.88	0.81	0.79	0.99	0.99	0.93	0.94
Nikkei 225	<i>Недельная волатильность / Weekly volatility, %</i>							
Mean	0.78	0.54	1.07	1.06	0.24	0.17	0.60	0.59
Std	0.19	0.12	0.38	0.34	0.04	0.04	0.14	0.19
t_{diff}	4.78***		0.16		5.62***		0.11	
	<i>Доходность относительно индекса / Yield against the index, %</i>							
Mean	0.01	-0.05	0.01	-0.07	0.01	0.01	-0.02	0.00
Std	0.18	0.15	0.28	0.24	0.07	0.05	0.17	0.13
t_{diff}	1.07		0.99		0.43		0.49	
<i>corr</i>	0.94	0.97	0.89	0.88	0.99	1.00	0.96	0.96

Жадный алгоритм и алгоритм дифференциальной эволюции дают сходные результаты в отношении корреляции с эталоном (индексом). Однако можно отметить, что у жадного алгоритма, как правило, корреляция меньше, чем у алгоритма дифференциальной эволюции для внутривыборочных данных, и больше для вневыборочных данных.

Для двух из трех наборов данных характерно наличие тяжелых хвостов (куртозис > 3), при этом присутствует незначительная асимметрия для всех наборов данных. Необходимо отметить, что несмотря на то что мы не накладывали ограничение на положительность долей активов x_i , оба алгоритма предлагают осуществлять короткие продажи только при кардинальности $K = 20$. Портфели, полученные по жадному



алгоритму и алгоритму дифференциальной эволюции существенно не отличаются по подбору активов, а именно, пересечение множеств активов, выбранных первым и вторым алгоритмом, были значительными.

Табл. 6 показывает, что значения асимметрии, эксцесса и величина VaR на 95 % уровне значимости для алгоритма дифференциальной эволюции и жадного алгоритма очень похожи.

Таблица 6 / Table 6

Значения асимметрии, эксцесса и величины VaR на уровне 95 % для алгоритма дифференциальной эволюции (DE) и жадного алгоритма (Greedy)
 The skewness, kurtosis and 95%-VaR values for the differential evolution algorithm (DE) and the greedy algorithm (Greedy)

Набор данных Data set	DE	Greedy	DE	Greedy
	K=5		K=20	
Hang Seng	<i>Распределение доходностей (вневыборочных)</i> <i>Distribution of returns (out-of-sample)</i>			
Skew	0.06	0.04	0.07	0.08
Kurt	3.50	3.44	3.63	3.66
Var_95	0.95	0.95	0.95	0.95
S&P 100	<i>Распределение доходностей (вневыборочных)</i> <i>Distribution of returns (out-of-sample)</i>			
Skew	0.21	0.16	0.26	0.30
Kurt	2.49	2.75	3.44	3.30
Var_95	0.97	0.97	0.98	0.98
Nikkei 225	<i>Распределение доходностей (вневыборочных)</i> <i>Distribution of returns (out-of-sample)</i>			
Skew	0.36	0.14	0.29	0.11
Kurt	5.14	5.20	5.13	5.28
Var_95	0.96	0.95	0.96	0.96

Сравнение времени работы алгоритмов приведены в табл. 7. Результаты показывают, что жадный алгоритм также работает на порядки быстрее, чем и алгоритм дифференциальной эволюции на всех наборах данных.

Таблица 7 / Table 7

Значения процессорного времени в секундах для алгоритма дифференциальной эволюции (DE) и жадного алгоритма (Greedy)
 The CPU-time values in seconds for the differential evolution algorithm (DE) and the greedy algorithm (Greedy)

Набор данных Data set	Параметры DE DE Parameters	DE	Greedy	DE	Greedy
		K = 5		K = 20	
Hang Seng	$L = 70, N = 40$	13.995	0.668	30.254	1.800
S&P 100	$L = 200, N = 120$	217.172	2.218	340.862	8.415
Nikkei 225	$L = 200, N = 120$	447.273	4.856	575.207	21.332

ВЫВОДЫ

Слежение за индексом является одной из форм пассивного управления капиталом, которая нацелена на создание оптимальных портфелей для репликации индекса, балансирующих между риском и доходностью. Однако полная модель репликации индекса, как правило, включает в себя почти все доступные активы на рынке, что



приводит к большим затратам по сделкам и портфелю, которым очень трудно управлять из-за большого числа активов.

Подводя итоги по сравнению жадного алгоритма с алгоритмом типа LASSO, необходимо отметить, что эти два алгоритма приводят к совершенно различным портфелям в смысле выбора входящих в них активов. При этом алгоритм типа LASSO дает портфели с лучшим поведением в терминах доходности, а жадный алгоритм приводит к портфелям с лучшими характеристиками в терминах волатильности.

Что касается сравнения жадного алгоритма и алгоритма дифференциальной эволюции, необходимо отметить, что портфели, полученные с использованием жадного алгоритма и алгоритма дифференциальной эволюции, существенно не отличаются по подбору активов, при этом, как правило, не осуществляя короткие продажи. Значение t -статистики показывает, что различие между алгоритмом дифференциальной эволюции и жадным алгоритмом, как с точки зрения доходностей относительно индекса, так и с точки зрения волатильности является незначимым почти для всех выборок. Заметим, что жадный алгоритм существенно превосходит алгоритм дифференциальной эволюции в простоте реализации и по времени выполнения алгоритма.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-37-00060).

Библиографический список

1. Markowitz H. M. Portfolio Selection // J. Finance. 1952. Vol. 7, № 1. P. 71–91. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x.
2. Roll R. A mean/variance analysis of tracking error // J. Portfol. Mgmt. 1992. Vol. 18, № 4. P. 13–22. DOI: 10.3905/jpm.1992.701922.
3. Takeda A., Niranjan M., Gotoh J., Kawahara Y. Simultaneous pursuit of out-of-sample performance and sparsity in index tracking portfolios // Comput. Manag. Sci. 2013. Vol. 10, iss 1. P. 21–49. DOI: 10.1007/s10287-012-0158-y.
4. Brodie J., Daubechies I., De Mol C., Giannone D., Loris I. Sparse and stable Markowitz portfolios // PNAS. 2009. Vol. 106, № 30. P. 12267–12272. DOI: 10.1073/pnas.0904287106.
5. Gilli M., Kellezi E. The threshold accepting heuristic for index tracking // Financial Engineering, E-Commerce and Supply Chain. 2002. P. 1–18. DOI: 10.1007/978-1-4757-5226-7_1.
6. Prigent J.-L. Portfolio Optimization and Performance Analysis. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2007. 456 p.
7. Rudolf M., Wolter H. J., Zimmermann H. A linear model for tracking error minimization // J. Banking & Finance. 1999. Vol. 23, № 1. P. 85–103. DOI: 10.1016/S0378-4266(98)00076-4.
8. DeMiguel V., Garlappi L., Uppal R. Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy? // Rev. Financ. Stud. 2009. Vol. 22, № 5. P. 1915–1953. DOI: 10.1093/rfs/hhm075.
9. Bertero M., Boccacci P. Introduction to Inverse Problems in Imaging. L. : Institute of Physics Publ., 1998. 352 p. DOI: 10.1887/0750304359.
10. Chen S. S., Donoho D. L., Saunders M. A. Atomic Decomposition by Basis Pursuit // SIAM Review. 2001. Vol. 43, iss. 1. P. 129–159. DOI: 10.1137/S003614450037906X.
11. Daubechies I., Defrise M., De Mol C. An Iterative Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems With a Sparsity Constraint // Communications on Pure and Appl. Math. 2004. Vol. 57, iss. 11. P. 1413–1457. DOI: 10.1002/cpa.20042.
12. Osborne M. R., Presnell B., Turlach B. A. A New Approach to Variable Selection in Least Squares Problems // IMA J. Numer. Anal. 2000. Vol. 20, iss. 3. P. 389–403. DOI: 10.1093/imanum/20.3.389.



13. Osborne M. R., Presnell B., Turlach B. A. On the LASSO and Its Dual // J. Comput. and Graphical Statistics. 2004. Vol. 9, № 2. P. 319–337. DOI: 10.2307/1390657.
14. Efron B., Hastie T., Johnstone I., Tibshirani R. Least Angle Regression // Ann. Statist. 2004. Vol. 32, № 2. P. 407–499. DOI:10.1214/009053604000000067.
15. Zhang T. Adaptive forward-backward greedy algorithm for sparse learning with linear models // Advances in Neural Information Processing Systems 21 (NIPS 2008). Curran Associates, Inc., 2008. P. 1921–1928.
16. Тихонов А. Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 3. С. 591–594.
17. van Montfort K., Visser E., van Draat L. F. Index tracking by means of optimized sampling // J. Portfol. Mgmt. 2008. Vol. 34, № 2. p. 143–151. DOI: 10.3905/jpm.2008.701625.
18. Beasley J. E., Meade N., Chang T.-J. An evolutionary heuristic for the index tracking problem // Eur. J. Oper. Res. 2003. Vol. 148, iss. 3. P. 621–643. DOI: 10.1016/S0377-2217(02)00425-3.
19. Canakoz N. A., Beasley J. E. Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation // Eur. J. Oper. Res. 2008. Vol. 196, iss. 1. P. 384–399. DOI: 10.1016/j.ejor.2008.03.015.
20. Chang T. J., Meade N., Beasley J. E., Sharaiha Y. M. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation // Computers & Operations Research. 2000. Vol. 27, iss. 13. P. 1271–1302. DOI: 10.1016/S0305-0548(99)00074-X.
21. Oriakhi M., Lucas C., Beasley J. E. Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier // Eur. J. Oper. Res. 2011. Vol. 213, iss. 13. P. 538–550. DOI:10.1016/j.ejor.2011.03.030.
22. Derigs U., Nickel N.-H. Meta-heuristic based decision support for portfolio optimization with a case study on tracking error minimization in passive portfolio management // OR Spectrum. 2003. Vol. 25, iss. 3. P. 345–378. DOI: 10.1007/s00291-003-0127-5.
23. Maringer D., Oyewumi O. Index tracking with constrained portfolios // Intell. Syst. Account., Finance Mgmt. 2007. Vol. 15, iss. 1–2. P. 57–71. DOI: 10.1002/isaf.285.
24. Gilli M., Kellezi E. The threshold accepting heuristic for index tracking // Financial Engineering, E-Commerce and Supply Chain. Dordrecht : Kluwer, 2009. P. 1–18. DOI: 10.1007/978-1-4757-5226-7_1.
25. Gilli M., Winker P. Heuristic optimization methods in econometrics // Handbook of Computational Econometrics / eds. D. Beasley, E. Kontogiorghes. Chichester : John Wiley & Sons, Ltd, 2009. P. 81–120. DOI: 10.1002/9780470748916.ch3.
26. Krink T., Mittnik S., Paterlini S. Differential evolution and combinatorial search for constrained index tracking // Ann. Oper. Res. 2009. Vol. 172. Article 153. P. 153–176. DOI: 10.1007/s10479-009-0552-1.
27. Coleman T. F., Li Y., Henniger J. Minimizing tracking error while restricting the number of assets // J. Risk. 2006. Vol. 8, № 4. P. 33–56.
28. Mehlhorn K., Sanders P. Algorithms and Data Structures. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2008. 300 p. DOI: 10.1007/978-3-540-77978-0.
29. Le T., An H., Mahdi M. Long-Short Portfolio Optimization Under Cardinality Constraints by Difference of Convex Functions Algorithm // J. Optim. Theory Appl. 2014. Vol. 161, iss. 1. P. 199–224. DOI: 10.1007/s10957-012-0197-0.
30. Li Y., Yang X., ZHu S., Li D.-H. A hybrid approach for index tracking with practical constraints // J. Ind. Manag. Optim. 2014. Vol. 10, iss. 3. P. 905–927. DOI: 10.3934/jimo.2014.10.905.
31. Cui T., Cheng S., Bai R. A combinatorial algorithm for the cardinality constrained portfolio optimization problem // Proc. of the 2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2014. 2014. Vol. 18, iss. 1. Article 6900357. P. 491–498.



32. *Cesarone F., Scozzari A., Tardella F.* A new method for mean-variance portfolio optimization with cardinality constraints // *Ann. Oper. Res.* 2013. Vol. 205, iss. 1. P. 213–234. DOI: 10.1007/s10479-012-1165-7.
33. *Gilli M., Schumann E.* Heuristic optimisation in financial modeling // *Ann. Oper. Res.* 2012. Vol. 193, iss. 1. P. 129–158. DOI: 10.1007/s10479-011-0862-y.
34. *Das A., Kempe D.* Submodular meets spectral : Greedy algorithms for subset selection, sparse approximation and dictionary selection // *Proc. of the 28th Intern. Conf. on Machine Learning (ICML-11)*. N. Y. : ACM, 2011. P. 1057–1064.
35. *Jeurissen R.* A hybrid genetic algorithm to track the dutch AEX-index // Bachelor's thesis, Informatics & Economics. Erasmus Univ. Rotterdam, 2005. 36 p. URL: <https://ru.scribd.com/document/125079765/Jeurissen-Roland-A-Hybrid-Genetic-Algorithm-to-Track-the-Dutch-AEX-Index-2005> (дата обращения: 10.07.2016).
36. *Jeurissen R., van den Berg J.* Optimized index tracking using a hybrid genetic algorithm // *Proc. IEEE World Congr. Evolutionary Computation (CEC2008)*. 2008. P. 2327–2334. DOI: 10.1109/CEC.2008.4631108.
37. *Maringer D.* Portfolio Management with Heuristic Optimization. *Advances in Comput. Manag. Sci.* Vol. 8. Berlin : Springer, 2005. 223 p. DOI: 10.1007/b136219.
38. *DeMiguel V., Garlappi L., Francisco J.* A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms // *Management Science*. 2009. Vol. 55, iss. 5. P. 798–812.
39. *Giuzio M., Ferrari D., Paterlini S.* Sparse and robust normal and t -portfolios by penalized L_q -likelihood minimization // *EJOR*. 2016. Vol. 250, iss. 1. P. 251–261. DOI: 10.1016/j.ejor.2015.08.056.
40. *Fastrich B., Paterlini S., Winker P.* Cardinality versus q -norm constraints for index tracking // *Quantitative Finance*. 2014. Vol. 14, iss. 11. P. 2019–2032. DOI: 10.1080/14697688.2012.691986.
41. *Xu F., Xu Z., Xue H.* Sparse index tracking: an $L_{1/2}$ regularization based model and solution // Working Paper. arXiv:1506.05867. 2012. P. 1–19.
42. *Ruiz-Torrubiano R., Suárez A.* A memetic algorithm for cardinality-constrained portfolio optimization with transaction costs // *Appl. Soft Comput.* 2015. Vol. 36. P. 125–142. DOI: 10.1016/j.asoc.2015.06.053.
43. *Xu F., Lu Z., Xu Z.* An efficient optimization approach for a cardinality-constrained index tracking problem // *Optimization Methods and Software*. 2016. Vol. 31, iss. 2. P. 258–271. DOI: 10.1080/10556788.2015.1062891.
44. *Yen Y.-M., Yen T.-J.* Solving norm constrained portfolio optimization via coordinate-wise descent algorithms // *Comput. Statist. & Data Anal.* 2014. Vol. 76. P. 737–759. DOI: 10.1016/j.csda.2013.07.010.
45. *Yen Y.-M.* Sparse Weighted-Norm Minimum Variance Portfolios // *Review of Finance*. 2015. Vol. 20, iss. 3. P. 1259–1287. DOI: 10.1093/rof/rfv024.
46. *Xidonas P., Mavrotas G., Psarras J.* Portfolio management within the frame of multiobjective mathematical programming: a categorised bibliographic study // *Intern. J. Oper. Res.* 2010. Vol. 8, iss. 1. P. 21–41. DOI: 10.1504/IJOR.2010.033102.
47. *Brito R. P., Vicente L.* N Efficient cardinality/mean-variance portfolios // *System Modeling and Optimization*. IFIP International Federation for Information Processing. Vol. 443. Berlin, Heidelberg : Springer, 2014. P. 52–73. DOI: 10.1007/978-3-662-45504-3_6.
48. *Gao J., Li D.* Optimal Cardinality Constrained Portfolio Selection // *Operations Research*. 2013. Vol. 61, iss. 3. P. 745–761. DOI: 10.1287/opre.2013.1170.
49. *Ye T., Fang S., Deng Z., Jin Q.* Cardinality constrained portfolio selection problem: A completely positive programming approach // *J. Ind. Manag. Optim.* 2016. Vol. 12, iss. 3. P. 1041–1056. DOI: 10.3934/jimo.2016.12.1041.
50. *Tibshirani R.* Regression Shrinkage and Selection via the Lasso // *J. Royal Statist. Soc. : Ser. B (Statistical Methodology)*. 1996. Vol. 58, № 1. P. 267–288. DOI: 10.1111/j.1467-9868.2011.00771.x.



51. *Becker S., Candes E. J., Grant M.* Templates for convex cone problems with applications to sparse signal recovery // *Mathematical Programming Computation*. 2011. Vol. 3, iss. 3. Article 165. P. 165–218. DOI: 10.1007/s12532-011-0029-5.
52. *Storn R., Price K.* Differential Evolution — A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces // *J. Global Optimization*. 1997. Vol. 11, iss. 4. P. 341–359. DOI: 10.1023/A:1008202821328.
53. *Price K., Storn R. M., Lampinen J. A.* Differential evolution: a practical approach to global optimization. Berlin : Springer, 2005. 539 p.
54. *Andriosopoulos K., Doumpos M., Papapostolou N. C., Pouliasis P. K.* Portfolio optimization and index tracking for the shipping stock and freight markets using evolutionary algorithms // *Transportation Research Part E : Logistics and Transportation Review*. 2013. Vol. 52. Spec. iss. : Maritime Financial Management. P. 16–34. DOI: 10.1016/j.tre.2012.11.006.
55. *Beasley J. E.* OR-Library. URL: <http://people.brunel.ac.uk/mastjbj/jeb/orlib/indtrackinfo.html> (дата обращения: 11.04.2016).

Образец для цитирования:

Файзлиев А. Р., Хомченко А. А., Сидоров С. П. Эмпирический анализ работы алгоритмов решения задачи репликации индекса // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 101–124. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-101-124.

Empirical Analysis of Algorithms for Solving the Index Tracking Problem

A. R. Faizliev, A. A. Khomchenko, S. P. Sidorov

Alexey R. Faizliev, <https://orcid.org/0000-0001-6442-43613>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, faizlievar1983@mail.ru

Andrew A. Khomchenko, <https://orcid.org/0000-0002-0208-7854>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, aahomchenko@gmail.com

Sergei P. Sidorov, <https://orcid.org/0000-0003-4047-82392>, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, sidorovsp@info.sgu.ru

Index tracking is a passive financial strategy that tries to replicate the performance of a given index or benchmark. The aim of investor is to find the weights of assets in her/his portfolio that minimize the tracking error, i.e. difference between the performance of the index and the portfolio. The paper considers the index tracking problem with cardinality constraint, i.e. the limit on the number of assets in the portfolio with non-zero weights. Index tracking problem with cardinality constraint is NP-hard problem and it usually requires the development of heuristic algorithms such as genetic algorithms and differential evolution algorithm. In this paper we will examine different algorithms for solving the problem in l_2 -norm, including greedy algorithm, differential evolution algorithm and LASSO-type algorithm. In our empirical analysis we use publicly available data relating to three major market indices (the Hang Seng (Hong Kong), S&P 100 (USA) and the Nikkei 225 (Japan)). To compare the three approaches (the greedy and the LASSO-type algorithms, the greedy and the differential evolution algorithms) to the index tracking problem, we use both a moving time window procedure and stochastic dominance principle. Moreover, we carried out the comparison using both for in-sample and out-of-sample tracking error analysis.

Key words: index tracking, portfolio optimization, greedy algorithm, LASSO-type regression, differential evolution algorithm.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 18-37-00060).



References

1. Markowitz H. M. Portfolio Selection. *J. Finance*, 1952, vol. 7, no. 1, pp. 71–91. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x.
2. Roll R. A mean/variance analysis of tracking error. *J. Portfol. Mgmt.*, 1992, vol. 18, no. 4, pp. 13–22. DOI: 10.3905/jpm.1992.701922.
3. Takeda A., Niranjana M., Gotoh J., Kawahara Y. Simultaneous pursuit of out-of-sample performance and sparsity in index tracking portfolios. *Comput. Manag. Sci.*, 2013, vol. 10, iss 1, pp. 21–49. DOI: 10.1007/s10287-012-0158-y.
4. Brodie J., Daubechies I., De Molc C., Giannoned D., Lorisc I. Sparse and stable Markowitz portfolios. *PNAS*, 2009, vol. 106, no. 30, pp. 12267–12272. DOI: 10.1073/pnas.0904287106.
5. Gilli M., Kellezi E. The threshold accepting heuristic for index tracking. *Financial Engineering, E-Commerce and Supply Chain*, Springer, 2002, pp. 1–18. DOI: 10.1007/978-1-4757-5226-7_1.
6. Prigent J.-L. *Portfolio Optimization and Performance Analysis*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2007. 456 p.
7. Rudolf M., Wolter H. J., Zimmermann H. A linear model for tracking error minimization. *J. Banking & Finance*, 1999, vol. 23, no. 1, pp. 85–103. DOI: 10.1016/S0378-4266(98)00076-4.
8. DeMiguel V., Garlappi L., Uppal R. Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the $1/N$ Portfolio Strategy? *Rev. Financ. Stud.*, 2009, vol. 22, no. 5, pp. 1915–1953. DOI: 10.1093/rfs/hhm075.
9. Bertero M., Boccacci P. *Introduction to Inverse Problems in Imaging*. London, Institute of Physics Publ., 1998. 352 p. DOI: 10.1887/0750304359.
10. Chen S. S., Donoho D. L., Saunders M. A. Atomic Decomposition by Basis Pursuit. *SIAM Review*, 2001, vol. 43, iss. 1, pp. 129–159. DOI: 10.1137/S003614450037906X.
11. Daubechies I., Defrise M., De Mol C. An Iterative Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems with a Sparsity Constraint. *Communications on Pure and Appl. Math.*, 2004, vol. 57, iss. 11, pp. 1413–1457. DOI: 10.1002/cpa.20042.
12. Osborne M. R., Presnell B., Turlach B. A. A New Approach to Variable Selection in Least Squares Problems. *IMA J. Numer. Anal.*, 2000, vol. 20, iss. 3, pp. 389–403. DOI: 10.1093/imanum/20.3.389.
13. Osborne M. R., Presnell B., Turlach B. A. On the LASSO and Its Dual. *J. Comput. and Graphical Statistics*, 2004, vol. 9, no. 2, pp. 319–337. DOI: 10.2307/1390657.
14. Efron B., Hastie T., Johnstone I., Tibshirani R. Least Angle Regression. *Ann. Statist.*, 2004, vol. 32, no. 2, pp. 407–499. DOI:10.1214/009053604000000067.
15. Zhang T. Adaptive forward-backward greedy algorithm for sparse learning with linear models. *Advances in Neural Information Processing Systems 21 (NIPS 2008)*, Curran Associates, Inc., 2008, pp. 1921–1928.
16. Tikhonov A. N. Incorrect problems of linear algebra and a stable method for their solution. *Sov. Math. Dokl.*, 1965, vol. 6, pp. 988–991.
17. van Montfort K., Visser E., van Draat L. F. Index tracking by means of optimized sampling. *J. Portfol. Mgmt.*, 2008, vol. 34, no. 2, pp. 143–151. DOI: 10.3905/jpm.2008.701625.
18. Beasley J. E., Meade N., Chang T.-J. An evolutionary heuristic for the index tracking problem. *Eur. J. Oper. Res.*, 2003, vol. 148, iss. 3, pp. 621–643. DOI: 10.1016/S0377-2217(02)00425-3.
19. Canagkoz N. A., Beasley J. E. Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation. *Eur. J. Oper. Res.*, 2008, vol. 196, iss. 1, pp. 384–399. DOI: 10.1016/j.ejor.2008.03.015.
20. Chang T. J., Meade N., Beasley J. E., Sharaiha Y. M. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research*, 2000, vol. 27, iss. 13, pp. 1271–1302. DOI: 10.1016/S0305-0548(99)00074-X.



21. Oriakhi M., Lucas C., Beasley J. E. Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier. *Eur. J. Oper. Res.*, 2011, vol. 213, iss. 13, pp. 538–550. DOI: 10.1016/j.ejor.2011.03.030.
22. Derigs U., Nickel N.-H. Meta-heuristic based decision support for portfolio optimization with a case study on tracking error minimization in passive portfolio management. *OR Spectrum*, 2003, vol. 25, iss. 3, pp. 345–378. DOI: 10.1007/s00291-003-0127-5.
23. Maringer D., Oyewumi O. Index tracking with constrained portfolios. *Intell. Syst. Account., Finance Mgmt.*, 2007, vol. 15, iss. 1–2, pp. 57–71. DOI: 10.1002/isaf.285.
24. Gilli M., Kellezi E. The threshold accepting heuristic for index tracking. *Financial Engineering, E-Commerce and Supply Chain*. Dordrecht, Kluwer, 2009, pp. 1–18. DOI: 10.1007/978-1-4757-5226-7_1.
25. Gilli M., Winker P. Heuristic optimization methods in econometrics. *Handbook of Computational Econometrics*, eds. D. Beasley, E. Kontoghiorghes. Chichester, John Wiley & Sons, Ltd, 2009, pp. 81–120. DOI: 10.1002/9780470748916.ch3.
26. Krink T., Mittnik S., Paterlini S. Differential evolution and combinatorial search for constrained index tracking. *Ann. Oper. Res.*, 2009, vol. 172, art. 153, pp. 153–176. DOI: 10.1007/s10479-009-0552-1.
27. Coleman T. F., Li Y., Henniger J. Minimizing tracking error while restricting the number of assets. *J. Risk.*, 2006, vol. 8, no. 4, pp. 33–56.
28. Mehlhorn K., Sanders P. *Algorithms and Data Structures*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2008. 300 p. DOI: 10.1007/978-3-540-77978-0.
29. Le T., An H., Mahdi M. Long-Short Portfolio Optimization Under Cardinality Constraints by Difference of Convex Functions Algorithm. *J. Optim. Theory Appl.*, 2014, vol. 161, iss. 1, pp. 199–224. DOI: 10.1007/s10957-012-0197-0.
30. Li Y., Yang X., ZHu S., Li D.-H. A hybrid approach for index tracking with practical constraints. *J. Ind. Manag. Optim.*, 2014, vol. 10, iss. 3, pp. 905–927. DOI: 10.3934/jimo.2014.10.905.
31. Cui T., Cheng S., Bai R. A combinatorial algorithm for the cardinality constrained portfolio optimization problem. *Proc. of the 2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2014*, 2014, vol. 18, iss. 1, art. 6900357, pp. 491–498.
32. Cesarone F., Scozzari A., Tardella F. A new method for mean-variance portfolio optimization with cardinality constraints. *Ann. Oper. Res.*, 2013, vol. 205, iss. 1, pp. 213–234. DOI: 10.1007/s10479-012-1165-7.
33. Gilli M., Schumann E. Heuristic optimisation in financial modeling. *Ann. Oper. Res.*, 2012, vol. 193, iss. 1, pp. 129–158. DOI: 10.1007/s10479-011-0862-y.
34. Das A., Kempe D. Submodular meets spectral: Greedy algorithms for subset selection, sparse approximation and dictionary selection. *Proc. of the 28th Intern. Conf. on Machine Learning (ICML-11)*. New York, USA, ACM, 2011, pp. 1057–1064.
35. Jeurissen R. A hybrid genetic algorithm to track the dutch AEX-index. *Bachelor's thesis, Informatics & Economics*, Erasmus Univ. Rotterdam, 2005. 36 p. Available at: <https://ru.scribd.com/document/125079765/Jeurissen-Roland-A-Hybrid-Genetic-Algorithm-to-Track-the-Dutch-AEX-Index-2005> (Accessed 10 July 2016).
36. Jeurissen R., van den Berg J. Optimized index tracking using a hybrid genetic algorithm. *Proc. IEEE World Congr. Evolutionary Computation (CEC2008)*, 2008, pp. 2327–2334. DOI: 10.1109/CEC.2008.4631108.
37. Maringer D. *Portfolio Management with Heuristic Optimization*. Advances in Comput. Manag. Sci., vol. 8. Berlin, Springer, 2005. 223 p. DOI: 10.1007/b136219.
38. DeMiguel V., Garlappi L., Francisco J. A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms. *Management Science*, 2009, vol. 55, iss. 5, pp. 798–812.
39. Giuzio M., Ferrari D., Paterlini S. Sparse and robust normal and t -portfolios by penalized L_q -likelihood minimization. *EJOR*, 2016, vol. 250, iss. 1, pp. 251–261. DOI: 10.1016/j.ejor.2015.08.056.



40. Fastrich B., Paterlini S., Winker P. Cardinality versus q -norm constraints for index tracking. *Quantitative Finance*, 2014, vol. 14, iss. 11, pp. 2019–2032. DOI: 10.1080/14697688.2012.691986.
41. Xu F., Xu Z., Xue H. *Sparse index tracking: an $L_{1/2}$ regularization based model and solution*. Working Paper, 2012, arXiv:1506.05867, pp. 1–19.
42. Ruiz-Torrubiano R., Suárez A. A memetic algorithm for cardinality-constrained portfolio optimization with transaction costs. *Appl. Soft Comput.*, 2015, vol. 36, pp. 125–142. DOI: 10.1016/j.asoc.2015.06.053.
43. Xu F., Lu Z., Xu Z. An efficient optimization approach for a cardinality-constrained index tracking problem. *Optimization Methods and Software*, 2016, vol. 31, iss. 2, pp. 258–271. DOI: 10.1080/10556788.2015.1062891.
44. Yen Y.-M., Yen T.-J. Solving norm constrained portfolio optimization via coordinate-wise descent algorithms. *Comput. Statist. & Data Anal.*, 2014, vol. 76, pp. 737–759. DOI: 10.1016/j.csda.2013.07.010.
45. Yen Y.-M. Sparse Weighted-Norm Minimum Variance Portfolios. *Review of Finance*, 2015, vol. 20, iss. 3, pp. 1259–1287. DOI: 10.1093/rof/rfv024.
46. Xidonas P., Mavrotas G., Psarras J. Portfolio management within the frame of multiobjective mathematical programming: a categorised bibliographic study. *Intern. J. Oper. Res.*, 2010, vol. 8, iss. 1, pp. 21–41. DOI: 10.1504/IJOR.2010.033102.
47. Brito R. P., Vicente L. N. Efficient cardinality/mean-variance portfolios. *System Modeling and Optimization*, IFIP International Federation for Information Processing, vol. 443. Berlin, Heidelberg, Springer, 2014, pp. 52–73. DOI: 10.1007/978-3-662-45504-3_6.
48. Gao J., Li D. Optimal Cardinality Constrained Portfolio Selection. *Operations Research*, 2013, vol. 61, iss. 3, pp. 745–761. DOI: 10.1287/opre.2013.1170.
49. Ye T., Fang S., Deng Z., Jin Q. Cardinality constrained portfolio selection problem: A completely positive programming approach. *J. Ind. Manag. Optim.*, 2016, vol. 12, iss. 3, pp. 1041–1056. DOI: 10.3934/jimo.2016.12.1041.
50. Tibshirani R. Regression Shrinkage and Selection via the Lasso. *J. Royal Statist. Soc.: Ser. B (Statistical Methodology)*, 1996, vol. 58, no. 1, pp. 267–288. DOI: 10.1111/j.1467-9868.2011.00771.x.
51. Becker S., Candes E. J., Grant M. Templates for convex cone problems with applications to sparse signal recovery. *Mathematical Programming Computation*, 2011, vol. 3, iss. 3, art. 165, pp. 165–218. DOI: 10.1007/s12532-011-0029-5.
52. Storn R., Price K. Differential Evolution — A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces. *J. Global Optimization*, 1997, vol. 11, iss. 4, pp. 341–359. DOI: 10.1023/A:1008202821328.
53. Price K., Storn R. M., Lampinen J. A. *Differential evolution: a practical approach to global optimization*. Berlin, Springer, 2005. 539 p.
54. Andriosopoulos K., Doumpos M., Papapostolou N. C., Pouliasis P. K. Portfolio optimization and index tracking for the shipping stock and freight markets using evolutionary algorithms. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2013, vol. 52, spec. iss. : Maritime Financial Management, pp. 16–34. DOI: 10.1016/j.tre.2012.11.006.
55. Beasley J. E. *OR-Library*. Available at: <http://people.brunel.ac.uk/mastjjb/jeb/orlib/ind-trackinfo.html> (Accessed 11 April 2016).

Cite this article as:

Faizliev A. R., Khomchenko A. A., Sidorov S. P. Empirical Analysis of Algorithms for Solving the Index Tracking Problem. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 101–124 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-101-124.
